Analyse 1

Andreas Stahel

10 juillet 2017

Table des matières

1 Équations, inégalités, solutions **1**
1.1 Définitions de base 1
1.2 Équations quadratiques, complétions du carré 2
1.3 Inégalités 4
1.4 Problèmes 5
1.4.1 Solutions de quelques problèmes 9
1.5 Récapitulation 15

2 Fonctions, applications, graphes **16**
2.1 Introduction 16
2.2 Injections, surjections et bijections 17
2.3 Opérations avec des fonctions réelles 18
2.4 Composition et fonction inverse 18
2.5 Le graphe d'une fonction réelle 19
2.6 Equations explicites, implicites, paramétriques 22
2.7 Transformations de coordonnées simples 23
2.8 Tableau des transformations simples 25
2.9 Problèmes 25
2.9.1 Solutions de quelques problèmes 29
2.10 Récapitulation 35

3 Polynômes et fonctions rationnelles **36**
3.1 Zéros des polynômes 37
3.1.1 Degré 1 37
3.1.2 Degré 2 37
3.1.3 Degré 3 38
3.1.4 Degré ≥ 4 38
3.2 Graphes de polynômes 38
3.2.1 fonction linéaire 38
3.2.2 fonction quadratique 38
3.2.3 polynômes du degré ≥ 3 39
3.3 Le schéma de Horner 40
3.4 Division des polynômes par un facteur linéaire 41
3.5 Division des polynômes 44
3.6 Interpolation par polynômes 48
3.6.1 Problème 48
3.6.2 Méthode de Lagrange 49
3.6.3 Méthode de Newton 50
3.6.4 Aspects communs 52
3.6.5 Exemples et avis 53
3.7 Fonctions rationnelles 57

3.8 Problèmes . . . 60
3.8.1 Problèmes généraux . . . 60
3.8.2 Interpolation . . . 64
3.8.3 Fonctions rationelles . . . 66
3.8.4 Solutions de quelques problèmes . . . 69
3.9 Récapitulation . . . 80

4 Fonctions trigonométriques 81
4.1 Angles en radian . . . 81
4.2 Définition des fonctions circulaires . . . 82
4.3 Propriétés des fonction trigonométriques . . . 83
4.3.1 Preuve d'un théorème d'addition . . . 83
4.4 La fonction tangent . . . 85
4.5 Calculs des éléments des triangles . . . 85
4.6 Fonctions trigonométriques inverses . . . 87
4.7 Équations trigonométriques . . . 89
4.8 Oscillations harmonique . . . 90
4.8.1 Superposition de deux signaux avec fréquences identiques . . . 91
4.8.2 Superposition des signaux avec des fréquences différentes . . . 92
4.8.3 Amplificateur Lock In . . . 93
4.8.4 FM Radio . . . 94
4.9 Une régulation par une force centrifuge . . . 94
4.10 Problèmes . . . 96
4.10.1 Problèmes élémentaires . . . 96
4.10.2 Propriétés des fonctions . . . 97
4.10.3 Équations trigonométriques . . . 100
4.10.4 Applications . . . 101
4.10.5 Solutions de quelques problèmes . . . 102
4.11 Récapitulation . . . 110

5 Fonctions exponentielle et logarithmique 111
5.1 La fonction exponentielle et le logarithme naturelle . . . 111
5.1.1 Propriétés de base . . . 111
5.1.2 Des premiers applications . . . 113
5.2 Fonctions exponentielle et logarithmique avec base arbitraire . . . 115
5.3 Fonctions hyperboliques . . . 118
5.3.1 Définitions et propriétés simples . . . 118
5.3.2 Chaînette . . . 120
5.3.3 Théorème d'additions et fonction inverse . . . 121
5.4 Échelle logarithmique . . . 123
5.4.1 Un filtre passe-haut . . . 126
5.4.2 Un filtre passe-bas . . . 127
5.5 Problèmes . . . 129
5.5.1 Résoudre des équations . . . 129
5.5.2 Fonctions et graphes . . . 130
5.5.3 Applications . . . 132
5.5.4 Solutions pour quelques problèmes . . . 138
5.6 Récapitulation . . . 150

6 Suites, séries et continuité **151**
6.1 Suites et séries des nombres . . . 152
6.1.1 Définitions et résultats de base . . . 152
6.1.2 Sous–suites . . . 160
6.1.3 Séries des nombres . . . 162
6.1.4 Inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques . . . 171
6.2 Fonctions continues . . . 172
6.2.1 Définitions et résultats de base . . . 173
6.2.2 Limites à gauche et à droite . . . 179
6.2.3 Résultats sur des fonctions continues . . . 181
6.3 Problèmes . . . 183
6.3.1 Suites . . . 183
6.3.2 Séries . . . 187
6.3.3 Continuité . . . 190
6.3.4 Solutions de quelques problèmes . . . 193
6.4 Récapitulation . . . 204

7 La dérivée **205**
7.1 Qu'est-ce qu'on entend par vitesse? . . . 205
7.2 Tangentes . . . 206
7.3 Définition de la dérivée . . . 207
7.4 Approximation linéaire et symboles $o(x)$ et $O(x)$. . . . 210
7.5 Règles de dérivation . . . 212
7.6 Dérivées supérieures . . . 216
7.7 Quelques résultats concernant les dérivées . . . 217
7.7.1 Théorème de Rolle . . . 217
7.7.2 Théorème des accroissements finis et applications . . . 217
7.8 Règle de l'Hospital pour calculer des limites . . . 220
7.9 Polynômes de Taylor, approximations d'ordre supérieur . . . 224
7.9.1 Polynômes et schéma de Horner . . . 224
7.9.2 Fonctions générales . . . 226
7.9.3 Formule du binôme . . . 230
7.9.4 Approximation par des fractions rationnelles . . . 233
7.10 Exercices . . . 234
7.10.1 Exercices de base . . . 234
7.10.2 Exercices supplémentaires . . . 240
7.10.3 Règle de l'Hospital . . . 241
7.10.4 Approximations . . . 242
7.10.5 Solutions de quelques exercices . . . 245
7.11 Résumé . . . 263

8 Applications de la dérivée **264**
8.1 Problèmes d'optimisation . . . 264
8.1.1 Théorie . . . 264
8.1.2 Quelques exemples simples . . . 268
8.1.3 Réfraction et réflexion . . . 272
8.2 Etude d'une fonction . . . 273
8.2.1 Exemples . . . 276
8.3 Dérivées implicites, fonctions réciproques . . . 278
8.4 Estimation des déviations . . . 281
8.5 Taux liés . . . 284

8.6 Méthode de Newton pour résoudre une équation . . . 286
8.6.1 Introduction . . . 286
8.6.2 Résultats . . . 288
8.6.3 Désavantages et problèmes de la méthode de Newton . . . 290
8.6.4 Programme pour le HP–48 . . . 293
8.6.5 Exemples . . . 294
8.6.6 Méthode de Newton d'ordre supérieur . . . 296
8.7 Interpolation und numerische Approximationen . . . 298
8.7.1 Lineare Interpolation . . . 299
8.7.2 Quadratische Interpolation . . . 301
8.8 Kubische Spline–Interpolation . . . 303
8.8.1 Definition einer kubischen Spline–Funktion . . . 304
8.8.2 Der Ansatz . . . 304
8.8.3 Die Berechnung der Koeffizienten . . . 305
8.8.4 Zur Wahl von c_0 und c_n . . . 306
8.8.5 Ein vollständig durchgerechnetes Beispiel . . . 306
8.8.6 Ein zweites Beispiel . . . 308
8.9 Exercices . . . 309
8.9.1 Problèmes d'optimisation . . . 309
8.9.2 Etude d'une fonction . . . 314
8.9.3 Dérivée implicite . . . 316
8.9.4 Calcul d'erreur . . . 317
8.9.5 Taux liés . . . 318
8.9.6 Méthode de Newton . . . 318
8.9.7 Interpolation . . . 322
8.9.8 Solutions de quelques exercices . . . 323
8.10 Résumé . . . 345

Bibliographie **346**

Liste des figures **348**

Liste des tableaux **349**

Chapitre 1

Équations, inégalités, solutions

Ce chapitre est une répétition de résultats et méthodes déjà connus.

1.1 Définitions de base

On considère une équation qui contient une grandeur inconnue (la variable). On cherche la valeur (les valeurs) de la variable, telle que l'équation soit satisfaite.

1–1 Exemple :

$$\begin{aligned} 7x+15 &= 3 && \text{variable : } x \\ 7x &= 3-15 && \\ x &= \frac{-12}{7} && \text{germandie Lösungla solution} \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

1–2 Définition : L'ensemble de toutes les solutions d'une équation est appelé **ensemble des solutions**.

Notez: il est possible qu'une équation n'ait pas de solution, une solution ou plus d'une solution.

1–3 Exemple :

$x^2+4=0$	$7x+15=3$	$x^2-4=0$
pas de solution (réelle)	une seule solution	deux solutions
$L=\{\}=\emptyset$	$L=\{-12/7\}$	$L=\{+2,-2\}$

$\diamondsuit$

1–4 Définition : Deux équations sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble des solutions. Habituellement on essaie de transformer une équation compliquée en une équation plus simple.

1–5 Résultat : *Liste des opérations qui transforment une équation en une équation équivalente.*

- *addition du même terme des deux côtés d'une équation.*
- *soustraction du même terme des deux côtés d'une équation.*
- *multiplication des deux côtés d'une équation par le même terme, mais différent de zéro.*
- *division des deux côtés d'une équation par le même terme, mais différent de zéro.*

1–6 Exemple :

$$\begin{aligned}
\tfrac{15x-3}{7} &= -2 && \mid \cdot 7 \\
15x-3 &= -14 && \mid +3 \\
15x &= -11 && \mid \div 15 \\
x &= \tfrac{-11}{15}
\end{aligned}$$

♢

1–7 Exemple :

$$\begin{aligned}
3x-3\cdot 7 &= 2\cdot 7 - 2x \\
3\,(x-7) &= -2\,(x-7) && \mid \div (x-7) \\
3 &= -2
\end{aligned}$$

Pourquoi ça ne marche pas? ♢

1–8 Résultat : *Une équation est appelée* **linéaire** *par rapport à la variable x, si elle peut être écrite dans la forme*

$$a\,x+b=0$$

avec des constantes $a\neq 0$ et b. La solution unique est donnée par

$$x=-\,\frac{b}{a}$$

1.2 Équations quadratiques, complétions du carré

La fondation pour les résultats dans cette section est la formule

$$(a+b)^2=a^2+2\,a\,b+b^2$$

Il faut trouver toutes les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$, où a, b und c sont des constantes réelles et $a\neq 0$.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0 && \mid \div a \\
x^2+2\,\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a} &= 0 && \mid +\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \\
(x+\frac{b}{2a})^2 &= \frac{1}{4a^2}\,(b^2-4ac)
\end{aligned}$$

Maintenant l'idée est de calculer la racine des deux côtés, et puis on doit isoler x. Ça ne marche pas toujours (pourquoi?).

On calcule l'expression $D=b^2-4ac$ (la **discriminante**) et on arrive a trois cas differents:

(A) $D=b^2-4ac>0$ on obtient deux solutions differentes

$$x_{1,2}=\frac{1}{2a}\,(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2a}\,(-b+\sqrt{b^2-4ac})\\ \frac{1}{2a}\,(-b-\sqrt{b^2-4ac})\end{array}\right.$$

(B) $D=b^2-4ac=0$ on obtient une solution (double)

$$x=\frac{-b}{2a}$$

(C) $D = b^2 - 4ac < 0$ il n'y a pas de solutions réelles, parce qu'on ne peut pas calculer la racine d'un nombre negatif. Mais il y a deux solutions complexes ($i = \sqrt{-1}$)

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}\,(-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\,(-b + i\sqrt{4ac - b^2}) \\ \frac{1}{2a}\,(-b - i\sqrt{4ac - b^2}) \end{cases}$$

1–9 Résultat : *Pour une équation quadratique*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

avec deux solutions réelles x_1 et x_2 on peut vérifier les **formules de Viète**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \textit{et} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

et la **factorisation**

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

1–10 Exemple : Pour résoudre l'équation en complétant le carré

$$3x^2 - 8x - 4 = 0$$

on calcule

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x - 4 &= 0 \\ x^2 - 2\,\tfrac{4}{3}\,x - \tfrac{4}{3} &= 0 \\ x^2 - 2\,\tfrac{4}{3}\,x + \left(\tfrac{4}{3}\right)^2 - \left(\tfrac{4}{3}\right)^2 - \tfrac{4}{3} &= 0 \\ \left(x - \tfrac{4}{3}\right)^2 &= +\left(\tfrac{4}{3}\right)^2 + \tfrac{4}{3} = \tfrac{4\cdot 7}{9} \\ x - \tfrac{4}{3} &= \pm\,\tfrac{2}{3}\,\sqrt{7} \\ x &= \tfrac{4 \pm 2\sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

On peut comparer ce résultat avec la fomule générale

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}\,(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) = \frac{1}{2\cdot 3}\,(+8 \pm \sqrt{64 + 48}) = \frac{1}{2\cdot 3}\,(+8 \pm 4\sqrt{7})$$

♢

Des équations comprenantes des **radicaux** peuvent souvent être réduites à des équations quadratiques en élevant au carré les deux membres de l'équation pour éliminer le radical. Ce n'est pas une transformation en une équation équivalente. Toutes les solutions de cette équation quadratique doivent être vérifiées car certaines ne sont pas admissibles.

1–11 Exemple : Trouvez toutes les solutions de l'équation

$$\begin{aligned} \sqrt{2x - 3} + 5 - 3x &= 0 \\ \sqrt{2x - 3} &= 3x - 5 && |\text{ élever au carré} \\ 2x - 3 &= (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25 \\ 9x^2 - 32x + 28 &= 0 \\ x_{1,2} &= \tfrac{1}{18}(+32 \pm \sqrt{32^2 - 4\cdot 9\cdot 28}) = \begin{cases} 2 \\ \frac{14}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant on **doit** tester les candidats $x = 2$ et $x = 14/9$ et on verifie que seulement $x = 2$ est une solution, mais $x = 14/9$ ne marche pas (pourquoi?).

Donc l'ensemble des solutions est $L = \{2\}$. ♢

Une équation est de **forme quadratique** si elle est quadratique pour une certaine fonction de l'inconnue. On peut résoudre ces équations par une **substitution**.

1–12 Exemple : Pour résoudre l'équation **biquadratique**

$$x^4 + x^2 - 12 = 0$$

on peut utiliser la substitution $z = x^2$, et on obtient

$$z^2 + z - 12 = (z+4)\,(z-3) = 0$$

avec les solutions

$$z_1 = -4 \quad \text{et} \quad z_2 = 3$$

Parce que x^2 est positif, z_1 ne produit pas de solution réelle de l'équation, mais on a seulement

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

$\diamondsuit$

1.3 Inégalités

1–13 Exemple : Pour trouver toutes les valeurs de x avec

$$7x + 10 \geq 2$$

on réécrit l'inégalité dans la forme

$$x \geq \frac{-8}{7}$$

et puis on peut facilement dessiner la **représentation graphique** de l'ensemble des solutions $L = [\frac{-8}{7}, \infty)$.

$\diamondsuit$

1–14 Définition : Deux inégalités sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble des solutions. Habituellement on essaie de transformer une inégalité compliquée en une inégalité plus simple.

1–15 Résultat : *Liste des opérations qui transfoment une inégalité en une inégalité équivalente.*

- *addition du même terme aux deux côtés d'une inégalité.*
- *soustraction du même terme aux deux côtés d'une inégalité.*
- *multiplication des deux côtés d'une inégalité par le même terme* **positif**.
- *division des deux côtés d'une inégalité par le même terme* **positif**.
- *multiplication (ou division) des deux côtés d'une inégalité par le même terme* **négatif** *et en même temps changer le sense du signe d'inégalité*

$$< \;\to\; > \quad , \quad > \;\to\; < \quad , \quad \leq \;\to\; \geq \quad , \quad \geq \;\to\; \leq$$

1–16 Exemple : L'ensemble des solutions de

$$2x^3 - 2x > -3x^2$$

est donné par $L = (-2, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$. ♢

1–17 Exemple : Pour trouver l'ensemble des solutions de l'inégalité

$$\frac{1}{x+4} \geq \frac{1}{3x+2}$$

on peut

1. trouver le domaine de définition
2. regarder les signes de $x + 4$ et de $2x + 3$
3. dessiner l'ensemble des solutions

Le résultat est $L = (-4, -\frac{2}{3}) \cup [1, \infty)$. ♢

1.4 Problèmes

• Problème 1–1:
On veut fabriquer, à partir d'une feuille carrée de fer–blanc, une boîte qui aura un volume de 24 dm^3 en enlevant dans chaque coin un carré de 2 dm de côté et en relevant les côtés. Quelles devront être les dimensions de la feuille de fer–blanc?

• Problème 1–2:
Deux robinets remplissent un réservoir en 6h 40min. En combien de temps chacun remplirait–il le réservoir si l'un prend 3h de moins que l'autre pour le remplir?

• Problème 1–3:
Résoudre

$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = 3$$

• Problème 1–4:
Trouver l'ensemble des solutions de l'équation
Finde die Lösungsmenge der Gleichung

$$4 - 2x^2 + \sqrt{2x^4 + 2} = 0$$

• Problème 1–5:
Trouver l'ensemble des solutions de l'équation
Finde die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{1}{2x + 3^2} = \frac{3}{x+1}$$

• Problème 1–6:
Trouver l'ensemble des solutions de l'équation
Finde die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{x}{2x + 3^2} = \frac{3}{x+1}$$

• **Problème 1–7:**
Trouver l'ensemble des solutions de l'équation
Finde die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{x}{2x+3^2} = \frac{3x}{x+1}$$

• **Problème 1–8:**
Trouver l'ensemble des solutions de l'équation
Finde die Lösungsmenge der Gleichung

$$8x^2 + 4\,x^3 = 5x$$

• **Problème 1–9:**
Résoudre l'équation / Lösen Sie die Gleichung $\qquad 1 = x^4 - 3\,x^2$

• **Problème 1–10:**
Soit $a \neq b$. Trouver l'ensemble des solutions de l'équation ci–dessous par rapport à la variable x.

$$\frac{a+b}{a-b}\,x^2 = a^2 - b^2$$

• **Problème 1–11:**
Es sei $a \neq b$ und $a \neq -b$. Finde die Lösungsmenge der Gleichung bezüglich der Variablen x

$$\frac{x}{a-b} + \frac{x}{a+b} = 1$$

• **Problème 1–12:**
Lösen Sie die Gleichung $y = 2\,x + |2-x|$ explizit nach x als Funktion von y auf.

• **Problème 1–13:**
Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

(a) $|x-3| + |x-7| = 2$

(b) $|x-3| + |x-7| = 4$

(c) $|x-3| + |x-7| = 6$

• **Problème 1–14:**
Résoudre l'inégalité $x^2 \leq 5x - 6$.

• **Problème 1–15:**
Résoudre l'inégalité $|3x-4| \leq 1$.

• **Problème 1–16:**
Résoudre l'inégalité $|x-5| \geq |x+2|$.

• **Problème 1–17:**
Résoudre l'inégalité $2 - x \geq |3x+1|$.

• **Problème 1–18:**
Résoudre l'inégalité

$$\frac{x^4 - x^2}{x^2+1} < 0$$

• Problème 1–19:
Résoudre l'inégalité

$$\frac{1-2x}{x+2} \leq 3$$

• Problème 1–20:
Résoudre l'inégalité

$$\frac{-2x+2}{x+2} < 3-x$$

• Problème 1–21:
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Ungleichung

$$\frac{x}{x+1} < \frac{2}{x+2}$$

richtig?

• Problème 1–22:
Résoudre l'inégalité

$$\left| \frac{3x-8}{2} \right| \geq 4$$

• Problème 1–23:
Résoudre l'inégalité

$$|3x| \geq |6-3x|$$

• Problème 1–24:
Finden Sie alle x, für die gilt: $\sqrt{1+x} < 1 + x/2$.

• Problème 1–25:
Trouver une seule inégalité dont l'ensemble des solutions est égal à

$$L = [-1, 0] \cup [3, 5]$$

• Problème 1–26:
(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung **exakt**.

$$x^3 - 7\,x^2 > 12\,x$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung.

$$x > \frac{x-1}{x^2-2}$$

• Problème 1–27:
Résoudre l'inégalité

$$\frac{x}{x-3} > x$$

• Problème 1–28:
(a) Trouver les solutions **exactes** de $\sqrt{x-3} = 5 - x$.
Finden Sie die **exakten** Lösungen von $\sqrt{x-3} = 5 - x$.

(b) Pour quelles valeurs de α il y a des solutions de l'équation $\sqrt{x-3} = \alpha - x$?
Für welche Werte von α hat die Gleichung $\sqrt{x-3} = \alpha - x$ Lösungen?

Vous trouvez les exercices ci–dessous dans le livre [Nick91]

• Problème 1–29:
Trouver les solutions des équations suivantes

(a)

$$\frac{a}{x} + \frac{x}{a} = \frac{x}{a\,b} + \frac{a\,b^2}{x}$$

(b)

$$8\,x^2 - 6\,x + 1 = 0$$

• Problème 1–30:
Finden Sie je eine quadratische Gleichung mit der angegebenen Lösungsmenge.

(a) $x = 3$ und $x = -2$

(b) $x = a + 2\,b$ und $x = 2\,a + b$

• Problème 1–31:
Finden Sie die Lösungen der Gleichung

$$x^4 - 5\,x^2 + 4 = 0$$

• Problème 1–32:
Finden Sie die Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{2\,x^2 + 4\,x - 6} - x - 3 = 0$$

• Problème 1–33:
Finden Sie die Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{2\,x + 15} - \sqrt{x + 4} = 2$$

• Problème 1–34:
Finden Sie die Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x - 4} = 3$$

• Problème 1–35:
Finden Sie die Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{5\,x - 1} - \sqrt{8 - 2\,x} = \sqrt{x - 1}$$

• Problème 1–36:
Déterminer **à la main** les **ensembles des solutions** des équations et inégalités suivantes:

(a)	$2\,x^2 - 3\,x - 2 = 0$	(c)	$\sqrt{x^2 - 6\,x + 9} = x - 3$
(b)	$x^8 - 3\,x^4 = 4$	(d)	$\frac{x-1}{x+1} < 1$

• Problème 1–37:

Trouver les ensembles des solutions pour les problèmes suivantes. Donner des solutions exactes

Finden Sie die Lösungsmengen für die folgenden Probleme. Die Lösungen sind exakt anzugeben.

(a)

$$x^4 - x^2 - 6 = 0$$

(b)

$$x - 3 = \sqrt{x-2}$$

(c)

$$3\,x^2 + 6\,x > 9$$

(d)

$$\frac{1}{(x-2)^2} \geq 1$$

• Problème 1–38:
Der Inhalt eine Dreiecks, das einen rechten Winkel enthält, beträgt 24 dm^2. Die beiden Katheten unterscheiden sich um 2 dm. Wie lang sind sie?

• Problème 1–39:
Wird der Radius eines Kreises verdoppelt, so verdoppelt sich der Flächeninhalt. Wie gross war der Radius?

• Problème 1–40:
Wird der Radius eines Kreises um 3 Einheiten vergrössert, so verdoppelt sich der Flächeninhalt. Wie gross war der Radius?

• Problème 1–41:
Durch eine Verbesserung im Betrieb kann ein Eisenbahnzug jetzt eine um 9 km/h höhere Durchschnittsgeschwindigkeit erreichen und erzielt dadurch auf einer Strecke von 180 km Länge eine Zeiteinsparung von 60 min. Wie viele Stunden benötigt er für die Strecke?

• Problème 1–42:
Um die Tiefe eines Brunnens zu bestimmen, lässt man einen Stein hineinfallen und hört ihn nach 6 s im Wasser aufschlagen. Wie tief ist der Brunnen?
Schallgeschwindigkeit: 333 m/s . Erdbeschleunigung g = 9.81 m/s^2. Die Bremswirkung der Luft kann vernachlässigt werden.

1.4.1 Solutions de quelques problèmes

Solution pour problème 1–1 : 7.464 dm

Solution pour problème 1–2 : Le plus petit robinet remplirait le réservoir en 15h et le plus grand en 12h.

Solution pour problème 1–3 : $x = 5/3$

Solution pour problème 1–8 : $L = \{0, 0.5, -2.5\}$

Solution pour problème 1–9 : Setze $z = x^2$, und es entsteht die quadratische Gleichung $z^2 - 3z - 1 = 0$ mit den Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(3 \pm \sqrt{9+4}\right)$$

Hiervon ist aber nur eine Lösung positiv, und somit erhalten wir

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\,\left(3+\sqrt{13}\right)} \approx \pm 1.817$$

Solution pour problème 1–10 : Si $a = -b$ puis $L = \mathbb{R}$. Si $a \neq -b$ puis on divise par $a + b$ et arrive à

$$\frac{1}{a-b}\,x^2 = a - b \quad \text{ou} \quad x^2 = (a-b)^2$$

et donc $L = \{a - b, b - a\}$

Solution pour problème 1–11 : Erweitern mit $(a-b)\,(a+b) \neq 0$ ergibt

$$\begin{aligned} (a+b)\,x + (a-b)\,x &= (a-b)\,(a+b) \\ 2\,a\,x &= a^2 - b^2 \\ x &= \frac{a^2-b^2}{2\,a} \end{aligned}$$

Solution pour problème 1–12 : Es sind die zwei Fälle $x \leq 2$ und $x > 2$ zu unterscheiden

$$y = \begin{cases} 2\,x + (2-x) & \text{falls} \quad x \leq 2 \\ 2\,x + (x-2) & \text{falls} \quad x > 2 \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen können je nach x aufgelöst werden mit dem Resultat.

$$x = \begin{cases} y - 2 & \text{falls} \quad x \leq 2 \\ (y+2)/3 & \text{falls} \quad x > 2 \end{cases}$$

Die Fallunterscheidung sollte noch als Bedingung an y formuliert werden.

$$x = \begin{cases} y - 2 & \text{falls} \quad y \leq 4 \\ (y+2)/3 & \text{falls} \quad y > 4 \end{cases}$$

Solution pour problème 1–13 :

(a) Keine Lösung für x

(b) $3 \leq x \leq 7$

(c) $x = 2$ und $x = 8$

Solution pour problème 1–14 : $2 \leq x \leq 3$

Solution pour problème 1–15 : $1 \leq x \leq \frac{5}{3}$

Solution pour problème 1–16 : $x \leq \frac{3}{2}$

Solution pour problème 1–17 : $\frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{1}{4}$

Solution pour problème 1–18 : $|x| < 1$ und $x \neq 0$

Solution pour problème 1–19 : $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, \infty)$

Solution pour problème 1–20 : $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 4)$

Solution pour problème 1–21 : $x \in (-2, -\sqrt{2}) \cup (-1, \sqrt{2})$

Solution pour problème 1–22 : $L = (-\infty, 0] \cup [16/3, \infty)$.

Solution pour problème 1–23 : $L = [1, \infty)$.

Solution pour problème 1–24 : $L = [-1, \infty) \setminus \{0\}$.

Solution pour problème 1–25 : Zum Beispiel $(x+1)\,x\,(x-3)\,(x-5) \leq 0$

Solution pour problème 1–26 :

(a)

$$\begin{aligned} x^3 - 7\,x^2 - 12\,x &> 0 \\ x\,\left(x^2 - 7\,x - 12\right) &> 0 \\ x\,\left(x - \frac{7+\sqrt{97}}{2}\right)\,\left(x - \frac{7-\sqrt{97}}{2}\right) &> 0 \end{aligned}$$

Die dritte Zeile wurde mit Hilfe der Lösungen einer quadratischen Gleichung erzeugt.

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(7 \pm \sqrt{49+48}\right) = \frac{7 \pm \sqrt{97}}{2}$$

Somit wechselt der Ausdruck bei $x = 0$ und $x = \frac{7\pm\sqrt{97}}{2}$ das Vorzeichen. Für sehr grosse Werte von x ist die Ungleichung erfüllt. Somit ergibt sich

$$\mathbb{L} = \left(\frac{7-\sqrt{97}}{2}\,,\,0\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{97}}{2}\,,\,\infty\right)$$

(b) Die Ungleichung soll mit $(x^2 - 2)$ erweitert werden. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden

1. Fall: $x^2 - 2 > 0$

$$\begin{aligned} x &> \frac{x-1}{x^2-2} \\ x\,(x^2-2) &> x - 1 \\ x^3 - 3\,x + 1 &> 0 \end{aligned}$$

Durch Lösen der kubischen Gleichung sieht man, dass der Ausdruck rechts positiv ist für $x_1 < x < x_2$ und $x_3 < x$, wobei

$$x_1 \approx -1.879 \quad , \quad x_2 \approx 0.347 \quad , \quad x_3 \approx 1.532$$

Die exakte Lösung ist nicht leicht zu bestimmen. Somit erhalten wir einen ersten Beitrag von $x_1 < x < -\sqrt{2}$ und $x > x_3$ zur Lösungsmenge.

2. Fall: $x^2 - 2 < 0$

$$\begin{aligned} x &> \frac{x-1}{x^2-2} \\ x^3 - 3\,x + 1 &< 0 \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist gelöst für $x_2 < x < \sqrt{2}$.

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbb{L} = \left(x_1\,,\,-\sqrt{2}\right) \cup \left(x_2\,,\,\sqrt{2}\right) \cup \left(x_3\,,\,\infty\right)$$

Die Aufgabe kann auch ohne Fallunterscheidung gelöst werden mittels der Rechnungen

$$\begin{aligned} x &> \frac{x-1}{x^2-2} \\ x - \frac{x-1}{x^2-2} &> 0 \\ \frac{x\,(x^2-2)}{x^2-2} - \frac{x-1}{x^2-2} &> 0 \\ \frac{x^3 - 3\,x - 1}{x^2-2} &> 0 \\ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} &> 0 \end{aligned}$$

Bei einer geraden Anzahl von positiven Faktoren ist der ganze Ausdruck positiv.

Solution pour problème 1–27 : Unterscheide zwei Fälle $x > 3$ und $x < 3$

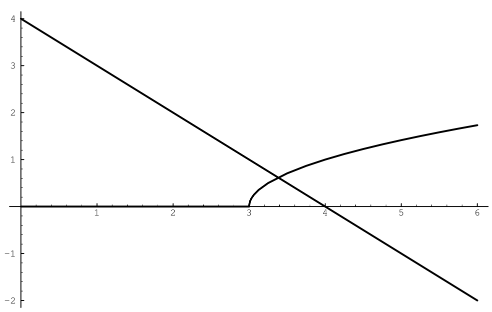
$x > 3$	$x < 3$
$x > x\,(x-3)$	$x < x\,(x-3)$
$0 > x\,(x-4)$	$0 < x\,(x-4)$
$0 < x < 4$ und $x > 3$	$(x < 0$ oder $x > 4)$ und $x < 3$
$3 < x < 4$	$x < 0$

Also ist die Lösungsmenge $L = (3,4) \cup (-\infty, 0)$

Solution pour problème 1–28 :

(a) Durch Quadrieren beider Seiten ergibt sich eine quadratische Gleichung mit den beiden Lösungen $x_1 = 4$ und $x_2 = 7$. Diese beiden Lösungen **müssen** durch Einsetzen überprüft werden, und man sieht, dass nur $x = 4$ die ursprüngliche Gleichung löst.

(b) Man untersuche, für welche Werte von α die Gerade $y = \alpha - x$ die nach rechts geöffnete Halbparabel schneidet. In der untenstehenden Figur ist die Situation für $\alpha = 4$ gezeichnet. Man sieht sofort, dass genau für $\alpha \geq 3$ eine Lösung (Schnittpunkt) entsteht.



Solution pour problème 1–29 :

(a) Falls $b = 1$, ist x beliebig; sonst: $x = \pm a\sqrt{b(1+b)}$

(b) $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{4}$

Solution pour problème 1–30 :

(a) $x^2 - x - 6 = 0$

(b) $x^2 - 3\,(a+b)\,x + 2\,a^2 + 5\,a\,b + 2\,b^2 = 0$

Solution pour problème 1–31 : Biquadratische Gleichung: $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$

Solution pour problème 1–32 : Wurzelgleichung: $x_1 = 5$, $x_2 = -3$. Lösungen unbedingt durch Einsetzen überprüfen!

Solution pour problème 1–33 : Wurzelgleichung: $x_1 = 5$, $x_2 = -3$. Lösungen unbedingt durch Einsetzen überprüfen!

Solution pour problème 1–34 : Wurzelgleichung: keine Lösungen. Lösungen unbedingt durch Einsetzen überprüfen!

Solution pour problème 1–35 : Wurzelgleichung: $x = 2$. Lösungen unbedingt durch Einsetzen überprüfen!

Solution pour problème 1–36 :

(a) équation quadratique

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -1/2 \\ 2 \end{cases}$$

(b) Substitution $z = x^4$

$$\begin{aligned} x^8 - 3\,x^4 - 4 &= 0 \\ z^2 - 3\,z - 4 &= 0 \\ (z-4)\,(z+1) &= 0 \\ z_1 = 4 & \qquad \text{et puis} \quad x_1 = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt{2} \\ z_2 = -1 & \qquad \text{pas de solution réels} \end{aligned}$$

(c) A cause de $x^2 - 6\,x + 9 = (x-3)^2$ on trouve $\sqrt{x^2 - 6\,x + 9} = |x-3|$. Cette expression coïncide avec $(x-3)$ si $x - 3 \geq 0$. Puis l'ensemble des solutions est $L = \{x \geq 3\}$.

(d)

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x+1 > 0$$

Solution pour problème 1–37 :

(a) Es liegt eine biquadratische Gleichung vor. Die Substitution $z = x^2 \geq 0$ führt auf

$$z^2 - z - 6 = 0$$

Wegen $z^2 - z - 6 = (z-3)\,(z+2)$ sind die Lösungen $z_1 = 3$ und $z_2 = -2$. Wegen der Bedingung $z \geq 0$ erhalten wir die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ der ursprünglichen Gleichung.

(b) Der Definitionsbereich besteht aus $x \geq 2$

$$\begin{aligned} x - 3 &= \sqrt{x-2} \\ (x-3)^2 &= x - 2 \\ x^2 - 7\,x + 11 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{1}{2}\,\left(7 \pm \sqrt{49-44}\right) \end{aligned}$$

Beide Lösungen liegen im Definitionsbereich. Da aber beim zweiten Rechenschritt quadriert wurde, sind die Lösungen durch einsetzen zu überprüfen. Man findet, dass nur $x = \frac{1}{2}\,\left(7 + \sqrt{5}\right)$ die ursprüngliche Gleichung löst.

(c) Zu untersuchen ist

$$f(x) = 3\,x^2 + 6\,x - 9 = 3\,\left(x^2 + 2\,x - 3\right) = 3\,(x+3)\,(x-1) > 0$$

Diese nach oben geöffnete Parabel hat die Nullstellen bei $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$. Somit ist die Lösungsmenge der Ungleichung gegeben durch

$$\mathbb{L} = (-\infty, -3) \cup (1, \infty) = \{x < -3\} \cup \{x > 1\}$$

(d) Ausser bei $x = 2$ ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{(x-2)^2} & \geq & 1 \\ (x-2)^2 & \leq & 1 \\ -1 \leq & (x-2) & \leq 1 \\ 1 \leq & x & \leq 3 \end{array}$$

Somit ergibt sich die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = [1,3] \setminus \{2\} \; = \; [1,2) \cup (2,3]$$

d.h alle Zahlen zwischen 1 und 3 (inklusive Grenzen), ohne die Zahl 2 .
Diese Teilaufgabe kann auch direkt gelöst werden: damit der Bruch grösser als 1 ist, muss der Nenner kleiner als 1 sein, ...

Solution pour problème 1–38 : Seien a und b die Längen der beiden Katheten (in dm). Dann gilt

$$a = b + 2 \quad \text{und} \quad a \cdot b = 48$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (b+2) \cdot b &= 48 \\ b^2 + 2\,b - 48 &= 0 \\ (b-6) \cdot (b+8) &= 0 \end{aligned}$$

Von den beiden Lösungen $b_1 = 6$ und $b_2 = -8$ kommt nur die erste in Frage. Somit betragen die Längen der beiden Katheten $b = 6$ dm und $a = 8$ dm .

Solution pour problème 1–39 : Aufgrund der Beschreibung gilt

$$\pi\,(2\,r)^2 = 2\,\pi\,r^2$$

und somit

$$2\,r^2 = r^2$$

d.h. $r = 0$.

Solution pour problème 1–40 : Aufgrund der Beschreibung gilt

$$\pi\,(r+3)^2 = 2\,\pi\,r^2$$

und somit

$$r^2 + 6\,r + 9 = 2\,r^2$$

und die einzige strikt positive Lösung ist

$$r = \frac{6 + 6\,\sqrt{2}}{2} \approx 7.25$$

Solution pour problème 1–41 : Nun noch 4 Stunden .

Solution pour problème 1–42 : Ungefähr 151 m.

1.5 Récapitulation

Après ce chapitre on doit

- connaître les opérations qui transforment une équation dans une équation équivalente.
- être capable de résoudre des équations simples.
- connaître les opérations qui transforment une inégalité en une inégalité équivalente.
- être capable de résoudre des inégaltiés simples et dessiner leurs ensembles des solutions.

Chapitre 2

Fonctions, applications, graphes

2.1 Introduction

Il s'agit d'un des plus importants concepts mathématiques. Il apparaît et joue un rôle primordial dans toutes les branches des mathématiques et informatiques. Les termes *application*, *transformation* et *fonction* sont synonymes. Voilà cette définition importante.

2–1 Définition : Soient A, B deux ensembles. On dit que f est une **fonction** ou **application** de A sur B si, quand on donne une valeur à la variable $x \in A$ on obtient une valeur unique $y \in B$.

L'ensemble A est appelé **domaine** et B est le **champ** (ou codomaine) de la fonction f. L'ensemble de toutes les valeurs possible de f est appelé **image** de f, et noté $Im\,(f)$. On remarque que $Im\,(f)$ est un sous–ensemble (peut–être strict) de B.

2–2 Exemple : Si le rayon d'un cercle est r, l'aire du cercle est πr^2. L'aire est une fonction du rayon avec $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}$ et $Im\,(f) = \mathbb{R}^+$. $\diamondsuit$

2–3 Définition :

- $f : A \longrightarrow B\,,\, x \mapsto f\,(x)\,.$
- A = domaine de définition de la fonction.
- B = champ de la fonction.
- $x \in A$ variable indépendante de la fonction.
- $y \in B$ variable dépendante de la fonction.
- $f\,(A) = \{f\,(x) \in B \mid x \in A\} \subset B$ image de la fonction.
- $x \mapsto f\,(x)$ $\quad$ x devient $f\,(x)$.

Important : On ne doit pas toujours utiliser les lettres x et y pours les variables indépendantes et dépendantes. Pour les applications on choisit une notation adaptée a la situation.

Une fonction peut être définie

(a) par un tableau de correspondance ou un tableau de valeurs telle que

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22

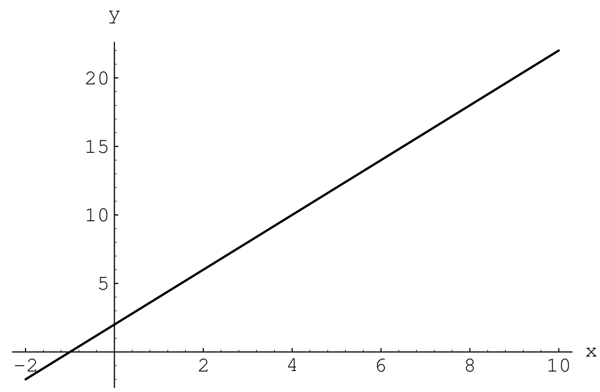


Figure 2.1: Graphe de la function $y = 2 + 2x$

(b) par une équation ou une formule, comme $y = 2 + 2x$.

(c) par un graphe :

Ces relations déterminent un correspondant pour chaque valeur de x. Notons que le tableau ci-dessus est un tableau de valeurs pour ces fonctions. Mais il y a quand même une difference entre (a),(b) et (c). Tuyau: domaine de définition.

2–4 Exemple : La fonction f fait correspondre à chaque pays européen sa capitale. Trouver domaine, champ et image de cette fonction et donner quelques exemples des valeurs de cette fonction. $\diamondsuit$

2–5 Exemple : La fonction f fait correspondre à chaque nombre naturelle son carré. Trouver domaine, champ et image de cette fonction et donner quelques exemples des valeurs de cette fonction. $\diamondsuit$

2.2 Injections, surjections et bijections

2–6 Définition : Soit $f : A \to B$ une fonction.

- La fonction f est dite **injective** si et seulement si les différents éléments de a ont des images distinctes. On peut aussi dire: $f(a) = f(a')$ implique $a = a'$. Une telle fonction est aussi appelée **injection**.
- La fonction f est dite **surjective** si et seulement si chaque élément de B est l'image d'un élément de A. On peut aussi dire: $f(A) = B$. Une telle fonction est aussi appelée **surjection**.
- La fonction est dite **bijective** si et seulement si elle est injective et surjective. Une telle fonction est aussi appelée **bijection**.

2–7 Exemple : Regarder les fonctions suivantes et décider si elles sont injectives, surjectives ou bijectives. Trouver $Im(f)$.

(a) $f : [0,5] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$

(b) $f : [0,\infty) \to [0,\infty) \qquad f(x) = x^2$

(c) $f : [-2,5] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3 - x$

$\diamondsuit$

2–8 Exemple : Pour chaque citoyen de la Suisse il existe un numéro AVS avec 11 chiffres. Discuter la fonction. $\diamondsuit$

2.3 Opérations avec des fonctions réelles

Si le domaine de deux fonctions est $\mathbb{R}$, on peut utiliser les operations de base (addition, soustraction, multiplication, etc.) pour ces fonctions.

2–9 Définition : Soit X un ensemble et

$$f : X \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : X \to \mathbb{R}$$

deux fonctions. Puis on utilise

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) &:= f(x) - g(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \\ (f/g)(x) &:= f(x)/g(x) \end{aligned}$$

pour la divison il faut que $g(x) \neq 0$.

2–10 Exemple : Regarder les trois fonctions f, g und h données par

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad h(x) = \frac{1}{x} \quad .$$

Trouver le domaine de définition maximal, l'image et une formule simplifiée pour les fonctions suivantes. $f \cdot g$, $f + g$, $g - 2 \cdot f$, $g \cdot g$, $g \cdot f - h$ $\diamondsuit$

2.4 Composition et fonction inverse

2–11 Définition : Étant données les fonctions $f : A \to B$ et $g : B \to C$, où le champ de f est le domaine de g, nous pouvons définir une nouvelle fonction de A dans C, appelée la **fonction composée** de f et g, notée $g \circ f$.

$$h = g \circ f \qquad h(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad .$$

Attention: il y a une différence énorme entre composition et multiplication de fonctions.

2–12 Résultat : *La composition est associative. Si*

$$f : A \to B, \qquad g : B \to C, \qquad h : C \to D$$

on a

$$\begin{gathered} (h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in A \\ h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \end{gathered}$$

La composition n'est **pas commutative** *en général*

$$g \circ f \neq f \circ g \qquad .$$

On utilise aussi la notation **fonction réciproque** pour la fonction inverse.

2–13 Résultat : *Soit $f : A \to B$ une fonction bijective. Puis il existe une* **fonction inverse** $f^{-1} : B \to A$ *tel que*

$$f \circ f^{-1} = I_B, \qquad f^{-1} \circ f = I_A \quad .$$

I_A est l'identité en A, ca veut dire $I_A(a) = a$.

2–14 Exemple : Regarder les trois fonctions f, g und h données par

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad h(x) = \frac{1}{x} \quad .$$

Trouver le domaine de définition maximal, l'image et une formule simplifiée pour les fonctions suivantes.

(a) $f \cdot g$

(b) $f \circ g$

(c) $g \circ f$

(d) $g \circ g$

(e) $g \circ f \circ h$

(f) $h \circ g \circ f$

$\diamondsuit$

2–15 Exemple : La valeur de $y = \sqrt{x}$ est déterminée par les conditions $y \geq 0$ et $y^2 = x$. Trouver le domaine et l'image de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Verifier que cette fonction est inversible et donner la fonction inverse.

Pour quels x on a $\sqrt{x^2} = x$? $\diamondsuit$

2.5 Le graphe d'une fonction réelle

On ne regarde que des fonctions dont le domaine de définition et le champ sont des sous–ensembles des nombres réelles.

2–16 Définition : Le graphe d'une fonction $y = f(x)$ est formé de tous les points (x, y) tels que $f(x) = y$.

En figure 2.1 vous trouvez une partie du graphe de la fonction $y = 2x + 2$.

En figure 2.2 vous trouvez le graphe de la fonction $y = x^2$ avec le domaine $(-1.5, 2.0)$.

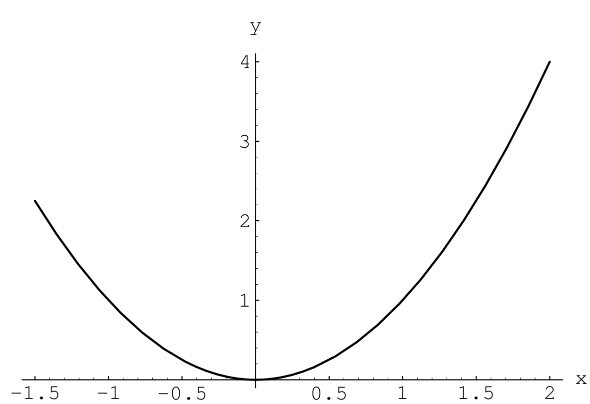


Figure 2.2: graphe de la function $y = x^2$

2–17 Exemple : Dessiner le graphe de la fonction

$$f : [-5, 5] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

$\diamondsuit$

2–18 Exemple : Dessiner le graphe de la fonction

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

$\diamondsuit$

2–19 Exemple : Dessiner le graphe de la fonction donnée par le tableau suivant

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	6	8	4	6	8	4	6	8	4

Donner plusieurs solutions possibles et indiquer les conditions supplémentaires à utiliser. $\diamondsuit$

2–20 Exemple : Dessiner le graphe de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

$\diamondsuit$

2–21 Exemple : Dessiner le graphe de la fonction

$$f(x) = |x|$$

$\diamondsuit$

2–22 Exemple : Dessiner le graphe de la fonction

$$f(x) = |x - 2|^3$$

$\diamondsuit$

2–23 Définition : Voilà quelques expressions qu'on va utiliser souvent: Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que $x_0 \in A$ est un **zéro** de la fonction f si $f(x_0) = 0$.
- On dit que $x_0 \in A$ est un **maximum** de la fonction f si $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in A$. $f(x_0)$ est la **valeur maximale**.
- On dit que $x_0 \in A$ est un **minimum** de la fonction f si $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in A. f(x_0)$ est la **valeur minimale**.
- On dit que la fonction $y = f(x)$ est **croissante** si pour tout $x_0 < x$ on a $f(x_0) \leq f(x)$.
- On dit que la fonction $y = f(x)$ est **strictement croissante** si pour tout $x_0 < x$ on a $f(x_0) < f(x)$.
- On dit que la fonction $y = f(x)$ est **décroissante** si pour tout $x_0 < x$ on a $f(x_0) \geq f(x)$.

- On dit que la fonction $y = f(x)$ est **strictement décroissante** si pour tout $x_0 < x$ on a $f(x_0) > f(x)$.
- On dit que la fonction $y = f(x)$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- On dit que la fonction $y = f(x)$ est **paire** si pour tout $x \in A$ on a $-x \in A$ et $f(-x) = f(x)$.
- On dit que la fonction $y = f(x)$ est **impaire** si pour tout $x \in A$ on a $-x \in A$ et $f(-x) = -f(x)$.
- On dit que la fonction $y = f(x)$ est **périodique** avec période p si $A = \mathbb{R}$ et pour tout x on a $f(x+p) = f(x)$.
- On dit que la fonction $y = f(x)$ est **bornée** s'il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $|f(x)| < M$.

2–24 Exemple : Décider si les fonctions suivantes sont paires, impaires, croissantes, décroissantes et/ou périodiques. Le domaine de définition est le plus grand sous– ensemble possible de $\mathbb{R}$. Dessiner les graphes de ces fonctions.

(a) $f(x) = x^2 - 1$

(b) $f(x) = 2x + 7$

(c) $f(x) = x^3 - 1$

(d) $f(x) = x^3 - x^2 - 1$

(e) $f(x) = |x|$

(f) $f(x) = [x] =$ le nombre entier le plus proche plus petit ou égal à x

(g) $f(x) = [|x|]$

(h) $f(x) = |[x]|$

(i) $f(x) = [x] - x$

(j) $f(x) = ([x] - x)^2$

(k) $f(x) = ([2x] - 2x)^3$

$\diamondsuit$

2–25 Exemple : On sait que la fonction f est paire et périodique avec période 2. Pour x entre 0 et 1 on a $f(x) = 2 - x$. Dessiner cette fonction. $\diamondsuit$

2–26 Résultat : *Quelques résultats simples sur des fonctions*

- *Si f et g sont des fonctions croissantes, la fonction $f + g$ est croissante.*
- *Si f et g sont des fonctions croissantes et positives, la fonction $f \cdot g$ est croissante.*
- *Si f croissante, positive et g est décroissante, positive, la fonction f/g est croissante.*
- *Si f et g sont des fonctions paires, les fonction $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ et f/g sont paires.*
- *Si f et g sont des fonctions impaires, les fonction $f + g$, $f - g$ sont impaires, mais les fonctions $f \cdot g$ et f/g sont paires.*
- *Il y a des fonctions qui sont ni paire ni impaire, par exemple $f(x) = x^2 - x$. Il existe une seule fonction qui est paire et impaire.*
- *Si deux fonctions périodiques f, g ont la même période p, les fonctions $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ et f/g ont la période p.*
- *Si deux fonctions f, g sont périodiques, mais ne pas avec la même période, il est possible que les fonctions $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ et f/g soient périodiques, mais il est aussi possible qu'elles ne le soient pas.*

Pour dessiner le graphe d'une fonction, on peut essayer de trouver les zéros, les maxima, les minima et les domaines où la fonction est croissante ou décroissante. Ça vous donne beaucoup d'information, sans calculer trop de valeurs de la fonction.

2–27 Résultat : *Chaque fonction strictement monotone $f : A \to Im(f)$ est bijective et puis invertible.*

2–28 Exemple :

$$f(x) = x^5 + x \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\diamondsuit$

2.6 Equations explicites, implicites, paramétriques

Il y a des équations dans des formes différentes. Pour simplifier la notation on regarde ici seulement des équations avec des variables x et y. Dans des exemples on utilise souvent des autres noms.

	Forme	Exemple
(a)	explicite $y = f(x)$	 $y = x^2(7 - x)$
(b)	implicite $f(x, y) = 0$	 $y^2 + x^2 = 9$
(c)	paramétrique t : paramètre $x = x(t) \quad y = y(t)$	 $0 \leq t < 2\pi$ $x(t) = 3\cos(t), \quad y(t) = 3\sin(t)$

Dans les situations (b) et (c) il n'est pas toujours possible de trouver une seule valeur y possible pour chaque valeur de la variable x. y n'est pas toujours une fonction de x.

2–29 Exemple : L'équation

$$F(x,y) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4 = 0$$

est dans une forme implicite. On peut la résoudre pour y et on arrive à

$$y^2 = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$$

ou

$$y = \pm\sqrt{4-(x-1)^2} \quad \text{pour} \quad -1 \le x \le 3$$

On transforme une équation implicite en deux équations explicites.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{4-(x-1)^2} \quad \text{pour} \quad -1 \le x \le 3 \\ y_2(x) &= -\sqrt{4-(x-1)^2} \quad \text{pour} \quad -1 \le x \le 3 \end{aligned}$$

On peut aussi résoudre pour la variable x comme fonction explicite de y, et on arrive à

$$\begin{aligned} x_1(y) = 1 + \sqrt{4-y^2} \quad \text{pour} \quad -2 \le y \le 2 \\ x_2(y) = 1 - \sqrt{4-y^2} \quad \text{pour} \quad -2 \le y \le 2 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2–30 Exemple : Les équations

$$\begin{aligned} x &= t+2 \\ y &= 5 - \frac{1}{2}\,t^2 \end{aligned}$$

avec domaine de définition $t \in \mathbb{R}$ donnent une fonction dans une forme paramétrique. Le paramètre t peut être éliminé par $t = x - 2$ et on obtient la forme explicite

$$y = 5 - \frac{1}{2}(x-2)^2 \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\diamondsuit$

2.7 Transformations de coordonnées simples

2–31 Exemple : Regardez le graphe 2.3 de la fonction $y = f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$. Il ressemble à la parabole standard $v = u^2$, mais avec une translation à gauche et en haut. Si on utilise les nouvelles coordonnées $u = x + 1$ et $v = y - 2$ et traduit $y = x^2 + 2x + 3$, on obtient $v = u^2$.

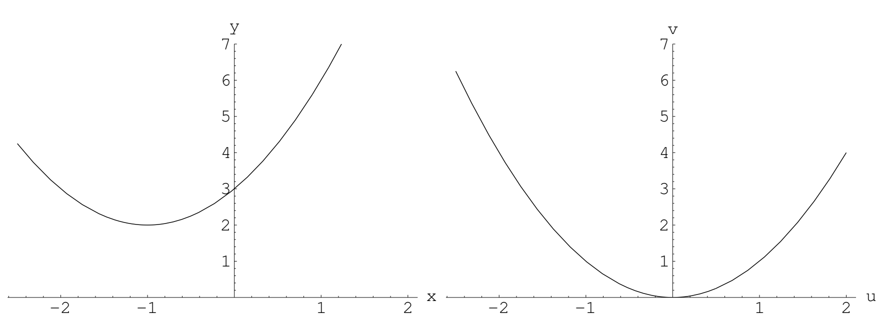


Figure 2.3: Translation d'une parabole

$\diamondsuit$

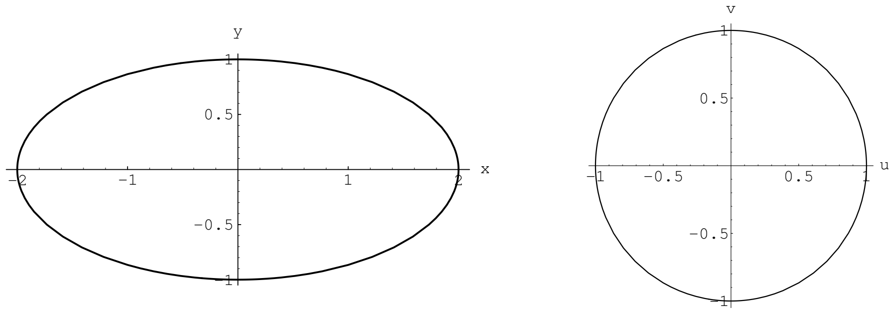


Figure 2.4: Transformation d'une ellipse dans un cercle

2–32 Exemple : Regardez le graphe 2.4 de l'équation implicite $x^2 + 4y^2 = 4$. On a une ellipse, qui ressemble un peu au cercle $u^2 + v^2 = 1$. Si on utilise les nouvelles coordonnées $u = x/2$ et $v = y$ dans l'équation $x^2 + 4y^2 = 4$, on obtient $u^2 + v^2 = 1$. Vous trouvez cette situation en figure 2.4.

♢

Les translations, réflexions et alongements (compressions) sont des transformations simples, mais bien utiles. Souvent on peut simplifier le dessin d'un graphe, si on sait qu'on a une figure simple avec quelques transformations.

2–33 Exemple : Le graphe 2.5 de l'équation $4y^2 + x^2 - 4y + 6x = -1$

$$\begin{aligned} 4y^2 + x^2 - 4y + 6x &= -1 \\ 4y^2 - 4y + 1 + x^2 + 6x + 9 &= -1 + 1 + 9 \quad \text{complétion du carré} \\ (2y-1)^2 + (x+3)^2 &= 9 \\ v^2 + u^2 &= 3^2 \\ v = 2y - 1 \qquad & u = x + 3 \end{aligned}$$

L'équation $v^2 + u^2 = 3^2$ correspond à un cercle avec rayon 3 et centre à l'origine. Les transformations $x = u - 3$ et $y = (v+1)/2$ disent qu'on doit faire une translation par 3 à gauche et par 1 en haut. Puis on doit compresser par 0.5 en direction de y. On peut aussi compresser par 0.5 en direction y et puis faire une translation par 0.5 en haut. Raison: $y = (v+1)/2 = 0.5v + 0.5$.

Si on veut transformer le graphe en xy dans un graphe en uv on utilise les transformations $v = 2y - 1$ und $u = x + 3$. Ça veut dire, d'abord un allongement par un facteur 2 dans la direction de y puis des translations par 3 a droite et par 1 en bas.

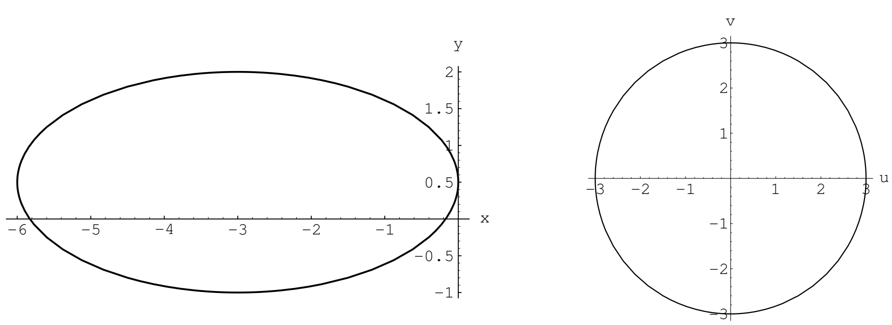


Figure 2.5: Transformation d'une deuxième ellipse dans un cercle

♢

2.8 Tableau des transformations simples

Dans le tableau suivant vous trouvez une déscription de ce qui ce passe avec le graphe dans le systeme xy si on le transforme dans le system uv. Certainement on ne change pas la location de l'origine et les échelles des axes de coordonnées. La forme du graphe va se changer selon le tableau.

Transformation	Condition	Action
$u = x + c$	$c > 0$	translation à droite
	$c < 0$	translation à gauche
$v = y + c$	$c > 0$	translation en haut
	$c < 0$	translation en bas
$u = kx$	$k > 1$	allongement par facteur k en direction x
	$0 < k < 1$	compression par facteur k en direction x
	$k < -1$	allongement par facteur k en direction x et réflexion par rapport à l'axe des y
	$-1 < k < 0$	compression par facteur k en direction x et réflexion par rapport à l'axe des y
$v = ky$	$k > 1$	allongement par facteur k en direction y
	$0 < k < 1$	compression par facteur k en direction y
	$k < -1$	allongement par facteur k en direction y et réflexion par rapport à l'axe des x
	$-1 < k < 0$	compression par facteur k en direction y et réflexion par rapport à l'axe des x
$u = y$ $v = x$		réflexion par rapport à la droite $y = x$

2.9 Problèmes

• Problème 2–1:
Examiner les fonctions

$$f(x) = x^2 - 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{und/et} \quad h(x) = x^3$$

Touver les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} a(x) &= (f \cdot g)(x) + h(x) \\ b(x) &= (f \circ g)(x) + h(x) \\ c(x) &= (g \circ f)(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d(x) &= \frac{h(x)}{f(x)} \\ e(x) &= (h \circ (f \cdot f))(x) \end{aligned}$$

• Problème 2–2:
Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on sait que la fonction est périodique avec période 4 et impaire. Pour $0 \le x \le 2$ le graphe de f est un parabole standard à laquelle on applique une translation et une reflexion de la sorte qu'elle passe par les points $(1, 1)$ et $(2, 0)$.

(a) Dessiner le graphe de la fonction pour $-4 < x < 6$.

(b) Calculer $f(-2.5)$.

• **Problème 2–3:**
Regarder l'équation implicite suivante

$$y^2 + 4y + 11 - x = 0$$

(a) Trouver **une seule** équation éxplicite, qui correspond exactement à l'équation en haut.

(b) Dessiner l'ensemble des points (x, y) qui sont des solutions de l'équation ci-dessus.

• **Problème 2–4:**
Soit

$$f(x) = x^3 + x + 1 \quad , \quad g(x) = \frac{1}{x-1}$$

Trouver

(a) le domaine de définition de $g \cdot f$

(b) le domaine de définition de $g \circ f$

(c) la valeur de $f^{-1}(11)$

• **Problème 2–5:**
Für die Funktion $f(x) = \dfrac{2-x}{x-1}$ bestimme man

(a) den maximalen Definitionsbereich und das Bild.

(b) die Intervalle auf denen f monoton fällt, bzw wächst.

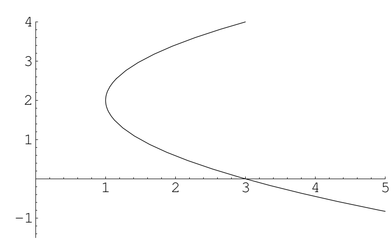
(c) die Intervalle auf denen $f > 0$.

Man zeige

$$\frac{u+v}{2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f(u) + f(v)}{2} = -1$$

Welche Symmetrie des Graphen von f drückt sich hierin aus?

• **Problème 2–6:**
Le sommet de la parabole à droite est $(1, 2)$ et elle passe par le point $(3, 0)$. Trouver les points d'intersection de la parabole avec la droite $g(x) = y = 2\,x - 1$.



• **Problème 2–7:**
Une ellipse avec centre $x = 3$ touche l'axe des y à l'hauteur $y = 2$ et elle touche la droite horizontale $y = 6$.

(a) Esquisser cette ellipse.

(b) Trouver les point d'intersection avec l'axe des x, d'une façon **exacte**.

• Problème 2–8:
Regarder une ellipse avec centre $(-2, 3)$ et un diamêtre de 5 dans la direction des x et un diamêtre de 8 dans la direction des y.

(a) Trouver l'équation de cette ellipse.

(b) Calculer les valeurs **exactes** des points d'intersection de l'ellipse avec l'axe des y.

• Problème 2–9:
Une ellipse est donnée par l'équation

$$x^2 - 4x + 4y^2 + 4y = 16$$

Calculer les expressions suivantes d'une façon exacte

(a) Centre de l'ellipse

(b) Longueurs des demi–axes

(c) Coordonnées des quatres sommets

• Problème 2–10:
Une ellipse avec les demi-axes parallèle au axes des x et y possède un sommet au point $(6, -2)$. L'ellipse a exactement un point commun avec l'axe des x et exactement un point commun avec l'axe des y.

(a) Trouver l'équation de cette ellipse dans une forme implicite.

(b) Trouver les valeurs **exactes** des deux points d'intersection de cette ellipse avec la droite verticale au $x = 2$.

• Problème 2–11:
Les demie-axes d'une ellipse sont parallèles au axes des x et y et deux sommets sont donnés par $(-1, 2)$ et $(1, 5)$. L'éllipse coupe l'axe des x.

(a) Trouver l'équation de cette ellipse.

(b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des y.

(c) Calculer l'aire de cette ellipse à l'aide d'une transormation et l'aire d'un cercle.

• Problème 2–12:
L'ensemble des solutions de l'équation

$$x^2 - 8\,x + 8\,y + 4\,y^2 + 11 = 0$$

est une ellipse.

(a) Trouver les data de cette ellipse et esquisser l'ellipse.

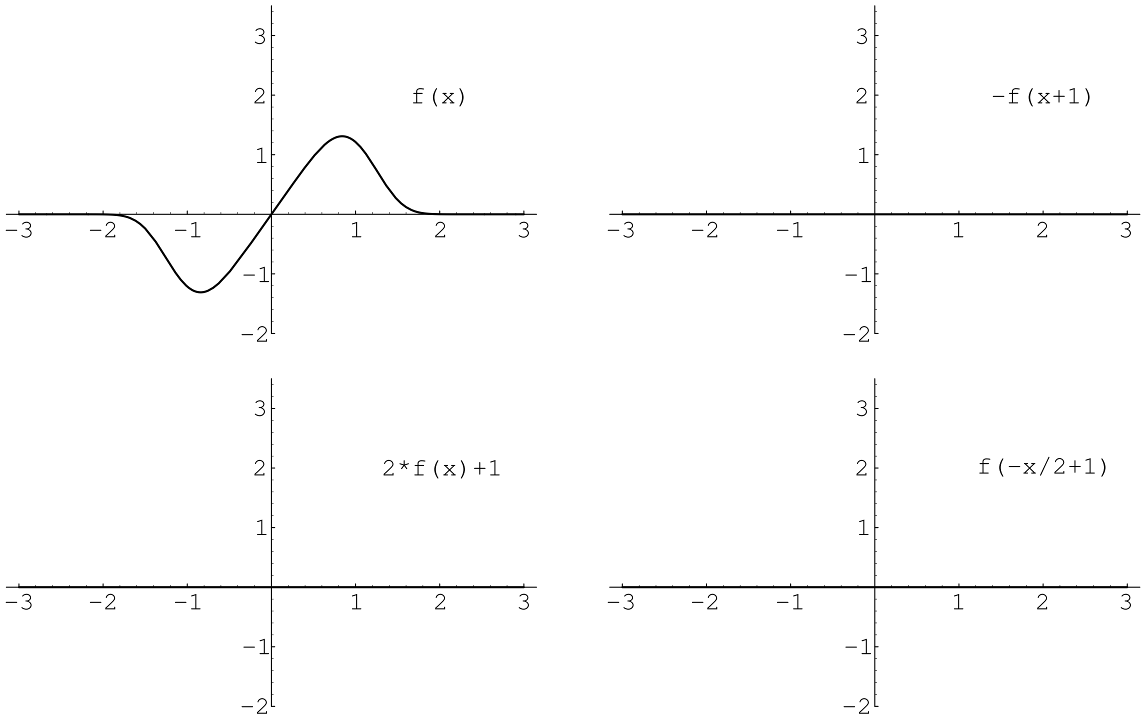
(b) Bouger l'ellipse ci–dessus par 3 unités à gauche et trouver les coordonnées des points d'intersection de l'ellipse avec l'axe des y .

• Problème 2–13:
Une ellipse avec les demi-axes parallèle au axes des x et y à des sommets au points $(3, 3)$ et $(7, 1)$. L'ellipse n'a pas de points communs avec les axes des x et y.

(a) Trouver l'équation de cette ellipse dans une forme implicite.

(b) Cette ellipse est décalée par 4 unités à gauche et puis on cherche les points d'intersection avec l'axe des y.

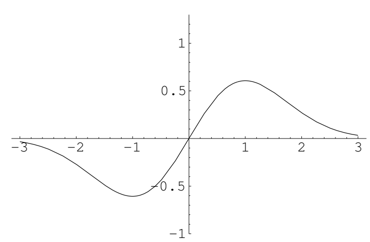
• Problème 2–14:
Vous trouver ci–dessous le graphe d'une fonction $f(x)$. Esquisser les graphes des trois fonctions données.



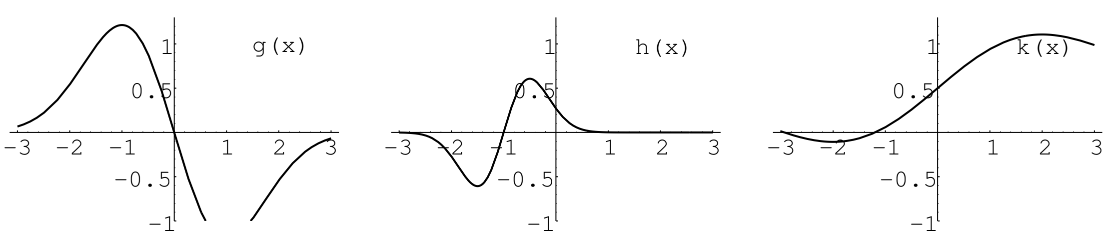
• Problème 2–15:

À droite trouver le graphe de la fonction $f(x)$

$$f(x) = x\ e^{-x^2/2}$$



Les trois graphiques ci–dessous sont des des transformations simples de la graphique en haut. Trouver les formules pour $g(x)$, $h(x)$ et $k(x)$.



• Problème 2–16:
(etwas schwieriger als üblich)
Zeichnen Sie den Lösungsbereich der Ungleichung

$$2\,x\,y \leq |x+y| \leq x^2 + y^2$$

Tip: Unterscheiden Sie zwei Fälle

(a) $x + y \geq 0$

(b) $x + y < 0$

und verwenden Sie Vervollständigung des Quadrates. Quelle: [Blum84, p. 21].

• Problème 2–17:
Dessiner la région des solutions du système des inégalités dans le plan des x et y au–dessus.

$$y > |x^2 + 4\,x - 1| \quad \text{und / et} \quad y - x \leq 6$$

2.9.1 Solutions de quelques problèmes

Solution pour problème 2–1 :

$$\begin{aligned}
a(x) &= (f \cdot g)(x) + h(x) = (x^2 - 1) \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + x^3 \\
b(x) &= (f \circ g)(x) + h(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)^2 - 1 + x^3 \\
c(x) &= (g \circ f)(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2 + 1} \\
d(x) &= \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{x^3}{x^2 - 1} \\
e(x) &= (h \circ (f \cdot f))(x) = \big((x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)\big)^3 = (x^2 - 1)^6
\end{aligned}$$

Solution pour problème 2–2 : $f\,(-2.5) = 3/4$.

Solution pour problème 2–4 :

(a)

$$(g \cdot f)\,(x) = g\,(x) \cdot f\,(x) = (x^3 + x + 1)\,\frac{1}{x - 1}$$

Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b)

$$(g \circ f)\,(x) = g\,(f\,(x)) = \frac{1}{(x^3 + x + 1) - 1} = \frac{1}{x\,(x^2 + 1)}$$

Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) $y = f^{-1}\,(11)$ genau dann wenn $f\,(y) = 11$. Somit ist die Gleichung $y^3 + y + 1 = 11$ zu lösen. Die Lösung ist $y = 2$.

Solution pour problème 2–6 : Die Parabelgleichung ist $x = 1 + \frac{1}{2}\,(y - 2)^2$. Diese Information kann in der Geradengleichung $y = 2\,x - 1$ eingesetzt werden. Das führt auf eine quadratische Gleichung.

$$\begin{aligned}
y &= 2\,x - 1 = 2\,(1 + \frac{1}{2}\,(y - 2)^2) - 1 = y^2 - 4\,y + 5 \\
y^2 - 5\,y + 5 &= 0 \\
y_{1,2} &= \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \begin{cases} \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

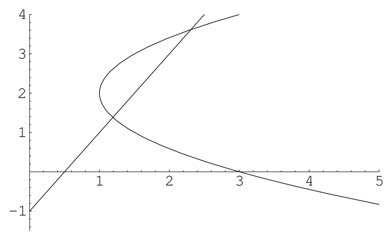
Daraus lassen sich die x–Werte bestimmen mit Hilfe der Geradengleichung $x = \frac{y+1}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{y_{1,2}+1}{2} = \frac{+5 \pm \sqrt{5}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Somit habe wir die zwei Schnittpunkte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7+\sqrt{5}}{4} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.30902 \\ 3.61803 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7-\sqrt{5}}{4} \\ \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.19098 \\ 1.38197 \end{pmatrix}$$

Dieses Resultat wird bestättigt durch die Graphik.

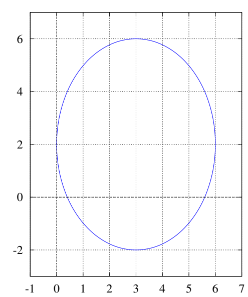


Solution pour problème 2–7 :

(a)

Der Mittelpunkt liegt bei $(3\,,\,2)$. Die Längen der Halbachsen sind 3 in x-Richtung und 4 in y-Richtung. Die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 1$ kann verschoben und gestreckt werden und somit ist die Ellipsengleichung

$$\frac{1}{3^2}\,(x-3)^2 + \frac{1}{4^2}\,(y-2)^2 = 1$$



(b) Entlang der x–Achse ist $y = 0$ und somit erhalten wir eine quadratische Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3^2}\,(x-3)^2 + \frac{1}{4^2}\,(0-2)^2 &= 1 \\
\frac{1}{3^2}\,(x-3)^2 + \frac{1}{4} &= 1 \\
\frac{1}{3^2}\,(x-3)^2 &= \frac{3}{4} \\
(x-3)^2 &= \frac{27}{4} \\
x-3 &= \pm\sqrt{\frac{27}{4}} = \pm\frac{3\,\sqrt{3}}{2} \\
x &= 3 \pm \frac{3\,\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Die numerischen Werte sin $x_1 \approx 0.40192$ und $x_2 = 5.59808$, was durch die obige Graphik bestätigt wird.

Solution pour problème 2–8 :

(a)

$$\left(\frac{2}{5}\,(x+2)\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\,(y-3)\right)^2 = 1$$

(b) Schnitt mit der y–Achse entspricht $x=0$ setzen und somit der Gleichung

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\,(y-3)\right)^2 &= 1\\ (y-3)^2 &= 16\,\left(1-\tfrac{16}{25}\right) = \tfrac{16\cdot 9}{25}\\ y &= 3 \pm \tfrac{4\cdot 3}{5}\end{aligned}$$

Solution pour problème 2–9 :

$$x^2 - 4x + 4y^2 + 4y = (x-2)^2 - 4 + (2y+1)^2 - 1 = 16$$

oder

$$(x-2)^2 + (2y+1)^2 = 21$$

(a) Koordinaten des Zentrums : $(x,y) = (2\,,\,-1/2)$

(b) Halbachse in x–Richtung : $\sqrt{21}$, Halbachse in y–Richtung : $\sqrt{21}/2$

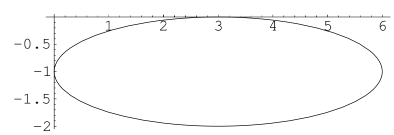
(c) Scheitel bei $(2\pm\sqrt{21}, -1/2)$ und $(2, -1/2\pm\sqrt{21}/2)$

Solution pour problème 2–10 :

(a)

Eine Skizze zeigt, dass der Mittelpunkt bei $(3,-2)$ liegt und die Länge der Halbachsen 3 und 2 sein muss. Somit erhält man

$$\frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1$$



oder auch

$$4\,(x-3)^2 + 9\,(y+2)^2 = 36$$

(b) In der obigen Gleichung muss $x=2$ gesetzt werden und dann nach y auflösen. Man erhält

$$\begin{aligned}4\,(2-3)^2 + 9\,(y+2)^2 &= 36\\ 9\,(y+2)^2 &= 36-4\\ (y+2)^2 &= \frac{32}{9}\\ y &= -2 \pm \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx -2 \pm 1.88562\end{aligned}$$

Eine zweite mögliche Lösung hat den Mittelpunkt bei $(6\,,\,-1)$ und Halbachsen der Längen 6 und 1. Somit ergibt sich die Gleichung

$$(x-6)^2 + 36\,(y+1)^2 = 36$$

und die Schnittpunkte sind bei

$$\begin{aligned}4^2 + 36\,(y+1)^2 &= 36\\ 36\,(y+1)^2 &= 20\\ (y+1)^2 &= \frac{20}{36} = \frac{5}{9}\\ y &= -1 \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \approx -1 \pm 0.745356\end{aligned}$$

Solution pour problème 2–11 : Der untere Scheitel muss bei $(1, -1)$ sein mit Halbachsen der Längen 2 und 3 . Der Mittelpunkt ist bei $(1, 2)$.

(a) Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{1}{2^2}\,(x-1)^2 + \frac{1}{3^2}\,(y-2)^2 = 1$$

(b) Die Schnittpunkte mit der y–Achse sind bestimmt durch die Bedingung $x = 0$ und somit durch die Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\,(y-2)^2 &= 1 \\
\frac{1}{9}\,(y+1)^2 &= \frac{3}{4} \\
(y-2)^2 &= \frac{27}{4} \\
y-2 &= \pm\sqrt{\frac{27}{4}} = \pm\frac{3\,\sqrt{3}}{2} \\
y &= 2 \pm \frac{3\,\sqrt{3}}{2} \approx 2 \pm 2.5981
\end{aligned}$$

(c) Der Einheitskreis hat eine Fläche von π. Die obige Ellipse entsteht durch Verschieben des Kreises und einer Streckung um den Faktor 2 in x–Richtung und um den Faktor 3 in y–Richtung. Deshalb ist die Fläche gegeben durch $3 \cdot 2 \cdot \pi = 6\,\pi$.

Solution pour problème 2–12 :

(a) Quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}
x^2 - 8\,x + 4\,y^2 + 8\,y + 11 &= 0 \\
(x-4)^2 - 16 + 4\,(y+1)^2 - 4 + 11 &= 0 \\
(x-4)^2 + 4\,(y+1)^2 &= 3^2 \\
\left(\frac{x-4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\,(y+1)}{3}\right)^2 &= 1
\end{aligned}$$

Ellipse mit Zentrum bei $(4\,,\,-1)$ und Halbachsen der Länge 3 in x–Richtung und $3/2$ in y–Richtung.

(b) Statt $(x-4)$ neu $(x-1)$ schreiben, dann x=0 setzen.

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + 4\,(y+1)^2 &= 3^2 \\
1 + 4\,(y+1)^2 &= 9 \\
(y+1)^2 &= 8/4 = 2 \\
y &= -1 \pm \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Solution pour problème 2–13 :

(a) Zentrum bei $(7, 3)$ und Halbachsen der Länge 4 und 2.

$$\frac{(x-7)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$$

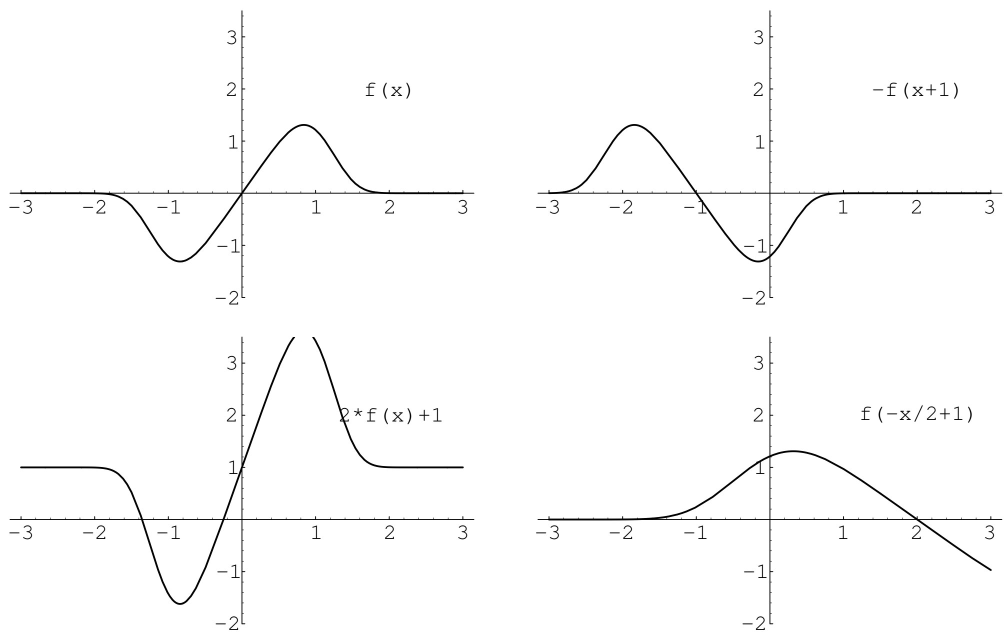
(b) Schieben nach links

$$\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$$

dann $x = 0$ setzen

$$\begin{aligned} \frac{(3)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} &= 1 \\ \frac{(y-3)^2}{2^2} &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ (y-3)^2 &= 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4} \\ y &= 3 \pm \sqrt{\frac{7}{4}} \end{aligned}$$

Solution pour problème 2–14 :



Solution pour problème 2–15 :

$$\begin{aligned} g(x) &= -2\,f(x) &&= -2\,x\,e^{-x^2/2} \\ h(x) &= f(2\,x+2) &&= (2\,x+2)\,e^{-(2\,x+2)^2/2} \\ k(x) &= f(x/2) + \tfrac{1}{2} &&= \tfrac{x}{2}\,e^{-x^2/8} + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Solution pour problème 2–16 :

In der oberen rechten Halbebene $x + y > 0$ (d.h. $y > -x$) ist die Lösungemenge von

$$2\,x\,y \le x + y \le x^2 + y^2$$

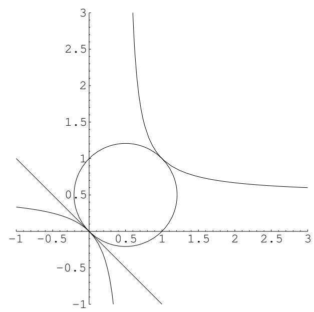
zu untersuchen. Die erste Ungleichung kann umgeformt werden mit Hilfe der Transformationen

$$2\,x\,y = x + y \quad \Leftrightarrow \quad (2\,x-1)\,y = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x}{2\,x-1}$$

Diese Grenzkurve ist eine rationale Funktion mit vertikaler Asymptote $y = 0$ und vertikaler Asymptote $x = 1/2$. Die zweite Ungleichung wird mit Hilfe von quadratischer Ergänzung umgeformt zu

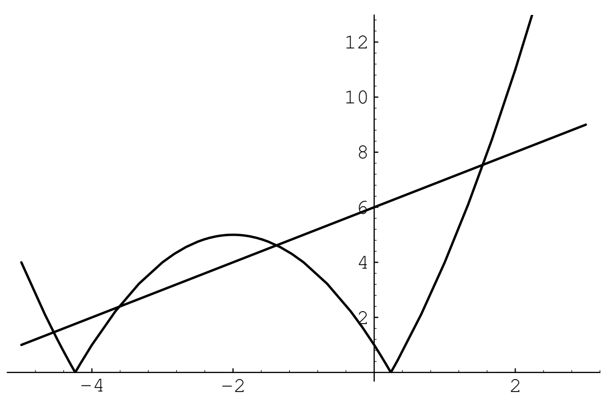
$$\begin{aligned}
x + y &\leq x^2 + y^2 \\
0 &\leq x^2 - 2\,\frac{x}{2} + y^2 - 2\,\frac{y}{2} \\
0 &\leq x^2 - 2\,x\,\frac{1}{2} + y^2 - 2\,y\,\frac{1}{2} \\
\frac{1}{4} + \frac{1}{4} &\leq \left(x^2 - 2\,x\,\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - 2\,y\,\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \\
\frac{1}{2} &\leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Somit besteht die Lösungsmenge dieser Ungleichung aus allen Punkten ausserhalb der Kreises mit Mittelpunkt $(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2})$ und Radius $1/\sqrt{2}$. Die Kurven sind in der untenstehenden Figur illustriert.



Die andere Halbebene $y + x < 0$ ist analog zu untersuchen.

Solution pour problème 2–17 : L'équation $y = x^2 + 4\,x - 1 = (x + 2)^2 - 5$ correspond à une parabole ouvert vers le haut avec sommet au point $(-2, -5)$. Les zéros sont $x = -2 \pm \sqrt{5}$. Pour $y = |x^2 + 4\,x - 1|$ appliquer une réflexion à la section de la courbe au–dessous de l'axe des x . La domaine en question est strictement au–dessus de cette courbe et au–dessous de la droite $y = x + 6$. Les deux secteurs de la droite sont partie de la domaine, mais ne pas les secteurs de la parabole.



2.10 Récapitulation

Après ce chapitre on doit

- connaître les définitions et notations de base.
- être capable de donner les graphes des fonctions de toutes sortes.
- connaître les équations explicites, implicites, paramétriques.
- être capable de travailler avec des transformations simples des coordonnées.

Chapitre 3

Polynômes et fonctions rationnelles

Le but de ce chapitre est de trouver des méthodes pour calculer des valeurs d'un polynôme, trouver des zéros, calculer avec des polynômes et de discuter les graphes des polynômes. On regarde aussi le problème d'interpolation et les fonctions rationnelles.

3–1 Définition : Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dit **polynôme** du degré $n \in \mathbb{N}$ s'il y a des nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que $a_n \neq 0$ et

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Nous ne regardons que des polynômes réels, ça veut dire $a_i \in \mathbb{R}$.

3–2 Définition : Le polynôme f au–dessus est du **degré** n (si $a_n \neq 0$).

3–3 Exemple :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 7x + 5 && \text{degré 5} \\ f(x) &= 2(x-2)(x+2) = 2x^2 - 8 && \text{degré 2} \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

3–4 Résultat : *Soient f un polynôme de degré n et g un polynôme de degré m. Puis l'addition, la soustraction, la multiplication et la composition de ces fonctions vont produire des polynômes et on a*

1. $f + g$ *est un polynôme de degré* $\leq \max\{n, m\}$.
2. $f \cdot g$ *est un polynôme de degré* $n + m$.
3. $f \circ g$ *est un polynôme de degré* $n \cdot m$.

L'ensemble des polynômes est fermé sous ces opérations. Mais la division de deux polynômes ne produit (en général) pas de polynôme.

3–5 Exemple : Soit $f(x) = x^3 - 1$ et $g(x) = x^2 + 1$. Puis on a

(a) $f(x) + g(x) = x^3 + x^2$

(b) $f(x) \cdot g(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$

(c) $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 3x^4 + x^6$

(d) $(g \circ f)(x) = 2 - 2x^3 + x^6$

$\diamondsuit$

3.1 Zéros des polynômes

On examine les zéros des polynômes. Tous les résultats de cette section sont plus facile à formuler si on utilise des nombres complexes. Même avec des polynômes réels du degré 2 on peut obtenir des zéros complexes.

3.1.1 Degré 1

Un polynôme du degré 1 est de la forme

$$f(x) = a_1\,x + a_0$$

puis le graph est une ligne droite avec pente a_1. La solution unique de l'équation $a_1\,x + a_0 = 0$ est $x = -a_0/a_1$.

3.1.2 Degré 2

Un polynôme du degré 2 est de la forme

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

avec $a_2 \neq 0$. Puis on peut reécrire cette fonction comme

$$f(x) = a_2(x^2 + bx + c) \qquad \text{avec} \qquad b = \frac{a_1}{a_2} \qquad c = \frac{a_0}{a_2}$$

Les solutions de l'équation $x^2 + bx + c = 0$ sont

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\,(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})$$

- Si $b^2 - 4c > 0$ on a deux solutions réels differents,
- si $b^2 - 4c = 0$ on a une solution réel, qui est double.
- Si $b^2 - 4c < 0$ on n'a pas de solutions réels, mais deux solutions complexes.

En tous cas on a

$$\begin{aligned}
a_2(x - x_1)\,(x - x_2) &= a_2(x - \frac{1}{2}\,(-b + \sqrt{b^2 - 4c}))\,(x - \frac{1}{2}\,(-b - \sqrt{b^2 - 4c})) \\
&= a_2(x^2 + bx + \frac{1}{4}(-b + \sqrt{b^2 - 4c})\,(-b - \sqrt{b^2 - 4c})) \\
&= a_2(x^2 + bx + c) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

on parle aussi de la **factorisation**

$$f(x) = a_2(x - x_1)\,(x - x_2)$$

du polynôme. On peut facilement verifier les **formules de Viète**

$$\begin{aligned}
x_1 x_2 &= c \\
x_1 + x_2 &= -b
\end{aligned}$$

3.1.3 Degré 3

Un polynôme du degré 3 est de la forme

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

avec $a_3 \neq 0$. Puis on peut reécrire cette fonction comme

$$f(x) = a_3(x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$$

Les formules de Cardano[1] vont calculer les trois solutions x_1, x_2, x_3 de l'équation $f(x) = 0$. Utiliser un formulaire pour ces formules. Mais attention, ces formules ne sont pas faciles à utiliser. Il y a aussi les formules suivantes de Viète

$$x_1 x_2 x_3 = -b_0$$
$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = b_1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = -b_2$$

De plus on a la factorisation

$$f(x) = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \qquad .$$

3.1.4 Degré ≥ 4

Pour des polynômes du degré 4 ils existent des formules (de Ferrari[2]) pour calculer les quatres zéros du polynôme, mais c'est une méthode compliquée. Aujourd'hui on doit utiliser des ordinateurs ou une méthode de réduction du degré. Pour des polynômes du degré ≥ 5 il n'y a pas de formules pour les zéros.

3.2 Graphes de polynômes

3.2.1 fonction linéaire

Le graphe d'un polynôme du degré 1

$$f(x) = a\,x + b$$

est une ligne droite avec **ordonnée** b et **pente** a.

3.2.2 fonction quadratique

Un polynôme du degré 2

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

peut être réécrit dans la forme (complétion du carré)

$$\begin{aligned} f(x) &= a\,(x^2 + 2\frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a} + c \\ f(x) &= a\,(x - x_s)^2 + y_s \end{aligned}$$

avec

$$x_s = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad y_s = c - \frac{b^2}{4a}$$

Donc le graphe de $y = f(x)$ est une parabole. Si $a > 0$ la parabole s'ouvre vers le haut; si $a < 0$ la parabole s'ouvre vers le bas. Les coordonnées du **sommet** sont (x_s, y_s).

[1]Geronimo Cardano (1501–1576), mathématicien italien. En effet Nicolo Fontano Tartaglia (1500–1557) a trouvé les formules de Cardano pour calculer les racines d'une équation cubique. Cardano les a publiées.

[2]Ludovico Ferrari (1522–1565)

3–6 Exemple : La fonction

$$f(x) = 1 + 3\,x - 2\,x^2$$

peut être réécrit comme

$$f(x) = -2\,\left(x^2 - 2\,\frac{3}{4}\,x - \frac{1}{2}\right) = -2\,\left(x^2 - 2\,\frac{3}{4}\,x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - \frac{1}{2}\right) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$$

Donc le sommet de la parabole est au point $(\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$ et elle s'ouvre vers le bas. La Figure 3.1 peut être générée par *Octave* ou MATLAB par les commandes

Octave
```
x=linspace(-1.5,3);
y=1+3*x-2*x.^2;
plot(x,y)
```

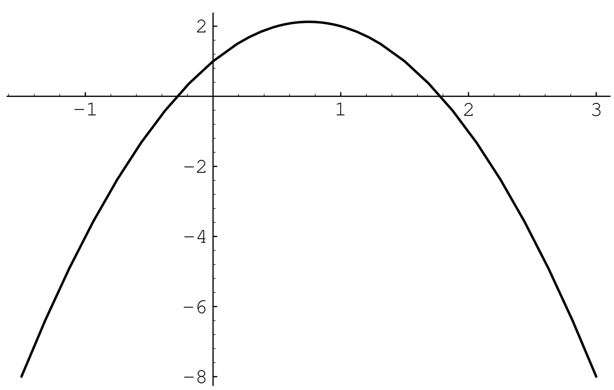


Figure 3.1: Graphe de $f(x) = 1 + 3\,x - 2\,x^2$

♢

3.2.3 polynômes du degré ≥ 3

D'abord regarder les polynômes les plus simples possible.

3–7 Exemple : Dessiner et comparer les graphes de

$$y(x) = x^2 \quad , \quad y(x) = x^4 \quad , \quad y(x) = x^6 \quad , \quad y(x) = x^8 \ldots$$

♢

3–8 Exemple : Dessiner et comparer les graphes de

$$y(x) = x^1 \quad , \quad y(x) = x^3 \quad , \quad y(x) = x^5 \quad , \quad y(x) = x^7 \ldots$$

♢

Pour un polynôme de degré n

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

on peut, sans calculs, dessiner le graphe pour $|x| \ll 1$ et aussi pour $|x| \gg 1$.

Pour $|x| \ll 1$

on peut utiliser que $|x^2| = |x \cdot x| \ll |x|$ et on obtient l'approximation

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \approx a_1 x + a_0$$

Puis le graphe de $y = f(x)$ peut être approximé par une droite $y = a_1 x + a_0$ pour $|x| \ll 1$. On utilise une **approximation linéaire**.

Si on garde un terme de plus on a

$$f(x) \approx a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{pour} \quad |x| \ll 1$$

et on parle d'une **approximation quadratique**.

Les deux approximations ne sont valables que si x est „assez" proche de 0. Le schéma de Horner va fournir une méthode pour trouver des approximations similaires pour d'autres valeurs de x.

Pour $|x| \gg 1$

on peut utiliser que $|x^n| \gg |x^{n-1}|$, et on obtient l'approximation

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \approx a_n x^n$$

ou plutôt

$$\frac{f(x)}{x^n} \approx a_n \quad \text{pour} \quad |x| \gg 1$$

Puis la forme qualitative du graphe de $y = f(x)$ est donnée par $y = a_n x^n$ pour $|x| \gg 1$.

3.3 Le schéma de Horner

Si vous utilisez votre calculatrice pour trouver la valeur de

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$

pour $x = 2.345$, il semble que vous êtes obligés de calculer l'expression $a_i x^i$. Pour ça il faut i multiplications. Donc on a besoin de

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

multiplications et n additions. Par exemple si $n = 10$ ça fait 55 multiplications et 10 additions. Mais vous pouvez aussi réécrire les termes de la sorte que (par exemple)

$$\begin{aligned} f(x) &= a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= (((a_4 x + a_3) x + a_2) x + a_1) x + a_0 \end{aligned}$$

Si $n = 4$ il ne faut que 4 multiplications et 4 additions au lieu de 10 multiplications et 4 additions. Si $n = 10$ il ne faut que 10 multiplications et 10 additions au lieu de 55 multiplications et 10 additions.

Si on utilise la méthode au–dessus, on calcule les nombres suivants

$$\begin{aligned} b_3 &= a_4 \\ b_2 &= b_3 x + a_3 \\ b_1 &= b_2 x + a_2 \\ b_0 &= b_1 x + a_1 \\ f(x) &= b_0 x + a_0 \end{aligned}$$

et on calcule l'expression ci–dessus

$$\begin{aligned} f(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= (((a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0 \\ &= (((b_3x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0 \\ &= ((b_2x + a_2)x + a_1)x + a_0 \\ &= (b_1x + a_1)x + a_0 \\ &= b_0x + a_0 \end{aligned}$$

A cause de la formule générale

$$b_{i-1} = b_ix + a_i$$

on peut aussi utiliser le schéma suivant

$$\begin{array}{r|ccccc} & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ x_0 = \ldots & 0 & b_3x_0 & b_2x_0 & b_1x_0 & b_0x_0 \\ \hline & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & f(x_0) \end{array}$$

On commence par la ligne avec des a_i et $x_0 = \ldots$, puis on doit copier a_4 a la place de b_3. Maintenant on se travaille a droite et en haut, en calculant b_3x, puis en bas par addition de a_3 et b_3x. Ce schéma se répète jusqu'à la fin de la ligne. En bas, à droite on trouve la valeur de $f(x)$ pour le x qu'on a choisi.

3–9 Exemple : Vous devez calculer la valeur du polynôme

$$f(x_0) = 3x_0^4 - 2x_0^3 + 5x_0^2 - 7x_0 - 12$$

si $x_0 = -2$ vous obtenez le **schéma de Horner** suivant

$$\begin{array}{r|ccccc} & 3 & -2 & 5 & -7 & -12 \\ x_0 = -2 & & -6 & 16 & -42 & 98 \\ \hline & 3 & -8 & 21 & -49 & 86 \end{array}$$

i.e. $f(-2) = 86$. ♢

3.4 Division des polynômes par un facteur linéaire

Soient x_0 et x deux nombres et pour $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ nous calculons le schéma de Horner avec x_0, puis

$$\begin{gathered} (x - x_0)(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + f(x_0) \\ = b_3x^4 + (b_2 - b_3x_0)x^3 + (b_1 - b_2x_0)x^2 + (b_0 - b_1x_0)x + f(x_0) - b_0x_0 \\ = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = f(x) \end{gathered}$$

puis on a

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)$$

On peut faire exactement les mêmes calculs avec un polynôme du degré n, et on obtient:

3–10 Théorème : *Si $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ le schéma de Horner (avec $x = x_0$) produit des nombres $b_0, b_1, \ldots, b_n$ tels que*

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

3–11 Exemple : Si $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12$ et $x_0 = -2$ vous obtenez

$$f(x) - 86 = (x - (-2))\,(3x^3 - 8x^2 + 21x - 49)$$

ou

$$\frac{f(x)}{x+2} = 3x^3 - 8x^2 + 21x - 49 + \frac{86}{x+2}$$

$\diamondsuit$

Le schéma de Horner est très utile pour **diviser** un polynôme par un facteur linéaire de la forme $x - x_0$. En général la division d'un polynôme par un autre polynôme est un peu plus difficile et on ne peut pas utiliser le schéma der Horner. On va regarder ce problème au–dessous.

On a aussi obtenu la formule

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12 = 86 + (x+2)\,(3x^3 - 8x^2 + 21x - 49)$$

Si on utilise le même calcul pour $3x^3 - 8x^2 + 21x - 49$ on obtient

$$3x^3 - 8x^2 + 21x - 49 = -147 + (x+2)\,(3x^2 - 14x + 49)$$

et donc

$$f(x) = 86 - 147\,(x+2) + (x+2)^2(3x^2 - 14x + 49)$$

En répétant ce calcul on obtient

$$f(x) = 86 - 147\,(x+2) + 89\,(x+2)^2 - 26\,(x+2)^3 + 3\,(x+2)^4$$

Cette forme de la fonction est utile pour dessiner le graphe de f pour des valeurs de x assez proche de -2 (Pourquoi?).

Il est possible de faire tous ces calculs dans un seul schéma de Horner et on obtient le **grand schéma de Horner**

	3	-2	5	-7	-12
$x_0 = -2$		-6	16	-42	98
	3	-8	21	-49	86
$x_0 = -2$		-6	28	-98	
	3	-14	49	-147	
$x_0 = -2$		-6	40		
	3	-20	89		
$x_0 = -2$		-6			
	3	-26			
$x_0 = -2$					
	3				

3–12 Exemple : Trouver le grand schéma de Horner pour la fonction

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12$$

et $x_0 = -1$.

Verifiez vos calculs par

$$f(x) = 5 - 35\,(x+1) + 29\,(x+1)^2 - 14\,(x+1)^3 + 3\,(x+1)^4$$

Dans cette forme il est facile de dessiner le graphe de la fonction $y = f(x)$ pour $x \approx -1$. ♢

3–13 Exemple : Dessiner le graphe du polynôme $f(x) = 2x^3 - x + 4$ pour $-2 \leq x \leq 2$. Utiliser le schéma de Horner pour trouver les valeurs et les pentes de la courbe pour $x = -2, -1, 0, 1, 2$ et puis dessiner.

Solution: Le schéma de Horner pour $x_0 = -2$ est donner par

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -1 & 4 \\ x_0 = -2 & & -4 & 8 & -14 \\ \hline & 2 & -4 & 7 & \underline{-10} \\ x_0 = -2 & & -4 & 16 & \\ \hline & 2 & -8 & \underline{23} & \end{array}$$

Donc on a

$$f(x) = -10 + 23\,(x+2) + \ldots$$

et le graphe passe par le point $(-2, -10)$ avec une pente de 23. On n'est pas obligé de calculer tous les nombres dans le grand schéma de Horner. Les deux premières séctions sont suffisantes. Mais on doit recalculer le schéma pour $x_0 = -1, 0, 1$ et 2 pour arriver au table

x	-2	-1	0	1	2
Valeur	-10	3	4	5	18
Pente	23	5	-1	5	23

Donc on peut dessiner le graph. Il est important de bien choisir les échelles sur les axes tel qu'on puisse voir les propriétés importantes du graphe.

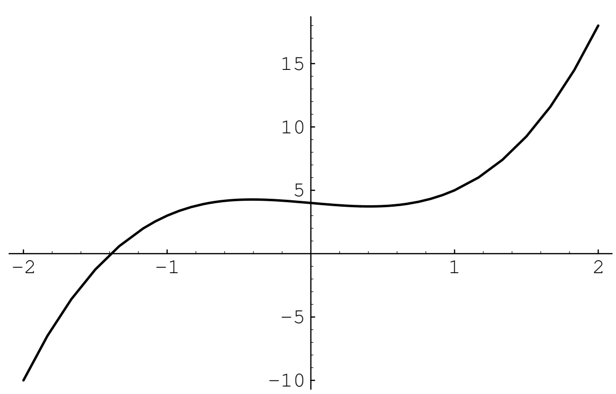


Figure 3.2: Graphe de $f(x) = 2x^3 - x + 4$

♢

3.5 Division des polynômes

Le schéma de Horner ne peut être utilisé que pour des division par un facteur linéaire (polynôme de degré 1). Pour diviser un polynôme par un autre polynôme de degré ≥ 2 on peut utiliser le même schéma comme pour la division des nombres entiers (faite à la main).

3–14 Exemple : Pour diviser $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3$ par $x^2 + 2x + 3$ on regarde

$$
\begin{array}{rrrrrrcrrrcrrrr}
(x^5 & +3x^4 & +5x^3 & +4x^2 & +0x & +3) & / & (x^2 & +2x & +3) & = & x^3 & +x^2 & +0x & +1 \\
x^5 & +2x^4 & +3x^3 & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & x^4 & +2x^3 & +4x^2 & & & & & & & & & & & \\
 & x^4 & +2x^3 & +3x^2 & & & & & & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & & 1x^2 & +0x & & & & & & & & & & \\
 & & & 0x^2 & +0x & & & & & & & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & x^2 & +0x & +3 & & & & & & & & & \\
 & & & x^2 & +2x & +3 & & & & & & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & -2x & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

i.e.

$$\frac{x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3}{x^2 + 2x + 3} = x^3 + x^2 + 1 + \frac{-2x}{x^2 + 2x + 3}$$

Comparer ces calculs avec la division de $135403 = 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3$ par $123 = 10^2 + 2 \cdot 10 + 3$. Ce n'est **pas** une copie exacte de la division de deux nombres.

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
(1 \cdot 10^5 & +3 \cdot 10^4 & +5 \cdot 10^3 & +4 \cdot 10^2 & +0 \cdot 10 & +3) & / & (1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) = \\
 & & & & & & & = 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 1 \\
1 \cdot 10^5 & +2 \cdot 10^4 & +3 \cdot 10^3 & & & & & \\
\cline{1-3}
 & 1 \cdot 10^4 & +2 \cdot 10^3 & +4 \cdot 10^2 & & & & \\
 & 1 \cdot 10^4 & +2 \cdot 10^3 & +3 \cdot 10^2 & & & & \\
\cline{2-4}
 & & & 1 \cdot 10^2 & +0 \cdot 10 & & & \\
 & & & 0 \cdot 10^2 & +0 \cdot 10 & & & \\
\cline{4-5}
 & & & \cdot 10^2 & +0 \cdot 10 & +3 & & \\
 & & & \cdot 10^2 & +2 \cdot 10 & +3 & & \\
\cline{4-6}
 & & & & -2 \cdot 10 & & &
\end{array}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
\frac{1 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3}{1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3} &= 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 1 + \frac{-2 \cdot 10}{1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3} \\
\frac{135403}{123} &= 1101 + \frac{-20}{123}
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

En utilisant les calculs au–dessus on obtient le résultat suivant.

3–15 Théorème : *Soient f un polynôme du degré n et g un polynôme du degré m avec $m \leq n$. Puis on a*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

h est un polynôme du degré $n - m$ et r est un polynôme du degré $< m$. Ça veut dire: en divisant f par g vous obtenez le polynôme h et le reste r.

Pour éviter des divisions par zéro on réécrit la formule au–dessus comme

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}$$

Dans l'exemple ci–dessus on a

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3 \\ g(x) &= x^2 + 2x + 3 \\ h(x) &= x^3 + x^2 + 1 \\ r(x) &= -2x \end{aligned}$$

3–16 Résultat : *Si $m = 1$, on a $g(x) = x - x_0$, et on obtient $f(x) = (x - x_0)\, h(x) + r(x)$. Le reste $r(x)$ est un polynôme du degré 0, donc une constante, et $r(x) = f(x_0)$. Dans ce cas on peut utiliser le schéma de Horner pour trouver les coefficients de $h(x)$ et $f(x_0)$.*

La division des polynômes est très utile pour simplifier le problème de trouver les zéros d'un polynôme.

3–17 Exemple : Par hazard, vous trouvez que pour le polynôme $g(x) = x^3 - 21x + 20$ on a $g(1) = 0$. Puis vous divisez $g(x)$ par $(x - 1)$ en utilisant le schéma de Horner

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -21 & 20 \\ x_0 = 1 & & 1 & 1 & -20 \\ \hline & 1 & 1 & -20 & 0 \end{array}$$

et vous obtenez

$$g(x) = x^3 - 21x + 20 = (x - 1)\,(x^2 + x - 20) \qquad .$$

Maintenant il est facile à voir que $x_2 = 4$ et $x_3 = -5$ sont aussi des zéros du polynôme. De plus on trouve

$$g(x) = x^3 - 21x + 20 = (x - 1)\,(x - 4)\,(x + 5) \qquad .$$

Si on a un polynôme de degré 3 et un zéro ($x_1 = 1$), on doit seulement trouver les solutions d'une équation de l'ordre 2 pour arriver à tous les zéros. ♢

On peut facilement généraliser cette idée: si on a un polynôme $g(x)$ de degré n et un zéro x_1, on doit diviser $g(x)$ par $(x - x_1)$, et puis on doit seulement chercher les zéros d'un polynôme de degré $n - 1$.

En algèbre supérieure on démontre le théorème suivant.

3–18 Théorème : *Théorème fondamental de l'algèbre*
Tout polynôme $f(x)$ a au moins un zéro, réel ou complexe.

3–19 Définition : $x_0 \in \mathbb{R}$ est appelé un **zéro de l'ordre** n du polynôme $f(x)$, si f peut être écrit comme $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$ pour un polynôme $g(x)$ avec $g(x_0) \neq 0$. On dit aussi que le zéro x_0 a la **multiplicité** n.

En se servant du théorème fondamental de l'algèbre, on démontre la proposition suivante.

3–20 Théorème : *Tout polynôme de degré n a exactement n zéros $x_1, x_2, \ldots, x_n$, réels ou complexes et on peut écrire le polynôme comme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n (x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_n) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$

Ce théorème est seulement juste, si on utilise la multiplicité d'un zéro et des zéros complexes.

3–21 Exemple : On verifie l'égalité

$$\begin{aligned} x^5 - 3x^4 - 10x^3 + 52x^2 - 72x + 32 &= (x-1)\,(x-2)\,(x-2)\,(x-2)\,(x+4) \\ &= (x-1)\,(x-2)^3 (x+4) \end{aligned}$$

et donc $x_1 = 1$ et $x_2 = -4$ sont des zéros simples et $x_3 = 2$ est un zéro avec multiplicité 3. On verifie facilement $1 + 1 + 3 = 5$. $\diamondsuit$

Si on n'utilise pas les nombres complexes, on doit adapter la formulation du théorème.

3–22 Théorème : *Tout polynôme réel de degré n a r zéros $x_1, x_2, \ldots, x_r$, réels, avec $0 \leq r \leq n$ et $n - r = 2m$ pour un $m \in \mathbb{N}$. On peut écrire le polynôme comme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = g(x)\,(x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_r)$$

avec un polynôme $g(x)$ de degré $n - r$ et $g(x) \neq 0$ pour tous les $x \in \mathbb{R}$.

3–23 Exemple :

$$x^5 + 3\,x^4 + 6\,x^3 + 10\,x^2 + 9x + 3 = (x+1)^3\,(x^2 + 3)$$

$\diamondsuit$

La décomposition au–dessus d'un polynôme est utile pour les résultats suivants.

3–24 Théorème :
Si les valeurs de deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ de degré n, coïncident pour $n+1$ valeurs differents $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la variable indepéndente x, alors ces deux polynômes sont identiques.

Démonstration : Désignons par $h(x)$ la difference de ces deux polynômes

$$h(x) = f(x) - g(x) \quad .$$

h est un polynôme de degré $\leq n$ avec $h(x_i) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Nous pouvons donc le mettre sous la forme

$$h(x) = A\,(x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

D'après l'hypothèse on a aussi $h(x_0) = 0$, mais aucun des facteurs linéaires ne s'annule. Puis $A = 0$ et on a $h(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) = g(x)$. $\square$

Comme conséquence on obtient le résultat suivant.

3–25 Théorème : *Identité des polynômes*
Soit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ , \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

On a

$$f(x) = g(x) \quad \text{pour tous} \quad x \in \mathbb{R}$$

si et seulement si

$$a_k = b_k \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Cette condition est équivalent à

$$f(x_i) = g(x_i) \qquad \text{pour } n+1 \text{ points différentes} \qquad x_i \in \mathbb{R}$$

Donc il existe un seul polynôme de degré n qui passe par $n+1$ points donnés.

Démonstration : On divise la preuve en deux pas indépendents.

- Il est évident que si $a_k = b_k$ on a $f(x) = g(x)$.
- Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a certainement

  $$h(x) = f(x) - g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)\, x^k = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = 0$$

  pour $n+1$ valeurs different $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable indépendante. Puis nous pouvons écrire

  $$h(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = c_n (x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

  On utilise que $h(x_0) = 0$ et $x_0 - x_k \neq 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$, et on voit que $c_n = 0$. On démontre de même que $c_{n-1} = 0$ et $c_{n-2} = 0$, etc. Puis on arrive à $c_k = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. C'est le résultat qu'on cherche.

□

3–26 Résultat : *Théorème d'addition des coefficients binomiales. Source [Walt85, p41].*
Pour des nombres naturelles $n \leq p + q$ on a

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} q \\ n-j \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} p+q \\ n \end{array} \right)$$

Démonstration : Pour les nombres p et q on a

$$(1+x)^p \,(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$$

La formule du binôme dit

$$(1+x)^p \quad = \quad \sum_{k=0}^{p} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) x^k$$

$$\begin{aligned}(1+x)^q &= \sum_{k=0}^{q} \begin{pmatrix} q \\ k \end{pmatrix} x^k \\ (1+x)^{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} \begin{pmatrix} p+q \\ k \end{pmatrix} x^k\end{aligned}$$

Dans l'expression $(1+x)^{p+q}$ le coefficient de x^n est $\begin{pmatrix} p+q \\ n \end{pmatrix}$. En $(1+x)^p\ (1+x)^q$ on a multiples contributions a cause de $x^n = x^n \cdot x^0 = x^{n-1} \cdot x^1 = x^{n-2} \cdot x^2 = \ldots = x^1 \cdot x^{n-1} = x^0 \cdot x^n$. La somme de ces termes est

$$\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} p \\ j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ n-j \end{pmatrix}$$

Les polynômes $(1+x)^p\ (1+x)^q$ et $(1+x)^{p+q}$ sont identiques, donc les coefficients de x^n sont egaux, veut dire

$$\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} p \\ j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ n-j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ n \end{pmatrix}$$

□

3.6 Interpolation par polynômes

Le procédé de l'interpolation d'un nombre $n+1$ de points donnés (x_i, y_i) par un polynôme du degré n est d'abord illustré par un exemple. Ils existent des méthodes différentes pour trouver ce polynôme. Nous regarderons les méthodes de Lagrange[3] et Newton[4].

3.6.1 Problème

Trouver un polynôme $f(x)$ aussi simple que possible avec les propriflés

$$f(-1) = 3\,, \quad f(1) = -2\,, \quad f(4) = 5\,, \quad f(5) = 4\,,$$

c'est–à–dire le graphe du polynôme passe par les points $P_1 = (-1, 3)$, $P_2 = (1, -2)$, $P_3 = (4, 5)$ und $P_4 = (5, 4)$.

La condition „aussi simple que possible" signifie ici „d'un degré aussi petit que possible", dans notre exemple du degré 3. Le théorème suivant montre qu'il existe une solution unique pour ce problème, et puis nous présentons deux méthodes concrètes pour déterminer le polynôme en question.

3–27 Théorème : *Donnés $n+1$ points différents (x_i, y_i) avec $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ et $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, alors il existe exactement un polynôme $p(x)$ du degré n avec $p(x_i) = y_i$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.*

Démonstration : L'unicité est une conséquence simple du théorème sur l'identité des polynômes ci–dessus. Les constructions ci–dessous montrent qu'il existe un polynôme avec les propriétés désirées. □

Il faut souligner qu'il y a encore d'autres buts pour l'interpolation de points de données; on mentionne ici les **splines**, les polynômes de **Tschebyschew** et la **régression**. Là, on ne cherche pas des polynômes qui passent par tous les points donnés, mais ont des propriétés différentes. L'exemple pratique à la page 55 montre les limites de la méthode d'interpolation présentée ici.

[3]Joseph Louis Lagrange (1736–1813), mathématicien français

[4]Sir Isaac Newton (1642–1727), physicien, mathématicien et astronome anglais

3.6.2 Méthode de Lagrange

Nous considérons comme exemple les quatre points donnés ci–dessus et cherchons comme premier pas quatre polynômes $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ et $p_4(x)$ avec les propriétés suivantes:

$$\begin{array}{llll} p_1(-1)=1 & p_1(1)=0 & p_1(4)=0 & p_1(5)=0 \\ p_2(-1)=0 & p_2(1)=1 & p_2(4)=0 & p_2(5)=0 \\ p_3(-1)=0 & p_3(1)=0 & p_3(4)=1 & p_3(5)=0 \\ p_4(-1)=0 & p_4(1)=0 & p_4(4)=0 & p_4(5)=1 \end{array}$$

Ayant résolu ce probème avec succes, on peut facilement déterminer la solution du problème original par une combinaison linéaire de ces polynômes:

$$f\,(x) = 3\,p_1\,(x) - 2\,p_2\,(x) + 5\,p_3\,(x) + 4\,p_4\,(x)$$

Calculs

Pour que pour p_1 les équations

$$p_1\,(1) = 0 \qquad p_1\,(4) = 0 \qquad p_1\,(5) = 0$$

soient satisfaites, $p_1\,(x)$ doit être de la forme

$$p_1\,(x) = A_1\,(x-1)\,(x-4)\,(x-5)$$

avec A_1 tel que $p_1\,(-1) = 1$. Puis on a

$$p_1\,(x) = \frac{1}{(-1-1)\,(-1-4)\,(-1-5)}\,(x-1)\,(x-4)\,(x-5) = \frac{-1}{60}\,(x^3 - 10x^2 + 29x - 20)$$

Par des réflexions analogues on obtient à cause de

$$p_2\,(-1) = 0 \qquad p_2\,(1) = 1 \qquad p_2\,(4) = 0 \qquad p_2\,(5) = 0$$

le polynôme p_2 comme

$$p_2\,(x) = \frac{1}{(1+1)\,(1-4)\,(1-5)}\,(x+1)\,(x-4)\,(x-5) = \frac{1}{24}\,(x^3 - 8x^2 + 11x + 20)$$

$$p_3\,(x) = \frac{1}{(4+1)\,(4-1)\,(4-5)}\,(x+1)\,(x-1)\,(x-5) = \frac{-1}{15}\,(x^3 - 5x^2 - x + 5)$$

und

$$p_4\,(x) = \frac{1}{(5+1)\,(5-1)\,(5-4)}\,(x+1)\,(x-1)\,(x-4) = \frac{1}{24}\,(x^3 - 4x^2 - x + 4)$$

L'illustration 3.3 montre les graphes de ces quatre polynômes. Tenir compte spécialement de la position des zéros.

Alors on obtient le polynôme demandé $f(x)$; il est montré dans l'illustration 3.4

$$\begin{aligned} f\,(x) = {} & 3p_1\,(x) - 2p_2\,(x) + 5p_3\,(x) + 4p_4\,(x) \\ = {} & \tfrac{-3}{60}\,(x^3 - 10x^2 + 29x - 20) + \tfrac{-2}{24}\,(x^3 - 8x^2 + 11x + 20) \\ & + \tfrac{-5}{15}\,(x^3 - 5x^2 - x + 5) + \tfrac{4}{24}\,(x^3 - 4x^2 - x + 4) \\ = {} & \tfrac{1}{30}\,(-9x^3 + 65x^2 - 66x - 50) \end{aligned}$$

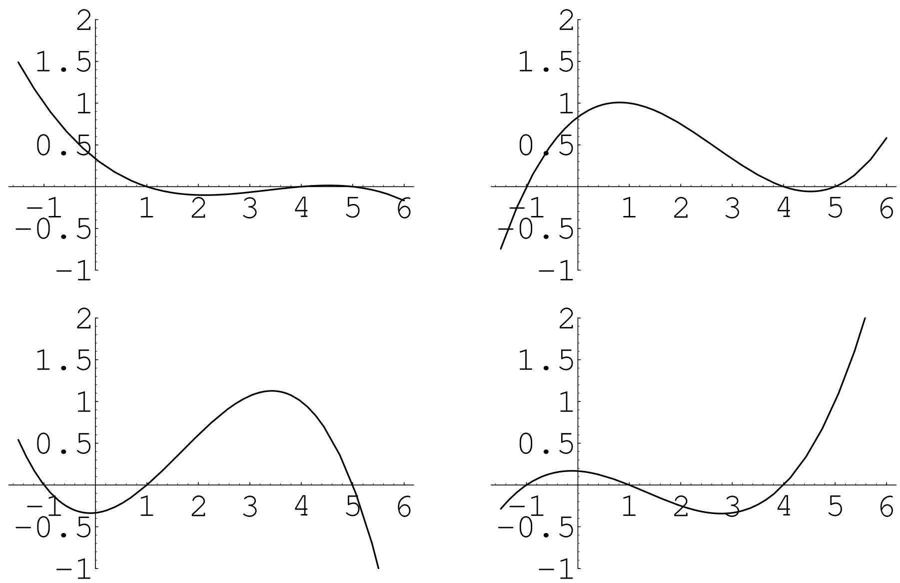


Figure 3.3: Polynômes de base pour l'interpolation de Lagrange

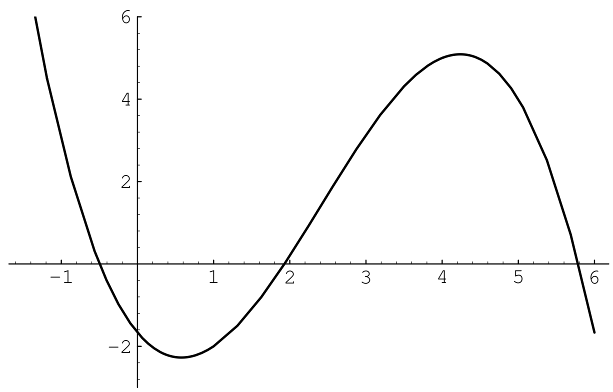


Figure 3.4: Polynôme d'interpolation

3.6.3 Méthode de Newton

Il existe une deuxième méthode pour résoudre le problème d'interpolation. On cherche toujours un polynôme du degré n avec les $n+1$ valeurs données

$$f(x_0) = y_0 \quad , \quad f(x_1) = y_1 \quad , \quad f(x_2) = y_2 \quad \ldots \quad f(x_n) = y_n$$

La mise en équation de Newton dit qu'un polynôme de la forme

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)\,(x - x_1) + \alpha_3(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2) + \ldots \\ &\quad + \alpha_n(x - x_0)\,(x - x_1)\ldots(x - x_n) \end{aligned}$$

satisfait les conditions. En utilisant les conditions $p(x_i) = y_i$, on obtient le système d'équations suivant pour les inconnues $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$

$$\begin{aligned}
y_0 &= \alpha_0 \\
y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) \\
y_2 &= \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1) \\
&\vdots \\
y_n &= \alpha_0 + \alpha_1(x_n - x_0) + \alpha_2(x_n - x_0)\,(x_n - x_1) + \ldots + \alpha_n(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Ce système d'équations peut être résolu facilement d'en haut en bas.

La méthode de Newton permet de facilement intégrer un point (x_{n+1}, y_{n+1}) supplémentaire, ce qui n'est pas le cas pour la méthode de Lagrange.

Nous considérons encore une fois l'exemple précédent:

$$p(-1) = 3 \qquad p(1) = -2 \qquad p(4) = 5 \qquad p(5) = 4$$

ou

$$\begin{array}{cccc}
x_0 = -1 & x_1 = 1 & x_2 = 4 & x_3 = 5, \\
y_0 = 3 & y_1 = -2 & y_2 = 5 & y_3 = 4
\end{array}$$

On obtient le système d'équations

$$\begin{aligned}
3 &= \alpha_0 \\
-2 &= \alpha_0 + \alpha_1 2 \\
5 &= \alpha_0 + \alpha_1 5 + \alpha_2 5 \cdot 3 \\
4 &= \alpha_0 + \alpha_1 6 + \alpha_2 6 \cdot 4 + \alpha_3 6 \cdot 4 \cdot 1
\end{aligned}$$

Ce système d'équations a une solution unique

$$\alpha_0 = 3, \quad \alpha_1 = -\frac{5}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{29}{30}, \quad \alpha_3 = -\frac{3}{10}$$

Cela nous fournit la solution

$$\begin{aligned}
p(x) = &\; 3 - \tfrac{5}{2}\,(x+1) + \tfrac{29}{30}\,(x+1)\,(x-1) - \tfrac{3}{10}\,(x+1)\,(x-1)\,(x-4) \\
= &\; \tfrac{1}{30}\,(-9x^3 + 65x^2 - 66x - 50)
\end{aligned}$$

Comme il faut, on obtient la même solution comme par la méthode de Lagrange.

Si on a beaucoup de noeuds d'interpolations, il faut executer des calculs assez longs. Une présentation systématique de ce procédé se trouve déjà dans le **schéma des différences divisées** de Newton.

Ce schéma est rempli une colonne après l'autre de gauche à droite. A côté des valeurs x_i et y_i se trouvent les premières différences divisées

$$y_{0,1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad y_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad \ldots \qquad y_{n-1,n} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

Dans la colonne suivante, on a les deuxièmes différences divisées

$$y_{0,1,2} = \frac{y_{1,2} - y_{0,1}}{x_2 - x_0}, \qquad y_{1,2,3} = \frac{y_{2,3} - y_{1,2}}{x_3 - x_1}, \qquad \ldots \qquad y_{n-2,n-1,n} = \frac{y_{n-1,n} - y_{n-2,n-1}}{x_n - x_{n-2}},$$

puis les troisièmes différences divisées.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & y_{0,1} & & & \\
x_1 & y_1 & & y_{0,1,2} & & \\
 & & y_{1,2} & & y_{0,1,2,3} & \\
x_2 & y_2 & & y_{1,2,3} & & \ldots \\
 & & y_{2,3} & & & \\
x_3 & y_3 & & & & \\
\vdots & \vdots & & & \ldots & \\
x_{n-1} & y_{n-1} & & y_{n-2,n-1,n} & & \\
 & & y_{n-1,n} & & & \\
x_n & y_n & & & &
\end{array}
$$

Figure 3.5: Schéma des différences divisées

Puis le polynôme d'interpolation est donné par

$$
\begin{aligned}
p\,(x) = \quad & y_0 + y_{0,1}(x - x_0) + y_{0,1,2}(x - x_0)\,(x - x_1) + +y_{0,1,2,3}(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2) + \ldots \\
& \ldots + y_{0,1,\ldots,n}(x - x_0)\,\ldots\,(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Si on veut intégrer un noeud d'interpolation supplémentaire, il faut tout simplement ajouter à droite en bas une ligne diagonale supplémentaire. Il n'est pas nécessaire de ranger les valeurs de x selon leurs grandeur.

Appliqué à l'exemple ci–dessus, le schéma montre

$$
\begin{array}{c|cccc}
-1 & 3 & & & \\
 & & \frac{-5}{2} & & \\
1 & -2 & & \frac{29}{30} & \\
 & & \frac{7}{3} & & \frac{-3}{10} \\
4 & 5 & & \frac{-10}{12} & \\
 & & -1 & & \\
5 & 4 & & &
\end{array}
$$

et la solution est donnée comme avant par

$$
p\,(x) = 3 - \frac{5}{2}\,(x + 1) + \frac{29}{30}\,(x + 1)\,(x - 1) - \frac{3}{10}\,(x + 1)\,(x - 1)\,(x - 4)
$$

3.6.4 Aspects communs

Les méthodes de Lagrange et de Newton resp. utilisent la même Idee pour la construction du polynôme dp'interpolation.

On utilise des polynômes linéairement indépendants $p_i\,(x)$ et forme la somme

$$
p\,(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i\,(x)
$$

Pour ceci, il faut déterminer les coefficients α_i tels que

$$p(x_0) = y_0 \quad , \quad p(x_1) = y_1 \quad , \quad p(x_2) = y_2 \quad \ldots \quad p(x_n) = y_n \quad .$$

D'après Lagrange, les polynômes sont donnés par

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= \ (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n) \\
p_1(x) &= \ (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n) \\
p_2(x) &= \ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n) \\
&\ \ \vdots \\
p_n(x) &= \ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

On obtient un système d'équations très simple pour les inconnues α_i (lequel?).

D'après Newton, les polynômes sont donnés par

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= \ 1 \\
p_1(x) &= \ (x-x_0) \\
p_2(x) &= \ (x-x_0)(x-x_1) \\
p_2(x) &= \ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&\ \ \vdots \\
p_n(x) &= \ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

Le système d'équations pour les inconnues α_i est donné dans la section précédente.

3.6.5 Exemples et avis

Le problème suivant joue un rôle important lors du calcul numérique d'intégrales. Il est la fondation pour la méthode de Simpson pour l'évaluation numérique de l'intégrale définie.

3–28 Exemple : On sait d'une fonction $f(x)$ que

$$f(-h) = y_{-1} \qquad , \qquad f(0) = y_0 \qquad , \qquad f(h) = y_1$$

et puis on cherche un polynôme du degré deux qui passe par les point donnés.

Solution: Nous indiquons trois possibilités indépendantes de résoudre ce problème.

1. Le polynôme demandé $p(x)$ est de la forme

$$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

et il faut déterminer les trois coefficients a, b et c. Pour cela, on utilise le système d'équations

$$\begin{array}{rlll}
p(-h) = & a\,h^2 & -b\,h & +c = y_{-1} \\
p(0) = & & & +c = y_0 \\
p(-h) = & a\,h^2 & +b\,h & +c = y_1
\end{array}$$

On en peut facilement dériver les solutions

$$c = y_0 \qquad , \qquad a = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2\,h^2} \qquad , \qquad b = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$$

Le système d'équations linéaires se représente également à l'aide de matrices, et on obtient

$$\begin{bmatrix} (-h)^2 & -h & 1 \\ 0^2 & 0 & 1 \\ h^2 & h & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

En inversant l'ordre des inconnues a, b et c, on peut le réécrire comme

$$\begin{bmatrix} 1 & -h & (-h)^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & h & h^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

La matrice apparaissante dans cette notations est appelée **matrice de Vandermonde**.

2. Les trois polynômes de base d'après Lagrange sont

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \tfrac{1}{2h^2}\, x\,(x-h) \\ p_2(x) &= \tfrac{-1}{h^2}\,(x+h)\,(x-h) \\ p_3(x) &= \tfrac{1}{2h^2}\,(x+h)\,x \end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned} p(x) &= y_{-1}\,p_1(x) + y_0\,p_2(x) + y_1\,p_3(x) \\ &= \tfrac{1}{2h^2}\,\left(y_{-1}\,x\,(x-h) - 2\,y_0\,(x+h)\,(x-h) + y_1\,(x+h)\,x\right) \\ &= \tfrac{1}{2h^2}\,\left((y_{-1} - 2\,y_0 + y_1)\,x^2 + h\,(y_1 - y_{-1})\,x + 2\,y_0\,h^2\right) \end{aligned}$$

3. Les trois polynômes de base d'après Newton sont

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x+h \\ p_2(x) &= (x+h)\,x \end{aligned}$$

et le système d'équations pour les coefficients α_0, α_1 et α_2 est

$$\begin{aligned} y_{-1} &= \alpha_0 \\ y_0 &= \alpha_0 + \alpha_1\,h \\ y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1\,2\,h + \alpha_2\,2\,h^2 \end{aligned}$$

ayant les solutions

$$\alpha_0 = y_{-1} \qquad , \qquad \alpha_1 = \frac{1}{h}\,(y_0 - y_{-1}) \qquad , \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2\,h^2}\,(y_{-1} - 2\,y_0 + y_1)$$

alors

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_0\,p_0(x) + \alpha_1\,p_1(x) + \alpha_2\,p_2(x) \\ &= \tfrac{1}{2h^2}\,\left(2\,h^2\,y_{-1} + 2\,h\,(y_0 - y_{-1})\,(x+h) + (y_{-1} - 2\,y_0 + y_1)\,(x+h)\,x\right) \\ &= \tfrac{1}{2h^2}\,\left((y_{-1} - 2\,y_0 + y_1)\,x^2 + h\,(y_1 - y_{-1})\,x + 2\,y_0\,h^2\right) \end{aligned}$$

Les trois procédés fournissent le même résultat comme la théorie générale le prédit . $\diamondsuit$

An	1900	1910	1920	1930	1940
Population	75.995	91.972	105.711	123.203	131.669
An	1950	1960	1970	1980	1990
Population	150.697	179.323	203.212	226.505	249.633

Tableau 3.1: Population des Etats–Unis, 1900–1990

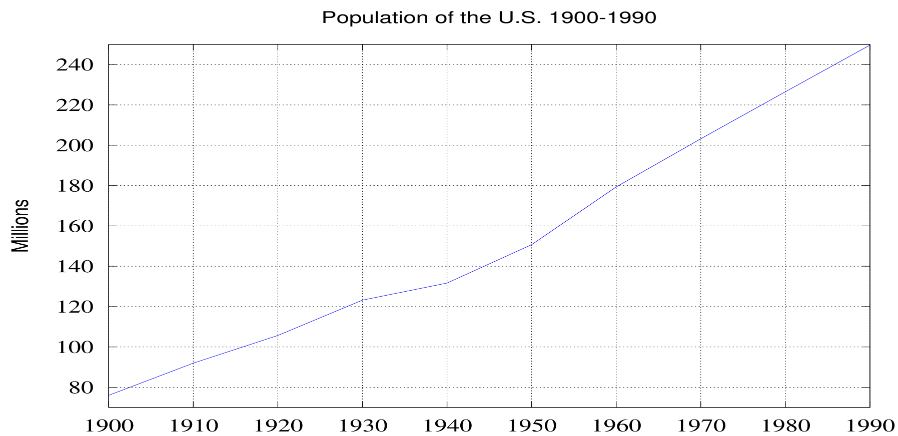


Figure 3.6: Interpolation linéaire par morceaux pour la population des Etats–Unis

3–29 Exemple : Voilà les résultats des recensements de la population des Etats–Unis de ce siècle

Pour les années intermédiaires, la population peut être estimée en joignant les deux points voisins par une droite. Ce procédé s'appelle **interpolation linéaire par morceaux** et fournit l'illustration 3.6.

On peut également construire un polynôme qui passe par les dix point donnés. Malheureusement, il faut déterminer dix coefficients pour cela, mais avec les ordinateurs d'aujourd'hui, ce n'est pas un problème.

Il est évident que l'illustration 3.7 fournit des résultats absolument inutiles pour les années après 1990. Les méthodes décrites ici ne s'appliquent que pour **interpolation** et ne servent pas du tout à une **extrapolation**. Souvent, l'extrapolation devient pire si on utilise des polynômes de degré plus grand. Pour ce problème, construire par régression un polynôme d'un degré assez petit (qui ne passe pas forcément par les points). Les polynômes d'interpolation d'un degré grand sont important pour l'intégration numérique, la différentiation et les équations différentielles.

Voilà un morceau de Code *MATLAB* pour la solution numérique de ce problème et la génération des deux graphes.

Octave

```
% This example is older than MATLAB.  It started as an exercise in
% "Computer Methods for Mathematical Computations", by Forsythe,
% Malcolm and Moler, published by Prentice-Hall in 1977.
%
% Here is the US Census data from 1900 to 1990.

% Time interval
t = (1900:10:1990)';

% Population
p = [75.995 91.972 105.711 123.203 131.669 ...
     150.697 179.323 203.212 226.505 249.633]';
```

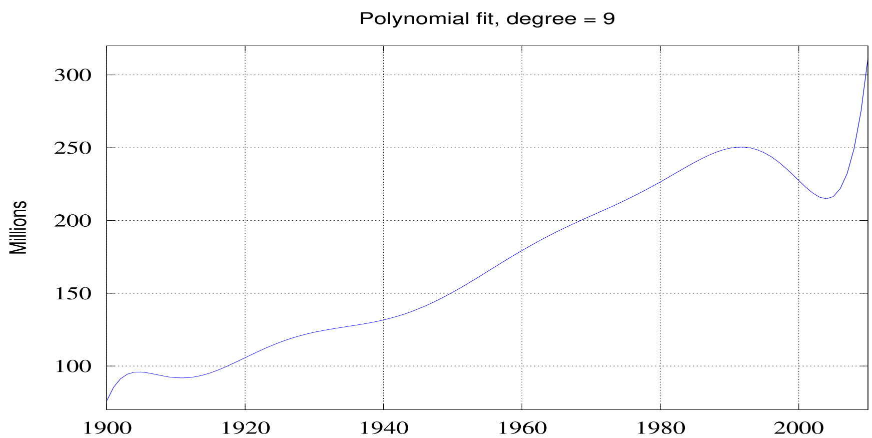


Figure 3.7: Interpolation par un polynôme du degré neuf pour la population des Etats–Unis

```
plot(t,p);
title('Population of the U.S. 1900-1990');
ylabel('Millions'); grid on

fprintf(stderr,"press any key to continue...\n"),pause() % Press any key.

% Let's fit the data with a polynomial in t and use it to
% extrapolate to t = 2000.  The coefficients in the polynomial
% are obtained by solving a linear system of equations involving
% a 10-by-10 Vandermonde matrix, whose elements are powers of
% scaled time, A(i,j) = s(i)^(n-j);

clear A
n = length(t);
s = (t-1900)/10;
A(:,n) = ones(n,1);
for j = n-1:-1:1
   A(:,j) = s .* A(:,j+1);
end

% The coefficients c for a polynomial of degree d that fits the
% data p are obtained by solving a linear system of equations
% involving the Vandermonde matrix:
%
%          A * c = p
c = A\p;

% Now we evaluate the polynomial at every year from 1900 to 2010,
% and plot the results.

v = (1900:2010)';
x = (v-1900)/10;
y = polyval(c,x);
z = polyval(c,10);

plot(v,y)
title('Polynomial fit, degree = 9');
ylabel('Millions'); grid on
```

$\diamondsuit$

3.7 Fonctions rationnelles

3–30 Définition : Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ deux polynômes de degré n et m. La fonction

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

est appelée une **fonction rationnelle**. Tous les nombres réels sont dans le domaine de définition de la fonction f, sauf les zéros du polynôme $Q(x)$.

3–31 Exemple : Considérer la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)}{(x+1)}$$

Dans la première forme il semble que $x = \pm 1$ n'est pas dans le domain de définition de cette fonction, tandis que dans la deuxième forme il semble que $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On doit éliminer cette ambiguïté. $\diamondsuit$

> **Important:** Si $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ on doit diviser numérateur et dénominateur par $(x - x_0)$. On doit chercher les facteurs communs de $P(x)$ et $Q(x)$. Beaucoup des résultats suivants vont changer si on oublie cette opération.

Une méthode pour trouver un facteur commun est d' examiner un zéro x_0 du numérateur, et puis tester si on a en même temps aussi un zéro du dénominateur. Puis on peut diviser $P(x)$ et $Q(x)$ par le facteur $(x - x_0)$ avec le schéma de Horner. La partie difficile de cette méthode est de trouver tous les zéros de $P(x)$. Si $\deg P \geq 4$, on doit habituellement utiliser des méthodes numériques.

Il existe aussi une autre méthode, basée sur l'algorithme d'Euclid. Pour l'utiliser on ne doit que diviser quelques polynômes. Malheureusement le nombre des calculs peut aussi être assez large.

3–32 Résultat : *(Algorithme d'Euclid)*
Soient P und Q deux polynômes. Puis les divisions suivantes des polynômes vont générer le **plus grand commun diviseur** *$R_n(x)$ des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$.*

$$\begin{aligned}
P &= Q_1\, Q + R_1 && \text{avec } \deg R_1 \neq 0 \text{ et } \deg R_1 < \deg Q \\
Q &= Q_2\, R_1 + R_2 && \text{avec } \deg R_2 \neq 0 \text{ et } \deg R_2 < \deg R_1 \\
R_1 &= Q_3\, R_2 + R_3 && \text{avec } \deg R_3 \neq 0 \text{ et } \deg R_3 < \deg R_2 \\
R_2 &= Q_4\, R_3 + R_4 && \text{avec } \deg R_4 \neq 0 \text{ et } \deg R_4 < \deg R_3 \\
& \vdots \\
R_{n-2} &= Q_n\, R_{n-1} + R_n && \text{avec } \deg R_n \neq 0 \text{ et } \deg R_n < \deg R_{n-1} \\
R_{n-1} &= Q_{n+1}\, R_n
\end{aligned}$$

Le pgcd est donné par le polynôme R_n .

Démonstration : Étudier la preuve de l'algorithme d'Euclid pour des nombres naturelles et puis changer les détails. $\square$

3–33 Exemple : Pour la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18}$$

on trouve (avec l'algorithme d'Euclid) le plus grand commun diviseur $(x^2 - 2x - 3)$ et donc

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+2)(x-3)}$$

$\diamondsuit$

Les résultats du reste de ce chapitre sont présentés pour des fonctions rationnelles telles que numérateur et dénominateur n'aient pas de zéros communs.

3–34 Définition :
Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle avec degré du numérateur $\deg(P) = n$ et degré du dénominateur $\deg(Q) = m$.

(a) Les zéros de $f(x)$ sont exactement les zéros de $P(x)$, la multiplicité d'un zéro x_0 de $P(x)$ est aussi appelée **l'ordre du zéro** de f.

(b) La multiplicité d'un zéro x_0 de $Q(x)$ est appelée **l'ordre du pôle** x_0 de la fonction $f(x)$.

(c) Si $n < m$ on dit que $f(x)$ est une **fonction rationnelle propre**.

(d) Si $n \geq m$ on dit que $f(x)$ est une **fonction rationnelle impropre**.

3–35 Exemple :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)}{(x-1)}$$

est une fonction rationnelle impropre avec un pôle de l'orde 1 pour $x = 1$ et un zéro de l'ordre 1 pour $x = -1$. $\diamondsuit$

3–36 Exemple :

$$f(x) = \frac{-6 - x + 2x^2}{9 - 6x + 10x^2 - 6x^3 + x^4} = \frac{(x-2)(2x+3)}{(x^2+1)(x-3)^2}$$

est une fonction rationnelle propre avec deux zéros de l'ordre 1 pour $x = 2$ et $x = -3/2$ et un pôle de l'ordre 2 pour $x = 3$. $\diamondsuit$

Si f est une fonction rationnelle impropre, on peut utiliser la division de polynômes et on réécrit $f(x)$ comme

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

avec des polynômes H et R et le degré de R est plus petit que m. En bref: on écrit la fonction rationnelle impropre f comme somme d'un polynôme H et d'une fonction rationnelle propre.

3–37 Exemple :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)}{(x-1)} = 1 + \frac{2}{(x-1)}$$

$\diamondsuit$

Si vous utilisez *Mathematica*, les calculs sont faites par l'ordinateur, et il est très facile de vérifier que

$$\frac{x^4-1}{x^2+2}=x^2-2+\frac{3}{(x^2+2)}$$

Mathematica

```
PolynomialDivision[x^4-1,x^2+2,x]
.
  { -2+x^2  ,  3 }
```

Considérer la fonction

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=H(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Si on calcule $R(x)/Q(x)$ pour des valeurs de $x\in\mathbb{R}$ tels que $|x|\gg 1$, on obtient des résultats très petits. Puis si $|x|$ devient de plus en plus grand, le graphe de $f(x)$ va se rapprocher du graphe de $H(x)$.

3–38 Définition : On dit que $H(x)$ est la **courbe limite** ou **asymptote** à la fonction

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=H(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Les asymptotes et les pôles sont très utiles pour dessiner le graphe d'une fonction rationnelle. Si $x=b$ est un pôle de l'ordre k on peut réécrire la fonction comme

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-b)^k\,Q_1(x)}.$$

Puis on voit que

$$f(x)\approx\frac{P(b)}{Q_1(b)}\,\frac{1}{(x-b)^k}\quad\text{pour}\quad x\approx b$$

3–39 Exemple : Trouver une fonction rationnelle avec la droite $y=1-x$ comme asymptote et un pôle de l'ordre 2 pour $x=3$ et $p(0)=0$.

Solution: On sait que

$$p(x)=1-x+\frac{g(x)}{(x-3)^2}$$

et $g(x)=a\,x+b$ est un polynône de degré 1. A cause de $p(0)=0$ on a

$$p(0)=1-0+\frac{g(0)}{(0-3)^2}=1+\frac{b}{9}=0$$

donc $b=-9$. On ne peut pas calculer a, mais on sait que $a\neq 3$. Pourquoi? Pour $a=4$ on obtient le graphe en figure 3.8.

♢

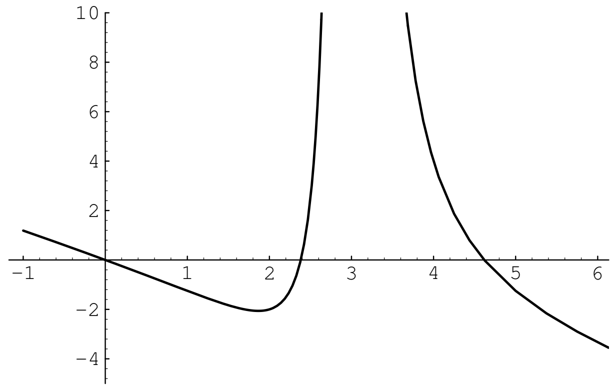


Figure 3.8: Graphe d'une fonction rationnelle impropre

3.8 Problèmes

3.8.1 Problèmes généraux

• Problème 3–1:
Chercher deux polynômes f et g, tel que

(a) $f\,(1) \neq 0$ et $g\,(1) \neq 0$, mais pour le polynôme $f+g$ on a $(f+g)\,(1) = 0$.

(b) $f\,(1) \neq 0$ et $g\,(1) \neq 0$, mais pour le polynôme $f \circ g$ on a $(f \circ g)\,(1) = 0$.

(c) $f\,(0) = f\,(1) = f\,(2) = f\,(3) = 0$, mais $g \circ f$ n'a pas de zéros réels.

• Problème 3–2:
Trouver tous les zéros des polynômes suivantes.

(a) $f\,(x) = -4 + 8x + 5x^2$

(b) $f\,(x) = 25 + 10\,x - 13\,x^2 + 2\,x^3$. Regarder $x = -1$.

(c) $f\,(x) = -24 - 43\,x - 13\,x^2 + 7\,x^3 + x^4$. Regarder $x = -1$.

• Problème 3–3:
Dessiner les graphes des polynômes suivants

(a) $f\,(x) = 3x - 2$

(b) $g\,(z) = (1-z)/3$

(c) $f\,(s) = 2s^2 + 4s + 1$

(d) $A\,(r) = \pi r^2$

(e) $f\,(x) = x^2 - 9x + 2$

• Problème 3–4:
Calculer la valeur de $f\,(3)$ pour le polynôme

$$f\,(x) = -24 + 10\,x + 27\,x^2 - 11\,x^3 - 3\,x^4 + x^5$$

Utiliser le petit schéma de Horner.

• **Problème 3–5:**
Appliquer le grand schéma de Horner pour le polynôme

$$f(x) = 4 - 8\,x - 13\,x^2 + 2\,x^3 + 3\,x^4$$

avec $x_0 = 2$.

• **Problème 3–6:**
Examiner la multiplicité du zéro $x = 2$ du polynôme

$$p(x) = x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72$$

• **Problème 3–7:**
Avec les deux constantes a et b on construit le polynôme

$$g(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 + a\,x + b$$

Si l'on divise $g(x)$ par $(x^2 + 2)$ on obtient le reste de $x + 9$. Trouver a et b et puis calculer $g(x)/(2\,x + 6)$.

• **Problème 3–8:**
Trouver tous les zéros des polynômes suivantes

(a) $f(x) = x^2 - 16$

(b) $f(x) = x^2 + 16$

(c) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$

(d) $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x$

(e) $g(z) = 4z^6 - 8z^3 + 3$

(f) $h(a) = a^3 - 2a^2 - 5a + 6$

(g) $r(x) = -x^3 + 5x^2 - 11x + 15$

• **Problème 3–9:**
Vérifier les résultats ci–dessus avec les formules de Viète.

• **Problème 3–10:**
Utiliser le schéma de Horner pour trouver les valeurs des polynômes suivantes au points donnés.

(a) $f(x) = x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 3x$ pour $x_0 = 2$ et $x_0 = -2$.

(b) $f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x - 10$ pour $x_0 = 1, x_0 = 2$ et $x_0 = 1.123$. Utiliser une calculatrice.

• **Problème 3–11:**
Esquisser le graphe du polynôme $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ pour la domaine $-2 \leq x \leq 2$. Utiliser le schéma de Horner pour trouver les valeurs et les pentes aux points $x = -2, -1, 0, 1, 2$, puis designer.

• **Problème 3–12:**
Esquisser le graphe du polynôme $f(x) = x^4 - 3x^2 - 2$ pour la domaine $-2 \leq x \leq 2$. Utiliser le schéma de Horner pour trouver les valeurs et les pentes aux points $x = -2, -1, 0, 1, 2$, puis designer.

• **Problème 3–13:**
Esquisser le graphe du polynôme $f(x) = x^5 - 3x^3 - x$ pour la domaine $-2 \leq x \leq 2$. Utiliser le schéma de Horner pour trouver les valeurs et les pentes aux points $x = -2, -1, 0, 1, 2$, puis designer.

• **Problème 3–14:**
Dessiner le graphe du polynôme $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 3x$ pour $-2.1 \leq x \leq 2.1$. Calculer les valeurs et les pentes du graph pour $x = -2, -1, 0, 1, 2$ avec le schema de Horner.

• Problème 3–15:
Diviser le polynôme $f(x) = -2x^5 - x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 4x$ par $2x^2 + x$. Utiliser l'algorithme de division habituelle.

• Problème 3–16:
Utiliser le schéma de Horner pour diviser le polynôme $f(x) = x^6 + 2x^2 - 4$ par $x+2$. Puis calculer $f(-2)$.

• Problème 3–17:
Utiliser le schéma de Horner pour diviser le polynôme $f(x) = -2x^5 - x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 4x$ par $2\,x + 1$. Puis trouver autant des zéros que possible.

• Problème 3–18:
Examiner $f(x) = x^5 + 1$ et $g(x) = x^2 - 1 = (x-1)\,(x+1)$. Diviser f par g avec deux chemins de calcul differentes.

(a) Division habituelle

(b) D'abord diviser f par $(x-1)$, puis diviser le reste par $(x+1)$. Attention: tenez conte du reste.

Les résultats finals doivent être identiques.

• Problème 3–19:
Diviser les polynômes.

$$\frac{a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0}{x - x_0} = \left(b_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + b_2\,x^2 + b_1\,x + b_0\right) + \text{ reste}$$

Utiliser la division standard pour trouver une formule récursive pour les coefficients $b_{n-1}, \ldots, b_0$. On a déjà vue le résultat.

• Problème 3–20:
La division de $f(x) = x^4 - 2x^3 + ax + b$ par $x^3 + 2x - 1$ rend un reste de $-2\,x^2$. Déterminer les constantes a et b.

• Problème 3–21:
Le polynôme $f(x) = x^4 + ax - 2x + 3$ est divisé par $x - 3$, sans reste. Trouver $f(3)$?

Tip: réfléchir au lieu de calculer!!

• Problème 3–22:
Le polynôme $f(x) = x^6 - 10x^5 + 35x^4 - 44x^3 - 9x^2 + 54x - 27$ a plusieurs zéros entiers, petites. Utiliser cette information et division des polynômes pour déterminer toutes les zéros, y inclue multiplicité.

• Problème 3–23:
Habituellement la division des polynômes avec des coefficients entier rends des coefficients rationnelles comme résultat.

Comment construire (sans effort trop grand) des polynômes f et g tel que la division f/g rend des coefficients entier?

• Problème 3–24:
Cette exercise utilise des nombres complexe.

Le polynôme $f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} \ldots x^2 + x + 1$ est divise par un polynome de degré 1 avec un résultat très simple. Puis on peut determiner toutes les zéros de f.

• Problème 3–25:

(a) Trouver les solutions exactes de l'équation $6\,x^3 - 11\,x^2 - 17\,x + 30 = 0$, sans utiliser la calculatrice. Tuyau: $x = 2$

(b) Trouver l'ensemble des solution de l'inégalité $|2\,x - 4| \leq 6 - x$

• Problème 3–26:
Trouver tous les zéros du polynôme sans calculatrice

$$f\,(x) = x^4 + 5\,x^3 + 6\,x^2 - x - 3$$

Tuyau : $f\,(-3) = 0$

• Problème 3–27:
Le polynôme

$$f\,(x) = 2x^4 - 13x^3 + 25x^2 + ax + b$$

a un multiple zéro pour $x = 2$.

(a) Trouver a et b.

(b) Trouver tous les zéros du polynôme.

(c) Trouver la valeur de la fonction et la pente du graphe pour $x = 1$

(d) Dessiner le graphe du polynôme tel que la forme qualitative est juste.

• Problème 3–28:
Utiliser la calculatrice pour trouver la valeur de

$$p\,(t) = t^2 - 12345678\,t - 12345678$$

pour $t = 12345679$ en utilisant

(a) la touche x^y pour t^2

(b) l'opération $t \cdot t$ pour t^2

(c) le schéma de Horner.

Lequel des résultats est juste?

• Problème 3–29:
Calculer

$$x^2 - 11223344551\,x - 11223344550$$

pour $x = 11223344552$.

• Problème 3–30:
Dessiner le graphe du polynôme $f\,(x) = x^4 - x^3 + x - x^2$ pour $-2 \leq x \leq 2$. Utiliser le schéma de Horner pour trouver les valeurs et les pentes de la courbe pour $x = -2, -1, 0, 1, 2$ et puis dessiner.

• Problème 3–31:
Le graphe du polynôme

$$p\,(x) = 2\,x^4 + 5\,x^3 + a\,x^2 - 2\,x + b$$

passe par le point $(\frac{-1}{2}\,,\,\frac{3}{4})$ et la pent à ce point est $\frac{1}{4}$. Trouver a et b à l'aide du schéma de Horner, sans utiliser la calculatrice.

• **Problème 3–32:**
Resoudre ce problème á l'aide du **schéma de Horner**. Examiner le ploynôme suivant.

$$p(x) = 2\,x^4 - 6\,x^3 + x^2 + 6\,x$$

(a) Trover le valauer de p pour $x = -2$ et la pente du graphe pour ce point.

(b) Le polynôme $p(x)$ a deux zéros entier et petit. Trouver tous le zéro d'une façon **exacte** á l'aide du schéma de Horner.

3.8.2 Interpolation

• **Problème 3–33:**
Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Lagrange um ein Polynom $g\,(x)$ von minimalem Grad zu finden das durch die Punkte $P_1 = (-1, 4)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (4, 1.5)$ und $P_4 = (5, 0)$ geht.

• **Problème 3–34:**
Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Lagrange um ein Polynom $g\,(x)$ von minimalem Grad zu finden das durch die Punkte $P_1 = (-2, 4)$, $P_2 = (-1, -1)$, $P_3 = (1, -1)$ und $P_4 = (2, 4)$ geht.

• **Problème 3–35:**
Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Lagrange um ein Polynom $g\,(x)$ von minimalem Grad zu finden das durch die Punkte $P_1 = (-2, 4)$, $P_2 = (-1, -1)$, $P_3 = (1, 1)$ und $P_4 = (2, -4)$ geht.

• **Problème 3–36:**
Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Lagrange um ein Polynom $g\,(x)$ von minimalem Grad zu finden das durch die Punkte $P_1 = (-2, 4)$, $P_2 = (-1, -1)$, $P_3 = (1, 0)$ und $P_4 = (2, 0)$ geht.

• **Problème 3–37:**
Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Lagrange um ein Polynom $g\,(x)$ von minimalem Grad zu finden das durch die Punkte $P_1 = (-2, 4)$, $P_2 = (-1, -1)$ und $P_3 = (2, -4)$ geht.

• **Problème 3–38:**
Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Lagrange um ein Polynom $g\,(x)$ von minimalem Grad zu finden das durch die Punkte $P_1 = (-3, 0)$, $P_2 = (-2, 0)$, $P_3 = (-1, 3)$, $P_4 = (0, 0)$ $P_5 = (3, 0)$, $P_6 = (2, 0)$ und $P_7 = (1, 3)$ geht. Zeichnen Sie dieses Polynom.

• **Problème 3–39:**
Lösen Sie einige der obigen Interpolationsaufgaben auch mit der Methode von Newton.

• **Problème 3–40:**
Sei $h > 0$ fest gegeben. Vom einem Polynom $f\,(x)$ weiss man, dass

$$f\,(-h) = a \quad , \quad f\,(0) = b \quad \text{und} \quad f\,(h) = c$$

(a) Finden Sie das einfachste Polynom, das durch die obigen drei Punkte geht und schreiben Sie es in der Form

$$f\,(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k$$

d.h. bestimmen Sie n, a_0, a_1, a_2,…,a_n.

(b) Berechnen Sie die Steigung dieses Polynoms bei $x = 0$.

(c) Finden Sie **alle** Polynome vom Grad 3 durch die drei obigen Punkte.

• Problème 3–41:
Pour une fonction $y = f(x)$ on sait les valeurs suivantes:

$$f(-1) = -0.69315 \quad , \quad f(0) = 0 \quad \text{und/et} \quad f(1) = 0.40547$$

(a) Bestimmen Sie den Wert von $f(0.5)$ mit Hilfe einer stückweise linearen Interpolation.

(b) Bestimmen Sie ein Polynom $p(x)$ geeigneter Ordnung durch die drei Punkte.

(c) Approximieren Sie den Wert von $f(0.5)$ mit Hilfe des obigen Polynoms $p(x)$.

(a) Trouver la valeur de $f(0.5)$ à l'aide d'une interpolation linéaire par morceau.

(b) Trouver un polynôme $p(x)$ de l'ordre correcte par les trois points donnés.

(c) Approximer la valeur de $f(0.5)$ à l'aide du polynôme $p(x)$ ci–dessus.

• Problème 3–42:
Von einer Funktion $y = f(x)$ sind die folgenden Werte bekannt:

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(0.5) = 0.462117 \quad \text{und} \quad f(1) = 0.761594$$

(a) Bestimmen Sie den Wert von $f(0.25)$ mit Hilfe einer stückweise linearen Interpolation.

(b) Bestimmen Sie den Wert von $f(0.25)$ mit Hilfe einer quadratischen Funktion.

(c) Skizzieren Sie in einer einfachen Graphik die stückweise lineare Interpolationsfunktion und die quadratische Interpolationsfunktion qualitativ richtig.

• Problème 3–43:
Pour une fonction $f(x)$ on sait que

$$f(0) = 1 \quad , \quad f(0.5) = 1.1276 \quad \text{et} \quad f(1) = 1.543081$$

(a) Estimaer la valeur $f(0.4)$ à l'aide d'une interpolation linéaire des points 0 et $\frac{1}{2}$.

(b) La fonction $f(x)$ est à remplacer dans l'intervalle $[0, 1]$ par une parabole $p(x)$ qui coïncide avec $f(x)$ pour $x = 0$, $\frac{1}{2}$ et 1. Trouver ce polynôme $p(x)$.

(c) Calculer $p(0.4)$ et comparer avec la vrai valeur $f(0.4) = 1.0811$.

• Problème 3–44:
Einer vierstelligen Wertetabelle für die Fehlerfunktion $y = \text{erf}\, x$ entnimmt man

x	0	0.5	1	1.5
erf x	0.0000	0.5205	0.8427	0.9661

(a) Finden Sie ein passendes Interpolationspolynom $p(x)$.

(b) Vergleichen Sie dann erf $(0.9) = 0.7969$ und $p(0.9)$.

(c) Vergleichen Sie dann erf $(2.0) = 0.9953$ und $p(2)$.

• Problème 3–45:
La fonction $f(x) = \sin x$ est à remplacer dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ par une parabole $p(x)$ qui coïncide avec $f(x)$ pour $x = 0$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

(a) Trouver le polynôme $p(x)$.

(b) Calculer $p(\frac{\pi}{3})$ et comparer avec $\sin(\frac{\pi}{3})$

(c) Calculer $g(\frac{\pi}{3})$ à l'aide d'une interpolation linéaire des points 0 et $\frac{\pi}{2}$. Comparer avec $\sin(\frac{\pi}{3})$.

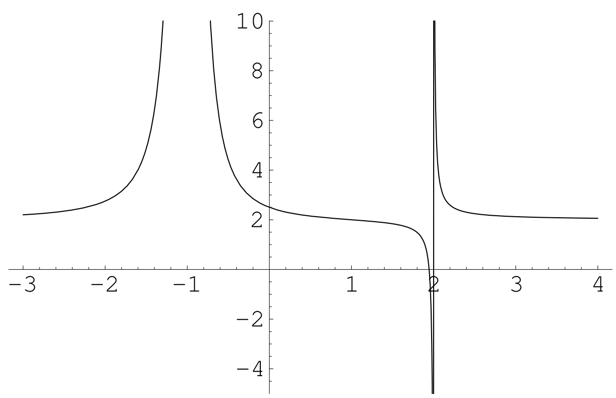
• Problème 3–46:
Für die Fliessgrenze F in (in $100kg/cm^2$) eines kohlenstoffarmen Stahls in Abhängigkeit von der Temperatur T (in $100C^\circ$) ergibt ein Versuch die folgende Tabelle.

T	1	2	3	4	5	6
F	30	27	25	24	21	19

Zu bestimmen ist ein Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$ mit $p(T_i) = F_i$ für $0 \leq i \leq 4$.

3.8.3 Fonctions rationnelles

• Problème 3–47:
Ci–dessous trouver le graphe d'une fonction rationnelle impropre $f(x)$. Utiliser $f(1) = 2$. Donner une formule possible pour cette fonction $f(x)$.



• Problème 3–48:
Pour une fonction rationnelle $f(x)$ on sait que $f(1) = 0$ et on connait l'asymptote

$$g(x) = x - 3$$

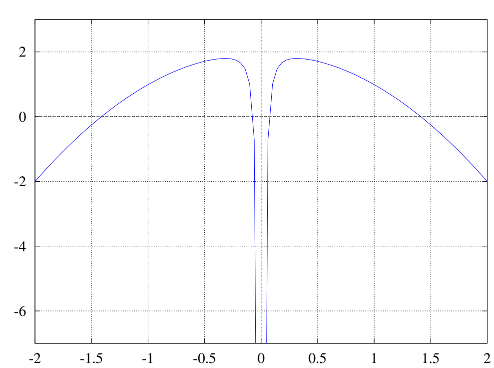
Si x s'approche à 2 (de gauche ou droite), les valeurs de la fonction surpassent toutes les bornes. Trouver la fonction $f(x)$.

• Problème 3–49:

Pour la fonction à droite on sait que

- il s'agit d'une fonction rationnelle
- la boucle supérieure est proche a une parabole
- $f(\pm 0.1) = 0.99$

Trouver une formule pour $f(x)$.

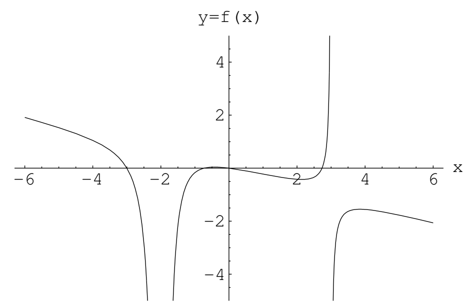


• Problème 3–50:

(a) Pour la fonction rationnelle $h(x)$ ci–dessous à gauche on sait qu'il y a un zéro commun pour numérateur et dénominateur. D'abord réécrire $h(x)$ sans zéro commun et puis écrire $h(x)$ comme somme d'un polynôme et une fonction rationnelle propre.

(b) Trouver une formule (autant simple que possible) pour la fonction rationnelle $f(x)$ dont le graphe est montré ci–dessous à droite.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + x^3 - 2\,x^2 + 4\,x - 24 \\ Q(x) &= (x+7)\,(x-2) \\ h(x) &= \frac{P(x)}{Q(x)} \end{aligned}$$

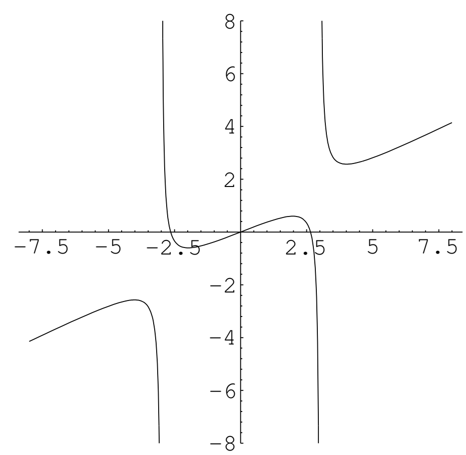


• Problème 3–51:

Rechts sehen Sie den Graphen einer unecht gebrochen rationalen Funktion $f\,(x)$.

(a) Finden Sie eine mögliche Formel für die Funktion $f\,(x)$

(b) Geben Sie den Definitionsbereich und das Bild der Funktion an.

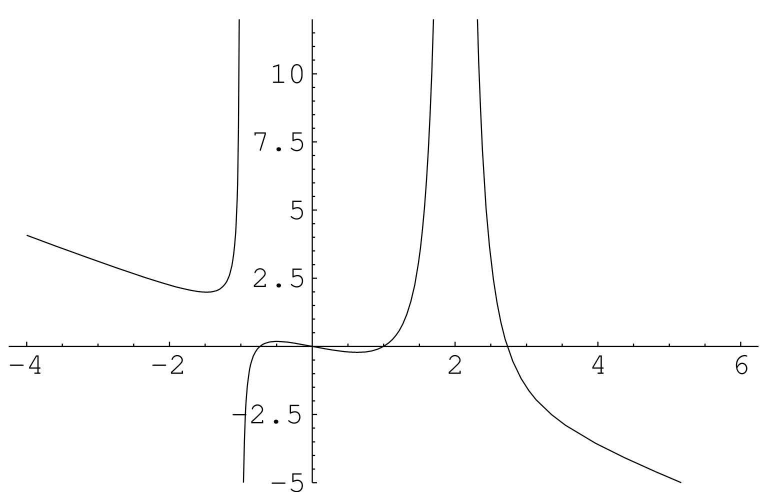


• Problème 3–52:

Ci–dessous trouver le graphe d'une fonction rationalle impropre $f\,(x)$. Utiliser $f(0) = f(1) = 0$.

(a) Donner une formule possible pour cette fonction $f\,(x)$.

(b) Donner la domaine de définition et l'image de cette fonction.

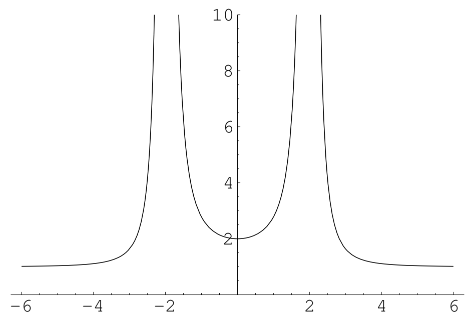


• Problème 3–53:

Rechts sehen Sie den Graphen einer unecht gebrochen rationalen Funktion $f(x)$. Die Werte der Funktion $f(x)$ approximieren 1, falls $|x|$ immer grösser wird. Es gilt $f(0) = 2$.

(a) Finden Sie eine mögliche Formel für die Funktion $f(x)$

(b) Geben Sie den Definitionsbereich und das Bild der Funktion an.

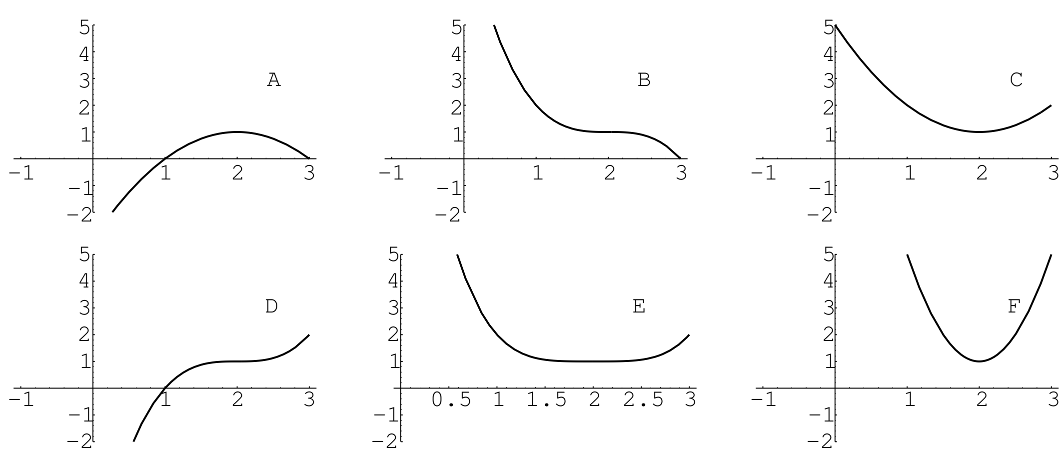


• Problème 3–54:
Trouver une fonction $y = f(x)$ avec les propriétés suivantes

- pour des valeurs large de $|x|$ on a $f(x) \approx -x$
- pour x proche de -1 les valeurs de y sont très grand (positiv) et pour $x = -1$ il y a une division par zéro.
- $f(0) = 1/2$

• Problème 3–55:
Ci–dessous vous trouver les graphes de six des huit fonctions données. Déterminer les paires des fonctions et graphes.

$$\begin{array}{llll} 1: & f(x) = 1 + (x-3)^2 & 2: & f(x) = 1 + 4\,(x-2)^2 \\ 3: & f(x) = 1 - (x-2)^3 & 4: & f(x) = x^2 - 4\,x + 5 \\ 5: & f(x) = (x-2)^2 - 1 & 6: & f(x) = (x-2)^3 + 1 \\ 7: & f(x) = (x-2)^4 + 1 & 8: & f(x) = 1 - (x-2)^2 \end{array}$$



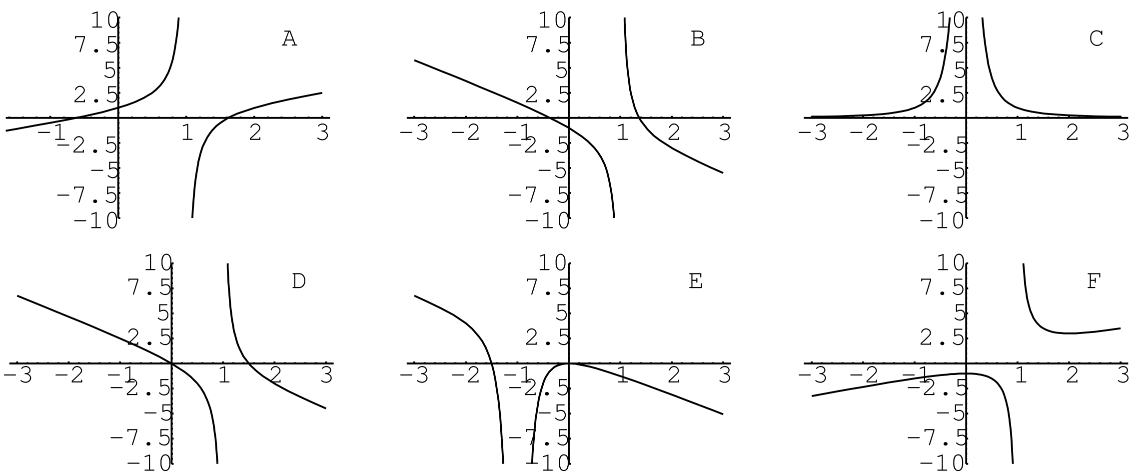
• Problème 3–56:
Ci–dessous vous trouver les graphes de six des huit fonctions données. Déterminer les paires des fonctions et graphes.

$$1: \quad f(x) = x - \frac{1}{x-1} \qquad\qquad 2: \quad f(x) = x + \frac{1}{x-1}$$

$$3: \quad f(x) = -2\,x + \frac{1}{x-1} \qquad\qquad 4: \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$5: \quad f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad\qquad 6: \quad f(x) = -2\,x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$7: \quad f(x) = -2\,x + 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \qquad\qquad 8: \quad f(x) = -2\,x - \frac{1}{(x-1)^2}$$



3.8.4 Solutions de quelques problèmes

Setzen Sie Ihren Taschenrechner geschickt ein. Die Antworten zu den Interpolationsproblemen können alle leicht verifiziert werden, indem man die bekannten Werte einsetzt.

Solution pour problème 3–2 :

(a) $x_1 = -2$, $x_2 = 2/5$

(b) $x_1 = -1$, $x_2 = 5/2$, $x_3 = 5$

(c) $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -8$

Solution pour problème 3–4 : $f\,(3) = -48$.

Solution pour problème 3–5 :

$$f\,(x) = 60\,\,(-2+x) + 71\,(-2+x)^2 + 26\,(-2+x)^3 + 3\,(-2+x)^4$$

Solution pour problème 3–6 : Dans le grand schéma de Horner on peut lire que $x = 2$ est un zéro de l'ordre 3.

Solution pour problème 3–14 :

x	-2	-1	0	1	2
Valeur	-14	2	0	-2	14
Pente	79	-8	3	-8	79

Solution pour problème 3–19 : La formule coïncide avec le schéma de Horner.

Solution pour problème 3–24 : Division par $(x-1)$.

Solution pour problème 3–25 :

(a) Division durch den Faktor $(x-2)$ mit Hilfe des Hornerschemas

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -11 & -17 & 30 \\ x_0 = 2 & & 12 & 2 & -30 \\ \hline & 6 & 1 & -15 & \underline{0} \end{array}$$

und somit gilt

$$f(x) = 6\,x^3 - 11\,x^2 - 17\,x + 30 = (x-2)\,(6\,x^2 + x - 15)$$

und die exakten Nullstellen sind gegeben durch

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6 \cdot 15}}{12} = \frac{-1 \pm 19}{12} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{3} \end{cases}$$

(b) Diese Aufgabe sollte graphische gelöst werden. Es ergibt sich wegen der Betragsfunktion eine Fallunterscheidung:

- $x \leq 2$:
  $|2\,x - 4| = -2\,x + 4 \leq 6 - x$ kann vereinfacht werden zu $-2 \leq x$ und es ergibt sich ein Beitrag von $-2 \leq x \leq 2$ zur Lösungsmenge.
- $2 \leq x$:
  $|2\,x - 4| = 2\,x - 4 \leq 6 - x$ kann vereinfacht werden zu $3\,x \leq 10$ und es ergibt sich ein Beitrag von $2 \leq x \leq \frac{10}{3}$ zur Lösungsmenge.

Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge $L = [-2\,,\,10/3]$.

Solution pour problème 3–26 :

$$\{-3, -1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$$

Solution pour problème 3–27 :

(a) Das Polynom hat bei $x = 2$ eine mindestens doppelte Nullstelle. Somit muss bei den ersten beiden Phasen des Horner–Schemas jeweils ein Rest 0 entstehen. Das wird zwei Geichungen für die beiden Unbekannten a und b liefern.

$$\begin{array}{r|rrrcc} & 2 & -13 & 25 & a & b \\ x_0 = 2 & & 4 & -18 & 14 & 2a+28 \\ \hline & 2 & -9 & 7 & a+14 & \underline{b+2a+28} \\ x_0 = 2 & & 4 & -10 & -6 & \\ \hline & 2 & -5 & -3 & \underline{a+8} & \end{array}$$

Somit sind die Gleichungen

$$a + 8 = 0 \quad \text{und} \quad b + 2a + 28 = 0$$

zu lösen und man erhält sofort $a = -8$ und $b = -12$.

(b) Weiter weiss man, dass

$$f\,(x) = (x-2)^2\,(2x^2 - 5x - 3)$$

und somit sind zwei Nullstellen gegeben als Lösungen der Gleichung $2x^2 - 5x - 3 = 0$. Das ergibt die vier Nullstellen

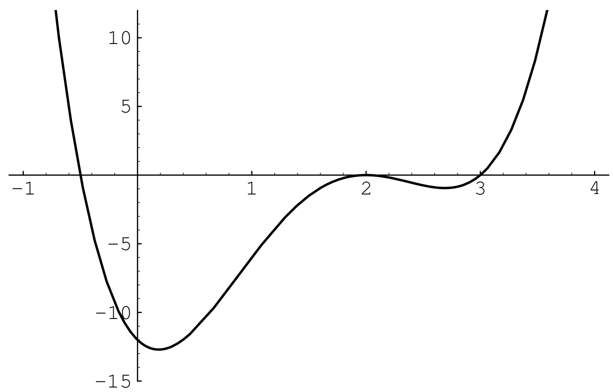
$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad x_3 = 3 \quad , \quad x_4 = \frac{-1}{2}$$

(c) Hornerschema mit $x_0 = 1$

	2	-13	25	-8	-12
$x_0 = 1$		2	-11	14	6
	2	-11	14	6	-6
$x_0 = 1$		2	-9	5	
	2	-9	5	11	

Somit ist $f(1) = -6$ und die Steigung ist 11.

(d) Es ist $f(0) = -12$ und die Steigung bei $x = 0$ ist -8.



Solution pour problème 3–28 :

(a) Stellenauslöschung.

(b) Stellenauslöschung.

(c)

	1	-12345678	-12345678
t=12345679		12345679	12345679
	1	1	1

Diese Rechnungen sind exakt, auch wenn der Taschenrechner nur mit 10 Stellen rechnet.

Solution pour problème 3–29 : Unbedingt das Hornerschema verwenden (liefert das richtige Ergebnis) oder den Ausdruck umschreiben zu

$$x^2 - (x-1)\,x - (x-2) = 2$$

Solution pour problème 3–30 : Es ist zu beachten, dass die erste Zeile des Hornerschemas die Zahlen 1, -1, -1, 1 und 0 enthalten muss, in dieser Reihenfolge.

Mathematica

```
f[x_] := x^4-x^3+x-x^2
Table[{x,f[x],f'[x]},{x,-2,2,1}]//TableForm
Plot[f[x],{x,-2,2}]
```

Wert von x	Wert von $f(x)$	Steigung
-2	18	-39
-1	0	-4
0	0	+1
1	0	0
2	6	17

Solution pour problème 3–31 : Der einfachste Rechenweg beruht auf dem Hornerschema.

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & 2 & 5 & a & -2 & b \\
x_0 = \frac{-1}{2} & & -1 & -2 & 1-a/2 & \frac{2+a}{4} \\
\hline
 & 2 & 4 & a-2 & -1-a/2 & \underline{b+\frac{2+a}{4}} \\
x_0 = \frac{-1}{2} & & -1 & -3/2 & \frac{-2\,a+7}{4} & \\
\hline
 & 2 & 3 & a-7/2 & \underline{3/4-a} &
\end{array}
$$

Somit erhalten wir die zwei Gleichungen

$$b + \frac{2+a}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad 3/4 - a = -1/4$$

mit den Lösungen $a = 1$ und $b = 0$.

Solution pour problème 3–32 :

(a) Verwende das grosse Horner Schema mit $x_0 = -2$

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & 2 & -6 & 1 & 6 & 0 \\
x_0 = -2 & & -4 & 20 & -42 & 72 \\
\hline
 & 2 & -10 & 21 & -36 & \underline{72} \\
x_0 = -2 & & -4 & 28 & -98 & \\
\hline
 & 2 & -14 & 49 & \underline{-134} &
\end{array}
$$

Somit ist $p(-2) = 72$ und die Steigung ist -134 .

(b) Offensichtlich ist $x_1 = 0$ eine Nullstelle und

$$f(x) = x\,(2\,x^3 - 6\,x^2 + x + 6)$$

Taschenrechner oder Raten zeigen eine zweite Nullstelle bei $x_2 = 2$ und das Hornerschema

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 2 & -6 & 1 & 6 \\
x_0 = 2 & & 4 & -4 & -6 \\
\hline
 & 2 & -2 & -3 & \underline{0}
\end{array}
$$

impliziert

$$f(x) = x\,(2\,x^3 - 6\,x^2 + x + 6) = x\,(x-2)\,(2\,x^2 - 2\,x - 3)$$

Die Nullstellen des quadratischen Ausdrucks sind

$$x_{3,4} = \frac{1}{4}\ \left(2 \pm \sqrt{4+24}\right) = \frac{1}{2}\ \left(1 \pm \sqrt{7}\right)$$

Somit haben wir die vier Nullstellen gefunden.

Solution pour problème 3–40 :

Mit dem Interpolationsverfahren von Newton ergibt sich das Schema rechts. Somit ist die Funktion gegeben durch

$$f\,(x) = a + \frac{b-a}{h}\ (x+h) + \frac{c-2\,b+a}{2\,h^2}\ (x+h)\ x$$

$$\begin{array}{r|lll} -h & a & & \\ & & \dfrac{b-a}{h} & \\ 0 & b & & \dfrac{c-b-b+a}{2h\ h} \\ & & \dfrac{c-b}{h} & \\ h & c & & \end{array}$$

(a) Durch sorgfältiges Ausmultiplizieren erhalten wir daraus

$$f\,(x) = b + \frac{c-a}{2\,h}\ x + \frac{c-2\,b+a}{2\,h^2}\ x^2$$

(b) Die Steigung bei $x = 0$ ist $\frac{c-a}{2\,h}$.

(c) Mit den Ideen der Lagrange–Interpolation erhalten wir alle solchen Polynome durch

$$f\,(x) + k\ (x+h)\ x\ (x-h)$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Solution pour problème 3–41 :

(a) Durch Geradenstück verbinden

$$f\,(0.5) \approx \frac{f\,(0) + f\,(1)}{2} \approx 0.2027$$

(b) Durch eine Lagrange Interpolation ist das Polynom der Ordnung 2 gegeben durch

$$\begin{aligned} p(x) &= f(-1)\ \frac{x\,(x-1)}{(-1)\,(-1-1)} + 0 + f(1)\ \frac{(x+1)\,x}{(1+1)\,1} \\ &= f(-1)\ \frac{x^2-x}{2} + f(1)\ \frac{x^2+x}{2} \\ &= \frac{f(-1)}{2}\ (x^2-x) + \frac{f(1)}{2}\ (x^2+x) \\ &= \frac{f(-1)+f(1)}{2}\ x^2 + \frac{-f(-1)+f(1)}{2}\ x \\ &\approx -0.1438\ x^2 + 0.5493\ x \end{aligned}$$

(c)

$$p(0.5) \approx 0.2387$$

Die interpolierten Werte können mit den „richtigen“ Werten verglichen werden, da die Zahlen mit Hilfe der Funktion $f(x) = \ln(1+\frac{x}{2})$ konstruiert wurden. Es gilt $f(0.5) \approx 0.2231$.

Solution pour problème 3–42 :

(a) Durch Geradenstück verbinden

$$f(0.25) \approx \frac{f(0) + f(0.5)}{2} \approx 0.231085$$

(b) Der Ansatz $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 0\,a & + & 0\,b & + & c & = & 0 \\ \frac{1}{4}\,a & + & \frac{1}{2}\,b & + & c & = & 0.462117 \\ a & + & b & + & c & = & 0.761594 \end{array}$$

Dieses System von linearen Gleichungen lässt sich mit dem Taschenrechner lösen. Man kann auch aus der ersten Gleichung ablesen, dass $c = 0$. Dann kann man das doppelte der zweiten Gleichung von der dritten subtrahieren und erhält

$$\frac{1}{2}\,a = 0.761594 - 2 \cdot 0.462117 \quad \text{oder} \quad a \approx -0.32528$$

Aus der dritten Gleichung folgt dann

$$b = 0.761594 - a \approx 1.08687$$

Nun haben wir

$$f(x) = -0.32528\,x^2 + 1.08687\,x$$

und somit

$$f(0.25) = \frac{a}{16} + \frac{b}{4} + c \approx 0.251388$$

Die Aufgabe könnte auch durch eine Interpolation gemäss der Methode von Lagrange gelöst werden. Hier die Rechnungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0.5)\,\frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)} + f(1)\,\frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)} \\ &= f(0.5)\,\frac{x^2-x}{-1/4} + f(1)\,\frac{x^2-x/2}{1/2} \\ &= f(0.5)\,(-4\,x^2+4\,x) + f(1)\,(2\,x^2-x) \\ &= 0.462117\,(-4\,x^2+4\,x) + 0.761594\,f(1)\,(2\,x^2-x) \\ &= -0.32528\,x^2 + 1.08687\,x \end{aligned}$$

(c) Zwei Geradenstücke, beziehungsweise eine Parabel.

Die interpolierten Werte können mit den „richtigen“ Werten verglichen werden, da die Zahlen mit Hilfe der Funktion $\tanh x$ konstruiert wurden. Es gilt $\tanh 0.25 \approx 0.244919$.

Solution pour problème 3–43 :

(a) Verwende lineare Interpolation, d.h ein Geradenstück, und die Werte $f(0) = 1$ und $f(0.5) = 1.1276$.

$$f(0.4) \quad \approx \quad f(0) + 0.4 \cdot \frac{f(0.5) - f(0)}{0.5} = 0.2 \cdot f(0) + 0.8 \cdot f(0.5) = 1.1021$$

(b) Der Ansatz $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} 0\,a & + & 0\,b & + & c & = & f(0) & = & 1 \\ \frac{1}{4}\,a & + & \frac{1}{2}\,b & + & c & = & f(\frac{1}{2}) & = & 1.1276 \\ a & + & b & + & c & = & f(1) & = & 1.543081 \end{array}$$

Dieses System von linearen Gleichungen lässt sich mit dem Taschenrechner lösen. Man kann auch aus der ersten Gleichung ablesen, dass $c = 1$. Dann kann man das doppelte der zweiten Gleichung von der dritten subtrahieren und erhält

$$\frac{1}{2}\,a - 1 = 1.543081 - 2 \cdot 1.1276 \quad \text{oder} \quad a \approx 0.575657$$

Aus der dritten Gleichung folgt dann

$$b = 1.543081 - a - 1 \approx -0.032577$$

Nun haben wir

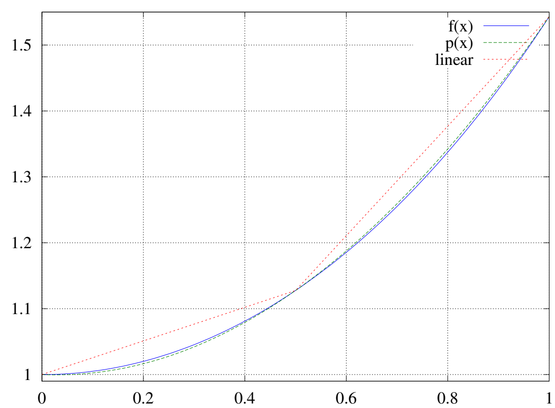
$$f(x) = 0.575657 \cdot x^2 - 0.032577 \cdot x + 1$$

Die Aufgabe könnte auch durch eine Interpolation gemäss der Methode von Lagrange gelöst werden.

$$p(x) = \frac{(x-0.5)\,(x-1)}{(0-0.5)\,(0-1)}\,f(0) + \frac{x\,(x-1)}{0.5\,(0.5-1)}\,f(0.5) + \frac{x\,(x-0.5)}{1\,(1-0.5)}\,f(1)$$

(c) Verwende das Resultat der vorangehenden Aufgabe $p(0.4) = 1.07907$. Dieser Wert ist sehr nahe bei $f(0.4) = 1.0811$.

Für diese Aufgabe wurde die Funktion $f(x) = \cosh(x)$ verwendet. Die untenstehende Figur zeigt, dass die Approximation durch eine Parabel erheblich besser ist als die Approximation durch zwei Geradenstücke.



Solution pour problème 3–45 : Verwende Lagrange–Interpolation und die Werte $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

(a) Wegen $\sin 0 = 0$ sind nur zwei Beiträge zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(x-0)\,(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{4}-0)\,(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})} + 1\,\frac{(x-0)\,(x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{2}-0)\,(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{x\cdot(x-\frac{\pi}{2})}{\frac{-\pi^2}{16}} + 1\,\frac{x\cdot(x-\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi^2}{8}} \\ &= \frac{8\,x}{\pi^2}\left(-\sqrt{2}\,(x-\frac{\pi}{2}) + (x-\frac{\pi}{4})\right) \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \sin(\tfrac{\pi}{3}) &= \frac{\sqrt{3}}{2} &\approx 0.866025 \\ p(\tfrac{\pi}{3}) &= \frac{2+4\sqrt{2}}{9} &\approx 0.850762 \end{aligned}$$

Der Unterschied ist klein ≈ 0.016 .

(c) Die Gerade geht durch den Ursprung $(0\,,\,0)$ und den Punkt $(\frac{\pi}{2}\,,\,1)$ und somit ist die Geradengleichung gegeben durch $g(x) = \frac{2}{\pi}\,x$. Es gilt $g(\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$. Dieser Wert ist erheblich weiter von $\sin\frac{\pi}{3}$ entfernt als der obige.

Man kann durchaus auch auf die Idee kommen die Punkte $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{\pi}{2}$ zu verwenden. Auch hier sind zwei Punkte auf der Geraden $y = g(x)$ sind bekannt. Somit kann die Geradengleichung angeschrieben werden

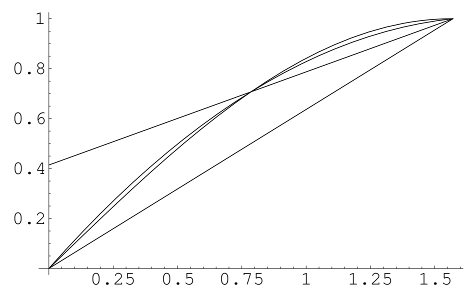
$$g(x) = 1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}}\,(x - \frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\,(x - \frac{\pi}{2})$$

Es gilt

$$\begin{array}{rcccl} \sin(\frac{\pi}{3}) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} & \approx & 0.866025 \\ g(\frac{\pi}{3}) & = & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \approx & 0.804738 \end{array}$$

Der Unterschied ist auch hier erheblich grösser, nämlich ≈ 0.042 .

Die untenstehende Graphik zeigt alle vier Funktionen in Intervall $0 \leq x \leq \pi/2$. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die Parabel sehr gut an die Kurve anschmiegt, die Gerade hingegen erheblich abweicht.



Solution pour problème 3–46 :

$$p\,(x) = \frac{-1}{8}\,x^4 + \frac{5}{4}\,x^3 - \frac{31}{8}\,x^2 + \frac{7}{4}\,x + 31$$

Dieses Polynom weicht beim sechsten Messpunkt erheblich ab $p\,(6) = 10$.
Quelle: [MeybVach90, p. 67]

Solution pour problème 3–47 : Die Funktion hat die horizontale Asymptote 2, Polstellen bei -1 (doppelt) und $+2$ (einfach). Eine einfache mögliche Lösung ist somit

$$f(x) = 2 + \frac{A \cdot x + B}{(x+1)^2\,(x-2)}$$

- Wegen $f(1) = 2$ muss der Zähler eine Nullstelle haben bei $x = 1$.
- Da die beiden Zweige des Pols bei $x = -1$ nach oben gehen muss der Zähler bei $x = -1$ negativ sein.
$$x \approx -1 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \approx 2 + \frac{A \cdot (-1) + B}{(x+1)^2\,(-3)}$$
- Da der rechte Zweig des Pols bei $x = +2$ nach oben gehen muss der Zähler bei $x = +2$ positiv sein.
$$x \approx +2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \approx 2 + \frac{A \cdot 2 + B}{(3)^2\,(x-2)}$$

Eine einfache Lösung ist gegeben durch

$$f(x) \approx 2 + \frac{x - 1}{(3)^2\,(x-2)}$$

Solution pour problème 3–48 : Eine mögliche Lösung ist

$$f(x) = x - 3 + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 10}{x^2 - 4x + 4}$$

Solution pour problème 3–49 :

- Die Funktion ist gerade.
- Der parabelförmige Anteil ist gegeben durch $2 - x^2$.
- Die Polstelle bei $x = 0$ ist von gerader Ordnung und der Zähler bei $x = 0$ muss negativ sein.

Somit haben wir

$$f(x) = 2 - x^2 - \frac{c}{x^2}$$

und aus der Bedingung $f(\pm 0.1) = 0.99$ erhalten wir

$$0.99 = 2 - 0.01 - \frac{c}{0.01} = 1.99 - 100\,c$$

und somit $c = \frac{1}{100} = 0.01$. Damit ist die einfachste Funktion

$$f(x) = 2 - x^2 - \frac{0.01}{x^2}$$

Solution pour problème 3–50 :

(a) $x = 2$ ist auch eine Nullstelle des Nenners und somit kann der Faktor $(x-2)$ gekürzt werden. Mittels Hornerschema erhalten wir

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -2 & 4 & -24 \\ x_0 = +2 & & +6 & +2 & +8 & +24 \\ \hline & 1 & +3 & +4 & +12 & 0 \end{array}$$

und somit

$$h(x) = \frac{x^4 + x^3 - 2\,x^2 + 4\,x - 24}{(x+7)\,(x-2)} = \frac{x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 12}{x+7}$$

Um durch den linearen Faktor $(x+7)$ zu teilen kann das Schema von Horner verwendet werden.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 4 & 12 \\ x_0 = -7 & & -7 & 28 & -224 \\ \hline & 1 & -4 & 32 & -212 \end{array}$$

und somit

$$h(x) = \frac{x^4 + x^3 - 2\,x^2 + 4\,x - 24}{(x+7)\,(x-2)} = \frac{x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 12}{x+7} = x^2 - 4\,x + 32 + \frac{-212}{x+7}$$

(b) In der Graphik sind die folgenden Facts abzulesen:

- Asymptote $-x/3$
- Polstelle gerader Ordnung bei $x = -2$, nach unten

- Polstelle ungerader Ordnung bei $x = +3$
- Nullstelle bei $x = 0$

Somit kann abgelesen werden, dass die Funktion die Form

$$f(x) = \frac{-1}{3}\,x + \frac{H(x)}{(x+2)^2(x-3)}$$

haben muss, wobei der Nenner $H(x)$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich 2 sein muss. Aufgrund des Graphen von $f(x)$ gilt

- $H(0) = 0$
- $H(-2) > 0$ (Pol nach unten) und $H(3) < 0$

Die einfachste Funktion mit diesen Eigenschaften ist $H(x) = -c\,x$, wobei $c > 0$.

$$f(x) = \frac{-1}{3}\,x - \frac{c\,x}{(x+2)^2(x-3)}$$

Solution pour problème 3–51 : Die Funktion hat die Asymptote $y = x/2$, Polstellen bei ± 3 und ist ungerade. Eine einfache mögliche Lösung ist somit

$$f\,(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{(x-3)\,(x+3)} = \frac{x\,(x^2-9) + 2\,x}{2\,(x^2-9)}$$

Der Definitionsbereich dieser Funktion ist $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$ und das Bild ist $\mathbb{R}$.

Solution pour problème 3–52 :

(a) Die Funktion hat die Asymptote $-x$, Polstellen bei -1 (einfach) und $+2$ (doppelt). Eine einfache mögliche Lösung ist somit

$$f\,(x) = -x + \frac{A\cdot x + B}{(x+1)\,(x-2)^2}$$

Wegen $f(0) = f(1) = 0$ muss gelten

$$\begin{aligned} 0 &= -0 + \frac{A\cdot 0 + B}{(0+1)\,(0-2)^2} = \frac{B}{4} \\ 0 &= -1 + \frac{A\cdot 1 + B}{(1+1)\,(1-2)^2} = -1 + \frac{A+B}{2} \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $B = 0$ und mit Hilfe der zweiten Gleichung findet man $A = 2$. Somit ist die Lösung

$$f\,(x) = -x + \frac{2\,x}{(x+1)\,(x-2)^2}$$

Dies ist nicht die einzig mögliche Lösung.

(b) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{-1\,,\,+2\}$, das Bild ist $\mathbb{R}$.

Solution pour problème 3–53 :

(a) Die Funktion hat die Asymptote $y = 1$, Polstellen bei ± 2 (je doppelt) und ist gerade. Eine einfache mögliche Lösung ist somit

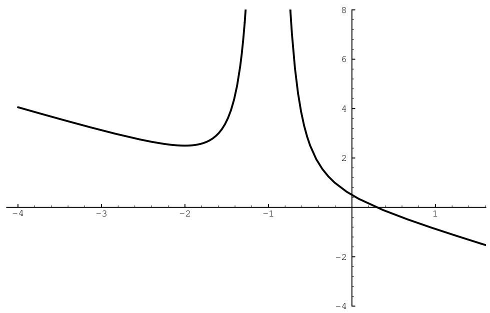
$$f\,(x) = 1 + \frac{A}{(x-2)^2\,(x+2)^2} = 1 + \frac{16}{(x-2)^2\,(x+2)^2}$$

Der Wert von $A = 16$ kann aus der Bedingung $f(0) = 2$ bestimmt werden.

(b) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, das Bild ist $(1\,,\,\infty)$.

Solution pour problème 3–54 : Es kann eine gebrochen rationale Funktion gewählt werden mit Asymptote $-x$ und einer doppelten Polstelle bei $x = -1$

$$f(x) = -x + \frac{0.5}{(x+1)^2}$$



Solution pour problème 3–55 :

$A \leftrightarrow 8 \quad , \quad B \leftrightarrow 3 \quad , \quad C \leftrightarrow 4 \quad , \quad D \leftrightarrow 6 \quad , \quad E \leftrightarrow 7 \quad , \quad F \leftrightarrow 2$

Solution pour problème 3–56 : Zu beachten sind das asymtotische Verhalten und die Lage und Typ der Polstellen.

$A \leftrightarrow 1 \quad , \quad B \leftrightarrow 3 \quad , \quad C \leftrightarrow 4 \quad , \quad D \leftrightarrow 6 \quad , \quad E \leftrightarrow 7 \quad , \quad F \leftrightarrow 2$

3.9 Récapitulation

Après ce chapitre on doit

- trouver les zéros d'un polynôme de degré 2
- pour les problèmes simples trouver les zéros d'un polynôme de degré ≥ 3.
- être capable de dessiner les grpahes des polynômes.
- savoir diviser des polynômes par un facteur linéaire.
- maîtriser les schémas de Horner.
- savoir appliquer la méthode d'interpolation.
- savoir utiliser les pôles, zéros et asymptotes pour dessiner les graphes des fonction rationnels. démonstration.
- être capable d'utiliser la calculatrice pour travailler avec des polynômes.

Chapitre 4

Fonctions trigonométriques

4.1 Angles en radian

Dans la vie quotidienne on utilise souvent degrés pour mesurer des angles. Un angle droit correspond à $90°$. et un tour complet à $360°$. Pour les applications scientifiques et techniques il vaut mieux d'utiliser des **radians**.

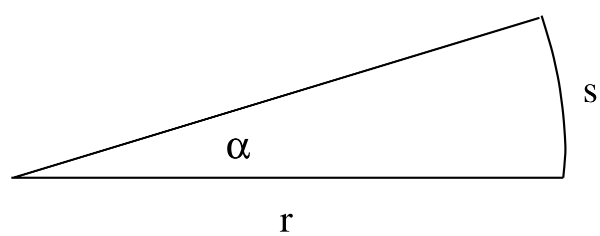


Figure 4.1: angles en radians

On a

$$\begin{aligned} s &= \text{longueur de l'arc} \\ r &= \text{rayon} \\ \alpha &= \text{angle} \end{aligned}$$

Le radian est choisit tel que l'équation

$$\boxed{s = r \cdot \alpha}$$

est correcte. Cette relation fondamentalle définit la façon de mesurer en radian. Pour un cercle complet la circonférence est $s = r \cdot 2\pi$. Donc on trouve $360° = 2\pi$. Pour changer de degré en radian et vice versa on utilise

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^\circ \, \tfrac{\pi}{180^\circ} \\ \alpha^\circ &= \alpha \, \tfrac{180^\circ}{\pi} \end{aligned}$$

Observer que les angles en degré sont toujours donné avec le signe de degré. **Si un angle est donné par un nombre (sans unité) il s'agit d'un angle en radian**. Donc an angle de 90 et un angle de $90°$ sont différentes.

4.2 Définition des fonctions circulaires

L'interpretation la plus simple des fonctions $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ est donné par u triangle droit, avec une hypoténuse de longueur 1, montré en figure 4.2. Cette figure rend une explication pour des fonctions trigonométriques pour des angles entre 0 et $\pi/2$. Mais on a besoin des fonctions circulaires pour des agles arbitraires, donc nous avons besion d'une autre interpretation.

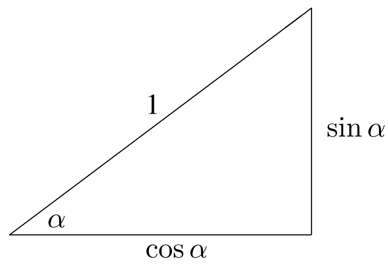


Figure 4.2: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ dans un triangle droit

Les fonction trigonométriques sont aussi dit des **fonction circulaires**. Ce nom est justifié par une interprétation au cercle d'unité, voire figure 4.3.

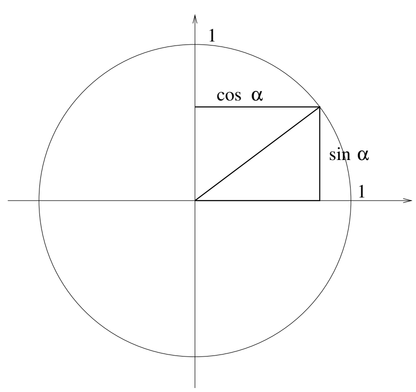


Figure 4.3: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ dans un cercle d'unité

En figure 4.3 on peut lire les signes des fonctions sin et cos dans les quatres quadrants.

quadrant	angle α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
premier	$0 < \alpha < \pi/2$	+	+
deuxième	$\pi/2 < \alpha < \pi$	+	-
troisième	$\pi < \alpha < 3\pi/2$	-	-
quatrième	$3\pi/2 < \alpha < 2\pi$	-	+

De la même façon on verifie les équations

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \pi) &= -\sin(\alpha) \\
\cos(\alpha + \pi) &= -\cos(\alpha) \\
\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\
\cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\
\sin(\alpha + 2\pi) &= \sin(\alpha) \\
\cos(\alpha + 2\pi) &= \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

veut dire $\sin\ \alpha$ est une fonction impaire et 2π–périodique. La fonction $\cos\alpha$ est paire et 2π–périodique. Le théorème de Pythagoras[1] rend le résultat

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad .$$

On peut générer un table des valeurs des fonctions.

angle α	en degré	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
0	$0°$	0	1
$\pi/6$	$30°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$45°$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/3$	$60°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	$90°$	1	0

Ça aide a produire les graphes des deux fonctions trigonométriques de base en figures 4.4 et 4.5.

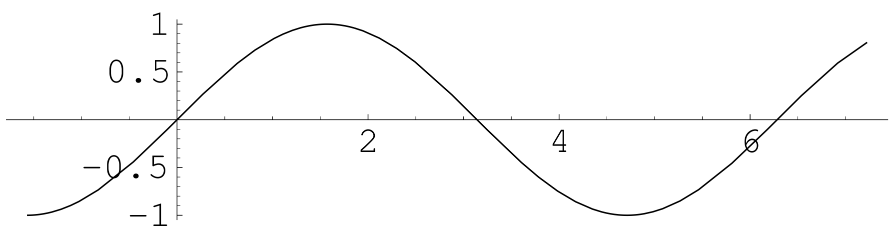


Figure 4.4: graphes de $\sin\alpha$

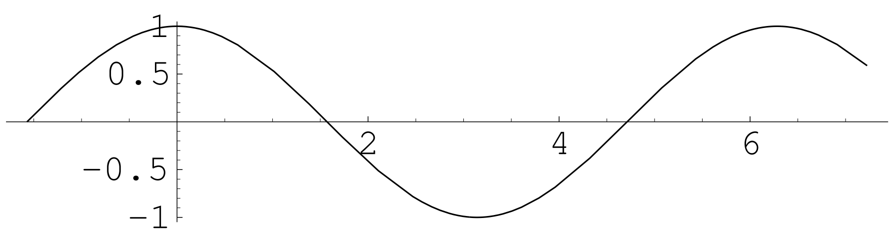


Figure 4.5: graph de $\cos\alpha$

4.3 Propriétés des fonction trigonométriques

Examiner les graphes des fonctions $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ on peut lire d'autres propriétés, par exemple

$$\sin(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha \quad \text{et} \quad \cos(\alpha + \pi/2) = -\sin\alpha$$

Un bon formulaire contient des listes longes des propriétés similaires, entre autres les théorèmes d'additions.

4.3.1 Preuve d'un théorème d'addition

Essayons de vérifier l'équation $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ pour des valeurs positives de x et y avex $x + y \leq \pi/2$. Examiner figure 4.6.

[1] Pythagoras, environ. 580–500 avant Jésus–Christ, mathématicien grecque

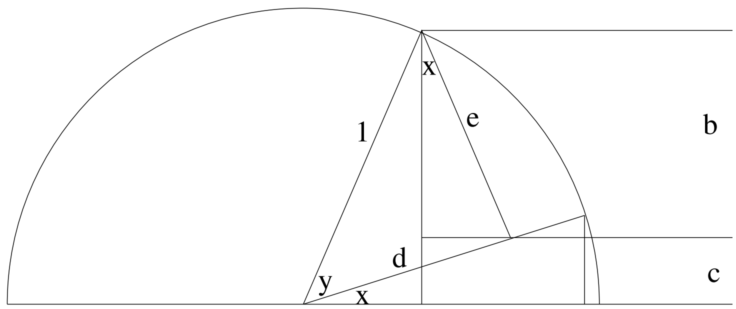


Figure 4.6: théorème d'addition

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \tfrac{c}{d}\\
\cos(x) &= \tfrac{b}{e}\\
\sin(y) &= e\\
\cos(y) &= d
\end{aligned}$$

On trouve que

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= b + c = \tfrac{b}{e}\,e + \tfrac{c}{d}\,d\\
&= \sin x \cos y + \cos x \sin y
\end{aligned}$$

Ce premier résultat et le propriétés des fonctions trigonométriques sont à combiner pour trouver d'autres identités. Trouver des listes énormes des tels formules dans des bons formulaires.

4–1 Résultat :

$$\begin{array}{lrl}
(a) & \sin(x-y) & = \sin(x+(-y))\\
 & & = \sin x \cos(-y) + \cos(x)\sin(-y)\\
 & & = \sin x \cos(y) - \cos(x)\sin(y)\\
(b) & \sin(2x) & = 2\sin(x)\cos(x)\\
(c) & \cos(x+y) & = \sin(x+y+\pi/2)\\
 & & = \sin(x)\cos(y+\pi/2) + \cos(x)\sin(y+\pi/2)\\
 & & = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\
(d) & \cos(x-y) & = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\\
(e) & \cos(2\,x) & = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{array}$$

4–2 Résultat : *Pour des valeurs arbitraires de $x, y \in \mathbb{R}$ on a*

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\ \sin\frac{x+y}{2}\ \cos\frac{x-y}{2}$$

Démonstration : Cette preuve se base sur une application des théorèmes d'addition.

$$\begin{array}{rclcl}
\sin(x) & = & \sin(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}) & = & \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\
\sin(y) & = & \sin(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}) & = & \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}
\end{array}$$

L'addition des deux équations rend le résultat désiré. □

4–3 Résultat : *Si on choisit le signe „correcte“ on a*

$$\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\, x}{2}}$$

Démonstration : La proposition est équivalente à

$$2\, \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos\, x$$

Mettons $\alpha = \frac{x}{2}$ et utiliser la formule pour les doubles angles pour $\cos{(2\alpha)}$ on arrive à

$$1 - \cos\, x = 1 - \cos(2\alpha) = 1 - 1 + 2\sin^2\alpha = 2\, \sin^2 \frac{x}{2}$$

et donc la proposition est vérifié. □

4.4 La fonction tangent

La fonction $\tan x$ est définit par l'équation

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad .$$

Donc domaine de définition et champ sont donnés. La fonction est définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, sauf les zéros de $\cos x$, veut–dire $x \neq k\pi + \pi/2$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Le graphe de $\tan x$ peut être généré en utilisant les graphes de $\sin x$ et $\cos x$.

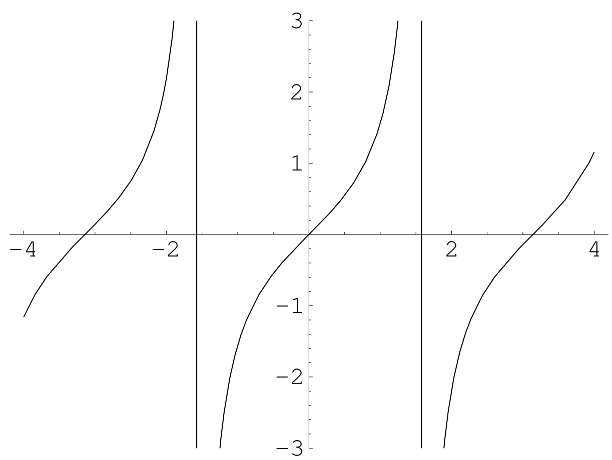


Figure 4.7: graphe de la fonction $\tan x$

Les propriétés de cette fonction se base sur les propriétés des fonctions sin et cos. Trouver des listes des formules dans un formulaire.

4.5 Calculs des éléments des triangles

Pour les triangles généraux on connaît les règles de sin et cos.

Soit $\alpha = \angle CAB$ et $\beta = \angle ABC$, puis on utilise

$$\sin\alpha = \frac{h}{b} \quad , \quad \sin\beta = \frac{h}{a} \qquad .$$

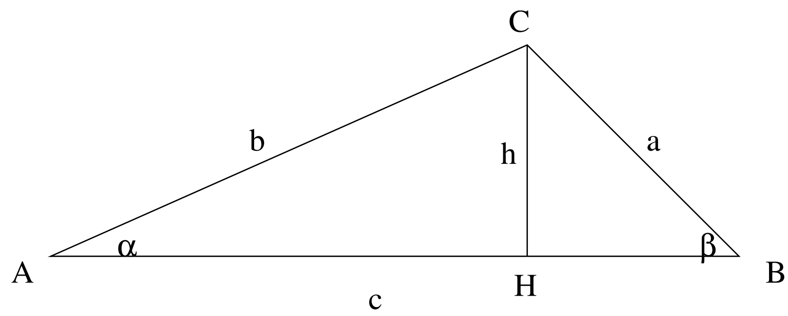


Figure 4.8: règle du sinus

Donc on trouve

$$h = b\ \sin\alpha = a\ \sin\beta$$

et on a le résultat désiré.

4–4 Théorème : *Théorème du sinus*
Dans un triangle quelconque on a

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

En utilisant le théorème de Pythagoras on arrive à

$$a^2 = b^2\sin^2\alpha + (c - b\ \cos\alpha)^2 \qquad .$$

Donc on trouve

$$a^2 = b^2\ (1-\cos^2\alpha) + (c^2 - 2cb\ \cos\alpha + b^2\cos^2\alpha) = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha.$$

4–5 Théorème : *règle du cosinus*
Dans un triangle quelconque on a

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\ \cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma \end{aligned}$$

Les théorèmes de sinus et cosinus permet de calculer des largeurs dans des triangles. Examiner les exercises de ce chapitre.

4–6 Exemple : Pour un triangle sont connus les angles α et β et la longueur c entre les deux angles. Le théorème du sinus permet de calculer a et b. ♢

4.6 Fonctions trigonométriques inverses

Pour un angle α on connaît seulement la valeur de $\sin(\alpha)$, mais on cherche la valeur de α. Donc on a besoin de la **fonction inverse** d'une fonction trigonométrique.

La fonction $\sin(x)$ avec domaine de définition $\mathbb{R}$ **n'est pas inversible**. Pour arriver à une fonction inversible il faut examiner une domain de définition plus petite. Dans l'intervalle $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ la fonction $\sin(x)$ est croissont de -1 à 1, et puis pour chaque valuer de $-1 \leq y \leq 1$ il existe un seul $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ avec $\sin(x) = y$.

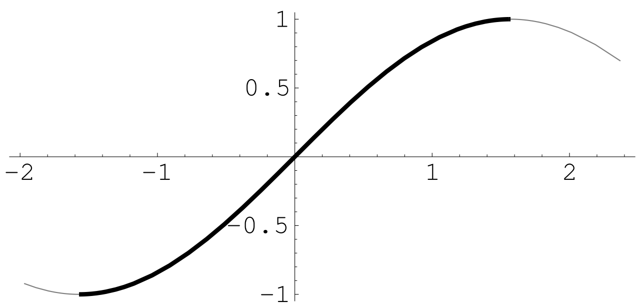


Figure 4.9: $\sin(x)$ avec domaine de définition restreinte

Observer qu'on peut choisir la domaine de définition. Heureusement tout le monde utilise la même notation pour la définition de la fonction **arcsinus**.

$$y = \arcsin(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(y) = x \quad \text{et} \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

Le graphe de cette fonction peut être généré par une réflexion a la droite $x = y$ (45°) du graphe de $y = \sin x$.

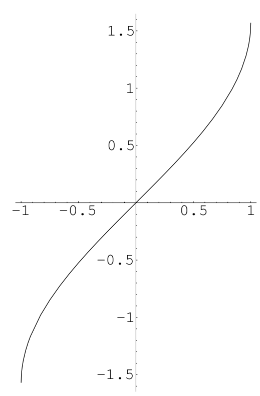


Figure 4.10: graphe de $\arcsin(x)$

Voilà quelques valeurs spécialles de la fonction $\arcsin(x)$.

$$\arcsin(0) = 0 \quad , \quad \arcsin(1) = \pi/2 \quad , \quad \arcsin(-1) = -\pi/2 \quad , \quad \arcsin(1/2) = \pi/6$$

Cette fonction est impaire et strictement croissante.

La fonction $\cos(x)$ avec domaine de définition $0 \leq x \leq \pi$ est strictement monoton et donc inversible. On obtient la fonction **Arcuscosinus** comme fonction inverse. Cette fonction est strictement décroissante, main ne pas pire ou impaire. La graphique montre que $f(x) = \arccos(x) - \pi/2$ est impaire.

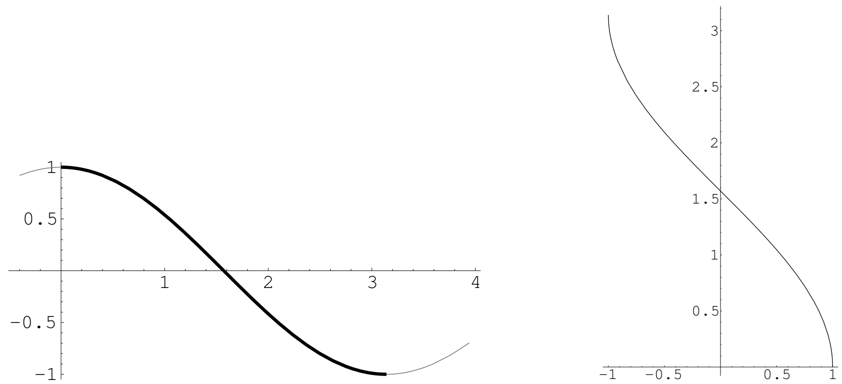


Figure 4.11: graphe de $\cos(x)$ avec domaine de définition restreinte et de $\arccos(x)$

Avec des observations similaire on applice une restricion sur l'intervalle $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ de la fonction $\tan(x)$ pour arriver à la fonction inverse **Arctangent**. Parce-que la fonction $\tan(x)$ est croissante et impaire la fonction inverse $\arctan(x)$ a les mêmes propriétés.

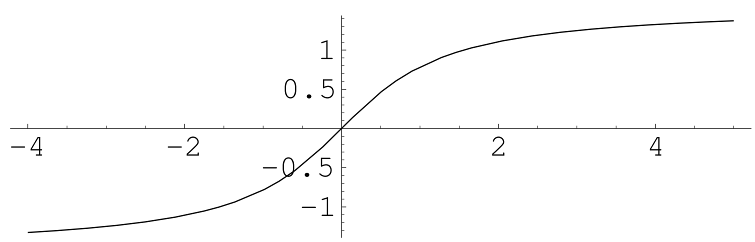


Figure 4.12: graphe de $\arctan(x)$

Trouver les résultat ci–dessus sur des fonctions inverses des fonction trigonométriques en table 4.1.

fonction	domaine de définition	image	symétrie	monotonie
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	impaire	
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	paire	
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$	$\mathbb{R}$	impaire	
$\arcsin(x)$	$[-1,1]$	$[-\pi/2,\pi/2]$	impaire	croissante
$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$		décroissante
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2,\pi/2)$	impaire	croissante

Tableau 4.1: propriétés des fonctions inverse trigonométriques

Notation : Pour les fonctions trigonoétriques inverse on utilise la notation

$$\begin{aligned}
\arcsin(x) &= \sin^{-1} x \\
\arccos(x) &= \cos^{-1} x \\
\arctan(x) &= \tan^{-1} x
\end{aligned}$$

Il y a un petit probléme de notations.

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= (\sin x)^2 \\
\sin^5 x &= (\sin x)^5 \\
\sin^{-2} x &= \frac{1}{(\sin x)^2} \\
\sin^{-1} x &\neq \frac{1}{\sin x} \\
\sin^{-1} x &= \arcsin x \\
\sin^k x &= (\sin x)^k \quad \text{pout tout} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}
\end{aligned}$$

4.7 Équations trigonométriques

Les fonctions inverses sont nécessaire pour résoudre des équations avec des fonctions trigonométriques. Malheureusement ça ne suffit pas, illustré par l'exemple ci–dessous.

4–7 Exemple : Les deus questions

(a) Calculer $x = \arcsin(1/2)$

(b) Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ avec $\sin(x) = 1/2$

ont des réponses différentes.

(a) $x = \pi/6$

(b) $x = \pi/6 + 2k\pi$ et $x = \pi - \pi/6 + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$\diamondsuit$

Ce problème simple montre qu'il faut absolument tenir compte de la domaine de définition pour résoudre des équations trigonométriques. Il est bien possible d'obtenir multiples solutions. Regardons quelques exemples.

4–8 Exemple : Trouver toutes le solution de l'équation

$$\sin(x)\cos(x) = 0 \qquad .$$

Solution: L'équation est résolut si $\sin x = 0$ ou $\cos x = 0$, donc

$$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots \quad \text{et} \quad x = \pi/2, \pi/2 \pm \pi, \pi/2 \pm 2\pi, \ldots$$

L'ensemble des solutions est

$$x = k\,\pi/2 \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{Z} \qquad .$$

Vérifier cette solution à l'aide de égalité

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

$\diamondsuit$

4–9 Exemple : Trouver toutes les solutions de $\sin^2 x + \sin x = 2$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Solution: Avec la nouvelle variable $z = \sin x$ on arrive à

$$z^2 + z - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad (z-1)\,(z+2) = 0$$

L'équation $z = \sin x = -2$ n'a pas de solution (réelles) et il reste les solutions de $\sin(x) = 1$. Donc on trouve une seule solution $x = \pi/2$ dans l'intervalle en question. ♢

4–10 Exemple : Trouver toutes les solutions de

$$\frac{1}{\sin x} + \cot x = \sqrt{3}$$

dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$.

Solution: Réécrire l'équation en terme de $\sin x$ et $\cos x$.

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \sqrt{3}$$

ou

$$\cos x = \sqrt{3}\ \sin x - 1 \qquad .$$

Simplifier cette expression

$$1 - \sin^2 x = 3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x + 1$$

Puis on obtient une expressions plus simple

$$4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x = 4\sin x\ (\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$$

avec les solutions

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2\pi}{3}$$

Les zéros des $\sin x$ ne sont pas acceptées (pourquoi?). On a calculer le carrée des expression et ce n'est pas une transformation d'équivalence et donc if **faut** vérifier les solutions. On voit que seulement la solution $x = \pi/3$ reste comme solution du problème originale. ♢

4.8 Oscillations harmonique

4–11 Définition : Une **oscillation harmonique** est un procès, dont la description peut être donné par une fonction du paramètre t (temps) de la forme

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A est dit **amplitude**, $\omega t + \varphi$ la **phase**, φ la **déphasage** (ou décalage de phase) et ω la **fréquence angulaire** de l'oscillation. La **période** est $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et la **fréquence** $f = \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

La tension et le courant d'une prise électrique standard sont des exemples des oscillations harmoniques. Beaucoup des oscillation mécanique et optique sont harmonique, ou on peut les simplifier dans cette forme. Les applications souvent utilise des **superpositions** des oscillation harmonique, par exemple la transmission des signales de radio et télévision.

Le traitement mathématiques des oscillations harmonique est simplifié par des nombres complexes et la fonction exponentielle complexe. Ici on utilise „que“ des fonctions et arguments réelles.

4–12 Résultat : *L'équation*

$$A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

est correcte pour tout $t \in \mathbb{R}$ *si*

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 \quad \textit{et} \quad \tan\varphi = -\frac{A_2}{A_1} \quad .$$

Ce résultat montre que l'addition des signaux $\sin$ et $\cos$ avec les mêmes fréquences rend un signal du même type, avec une déphasage.

Démonstration : Le théorème d'addition pour $\cos$ rend

$$\begin{aligned} A\cos(\omega t + \varphi) &= A\,(\cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi) \\ &= A\cos\varphi\cos(\omega t) - A\sin\varphi\sin(\omega t) \\ &= A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Verifier que cette équation est correct pour tout $t \in \mathbb{R}$ si on a

$$\begin{aligned} A\cos\varphi &= A_1 \\ A\sin\varphi &= -A_2 \end{aligned}$$

Calculer le carrée et puis une addition, resp. une division, implique

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 \quad \text{et} \quad \tan\varphi = -\frac{A_2}{A_1}$$

□

4.8.1 Superposition de deux signaux avec fréquences identiques

Examiner deux signaux avec les mêmes fréquences, mais des amplitudes différentes.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ f_2(t) &= A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ f(t) &= f_1(t) + f_2(t) \end{aligned}$$

Il faut montrer que $f(t)$ est de la forme

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Avec les théorèmes d'addition on arrive à

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A_1\,(\cos(\omega t)\cos\varphi_1 - \sin(\omega t)\sin\varphi_1) \\ f_2(t) &= A_2\,(\cos(\omega t)\cos\varphi_2 - \sin(\omega t)\sin\varphi_2) \\ f(t) &= A\,(\cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi) \end{aligned}$$

Donc on obtient le résultat désiré si

$$\begin{aligned} A\cos\varphi &= A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 &= a \\ A\sin\varphi &= A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 &= b \end{aligned}$$

L'information sur $f_1(t)$ et $f_2(t)$ détermine lesvaleurs de a et b. L'addition des carrées (resp. une division) rend

$$A^2 = a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{b}{a} \quad .$$

Comme conclusion on ose dire que la superposition de deux signaux harmonique aves les mêmes fréquences mène a un nouveau signal. La fréquence ne change pas, mais l'amplitude et la déphasage sont a calculer.

4.8.2 Superposition des signaux avec des fréquences différentes

La situation change drastiquement si les fréquences sont différentes. Examinons la situation

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\ f_2(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ f(t) &= f_1(t) + f_2(t) \end{aligned}$$

avec $\omega_1 > \omega_2 > 0$. La formule

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

doit être applique deux fois. D'abord avec $x = \omega_1 t$ et $y = \omega_2 t + \varphi$, puis avec $y = \omega_1 t$ et $x = \omega_2 t + \varphi$. On arrive à

$$\begin{aligned} f(t) = \; & (A_1 + A_2)\ \cos\left(\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}\, t + \tfrac{\varphi}{2}\right)\ \cos\left(\tfrac{\omega_1-\omega_2}{2}\, t - \tfrac{\varphi}{2}\right) - \\ & (A_1 - A_2)\ \sin\left(\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}\, t + \tfrac{\varphi}{2}\right)\ \sin\left(\tfrac{\omega_1-\omega_2}{2}\, t - \tfrac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

Cette formule s'applique dans la situation général, mais elle n'est pas très lisible. Pour simplifier on examine la situation spécialle $A_1 = A_2$ et $\varphi = 0$. Avec

$\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$	moyenne des deux fréquences
$\bar\omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$	moitié de la différence des deux fréquences

on obtien

$$f(t) = 2\, A_1\ \cos(\bar\omega t)\ \cos(\omega t)$$

Si la différence $\bar\omega$ des fréquences est petite la première fonction $\cos(\bar\omega t)$ correspond à une oscillation lente et la deuxième à une oscillation rapide.

La figure 4.13 montre le graphe de la fonction

$$f(t) = \cos(10t) + \cos(11t)$$

Il s'agit d'une oscillation rapide avec fréquence angulaire 10.5 pour laquelle l'amplitude varie avec une fréquence angulaire de 0.5.

Si la condition $A_1 = A_2$ n'est pas satisfait, mais les amplitudes sont comparable on obtient des résultats similaires.

La figure 4.14 montre le graphe de la fonction

$$f(t) = \cos(10t) + 1.3\cos(11t + 2)$$

Il s'agit d'une oscillation rapide avec fréquence angulaire ≈ 10.5, dont l'amplitude varie avec une fréquence angulaire ≈ 0.5.

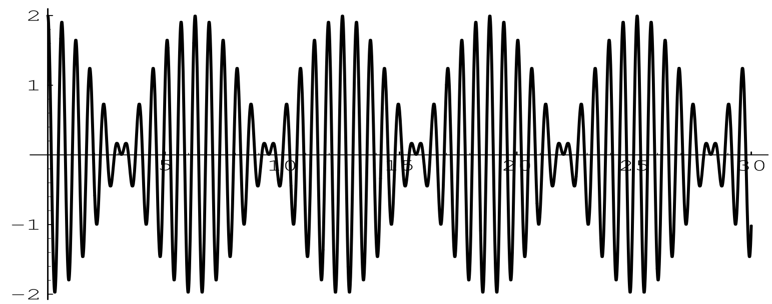


Figure 4.13: battement

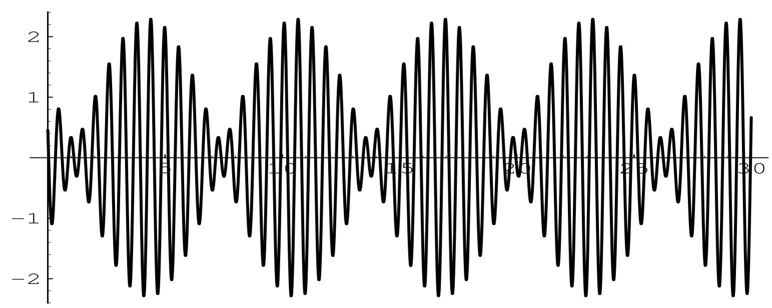


Figure 4.14: battement approximative

4.8.3 Amplificateur Lock In

Pour un signal $u(t)$ on veut examiner la contribution avec une fréquence connue $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Des contributions avec des fréquences différentes et du bruit sont à éliminés. Pour cette tache on peut utilisé un **amplificateurs Lock In**. Appliquer les opérations illustrées en Figure 4.15.

1. Généré un signal de référence $r(t) = V_1 \sin(\omega_1 t)$ avec la fréquence à examiner et une amplitude connue.
2. Multiplier le signal à examiner $u(t)$ avec le signal de référence.
3. Le signal de sortie du multiplicateur passe par un filtre passe-bas. Donc il reste que des contributions avec des fréquences bas.
4. Le signal de sortie $y(t)$ contiens de l'information sur l'amplitude et la phase du signal d'entrée avec cette fréquence.

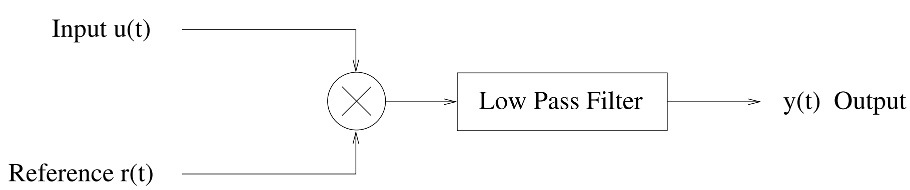


Figure 4.15: amplificateur Lock In

L'analyse se base sur les calculs suivants et utilise une identité trigonométrique.

$$\Phi(t) \quad = \quad r(t) \cdot u(t) = V_1 \sin(\omega_1 t) \cdot V_2 \sin(\omega_2 t + \phi)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{V_1\,V_2}{2}\,\left(\cos((\omega_1-\omega_2)\,t+\phi)-\cos((\omega_1+\omega_2)\,t+\phi)\right) \\ &\xrightarrow{\text{Filter}} \frac{V_1\,V_2}{2}\,\left(\cos((\omega_1-\omega_2)\,t+\phi)\right) \overset{\omega_1=\omega_2}{=} \frac{V_1\,V_2}{2}\,\cos(\phi)=y(t) \end{aligned}$$

Les opérations ci–dessus montre que le filtre passe–bas a un effet énorme sur le signal de sortie.

4.8.4 FM Radio

Le théorème d'addition dit que

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y) \\ \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

et donc

$$2\,\cos(x)\,\cos(y)=\cos(x-y)+\cos(x+y)$$

Avec un changement de notation on arrive à

$$2\,\cos((\omega_0+\omega(t))\,t)\,\cos(\omega_0\,t)=\cos(\omega(t)\,t)+\cos((2\,\omega_0+\omega(t))\,t)$$

Cette identité est un outil essentiel pour transférer des signaux par radio avec FM (frequency modulation). Le tableau 4.2 montre le chemin du signal acoustique.

acoustic signal	$\omega(t)$
modulation	$\downarrow$
	$\cos((\omega_0+\omega(t))\,t)$
sender	$\downarrow$
	radio waves
receiver	$\downarrow$
	$2\,\cos((\omega_0+\omega(t))\,t)\cdot\cos(\omega_0 t)$
trigonometry	$=$
	$\cos(\omega(t)\,t)+\cos((2\,\omega_0+\omega(t))\,t)$
lowpass filter	$\downarrow$
	$\cos(\omega(t)\,t)$
demodulator	$\downarrow$
acoustic signal	$\omega(t)$

Tableau 4.2: FM radio transmission

4.9 Une régulation par une force centrifuge

Pour de machines à vapeur on a utilisé une construction simple pour contrôler la nombre des tours par minute.

Pour les deux point de masse m on a une force de gravitation de $G = m\,g$ vers le bas et une force centrifuge de $F = m\,\omega^2\,r$ vers l'extérieur. Pour que le bras ne change pas l'angle il faut que la direction de la force totale coïncide avec la direction bu bras. De la trigonométrie simple mène à

$$\frac{mg}{\cos\alpha}=\frac{m\omega^2 r}{\sin\alpha}$$

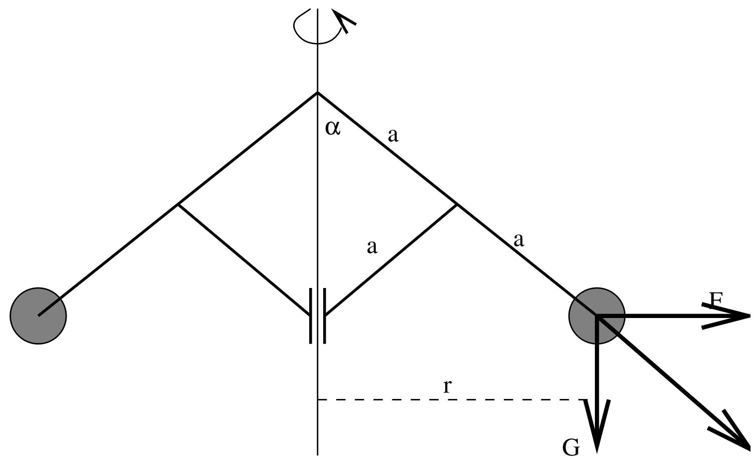


Figure 4.16: une régulation par force centrifuge

A cause de $r = 2a\sin\alpha$ on obtient

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{m\omega^2 2a\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

ou

$$\cos\alpha = \frac{g}{2a\omega^2} \qquad .$$

Examiner la vitesse angulaire ω comme fonction de l'angle α. Mettons

$$\omega_0^2 = \frac{g}{2a}$$

pour voir que si $\omega < \omega_0$ il n'y as pas de solution pour l'angle α. Si le système tourne trop lentement, les bars ne vont pas se lever et reste dans une position verticale ($\alpha = 0$). Si $\omega > \omega_0$ le système va se stabiliser à un angle α. Si la vitesse ω devient très grande puis on trouve α proche à $\pi/2$, veut dire une position horizontale. Ces situations sont illustrés en figure 4.17.

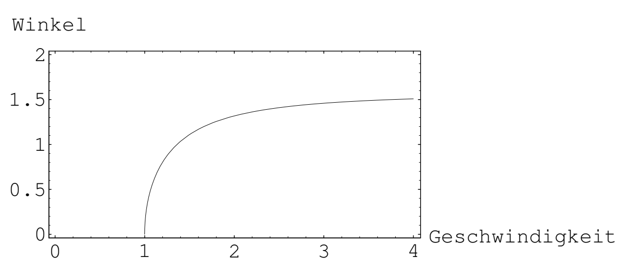


Figure 4.17: angle de déflexion pour ne régulation par force centrifuge

4.10 Problèmes

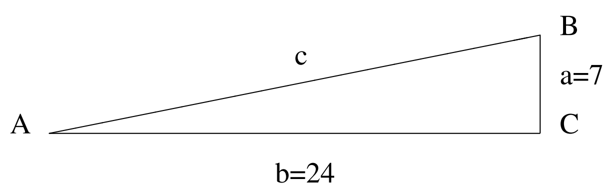
4.10.1 Problèmes élémentaires

• Problème 4–1:
Bestimmen Sie die folgenden Winkel im Bogenmass: $90°$, $60°$, $45°$, $30°$, $1°$, $1'$,$1''$.
Tip: $1° = 60'$ und $1' = 60''$. Bogenminuten und Bogensekunden.

• Problème 4–2:
Finden Sie das Gradmass für die folgenden Winkel

$$\pi, \quad 10, \quad \pi/6 \quad \pi/7, \quad 1, \quad 0.1$$

• Problème 4–3:
Trouver les valeurs des fonctions trigonométriques du triangle ABC ($\gamma = 90°$).



• Problème 4–4:
Pour le triangle ABC on a $\sin\alpha = 1/2$, $\gamma = 90°$ et $c = 5$. Trouver α, β, a, b.

• Problème 4–5:
Pour le triangle ABC on a $\sin\alpha = 0.3$, $\gamma = 90°$ et $c = 5$. Trouver α, β, a, b.

• Problème 4–6:
Résoudre le triangle ABC si $c = 25$, $\alpha = 35°$ et $\beta = 68°$.

• Problème 4–7:
Décider pour les équations suivantes si elles sont justes ou fausses.

équation	juste	faux
$\sin(15) = \sin(165)$		
$\sin(\pi + x) = \sin(-x)$		
$\sin(3\pi/2 + x) = -\cos(x)$		
$\sin(2\pi - x) = \sin(x)$		
$\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$		
$\cos(x + \pi/2) = \sin(x)$		
$\cos(x + y) = \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y)$		
$2\cos^2(x/2) = 1 + \cos(x)$		
$\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$		
$\tan(2x) = \tan(x)/(1 - \tan^2(x))$		

4.10.2 Propriétés des fonctions

• Problème 4–8:
Trouver la liste des propriétés des fonctions trigonométriques dans **votre** formulaire.

• Problème 4–9:
Trouver une graphique qui montre que $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$.

• Problème 4–10:
La figure 4.18 montre un cercle d'unité. Calculer le carré de la distance d avec deux méthodes:

1. comme distance entre les points $(1, 0)$ et $(\cos\alpha, \sin\alpha)$
2. comme distance entre les points $(\cos\beta, \sin\beta)$ et $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$

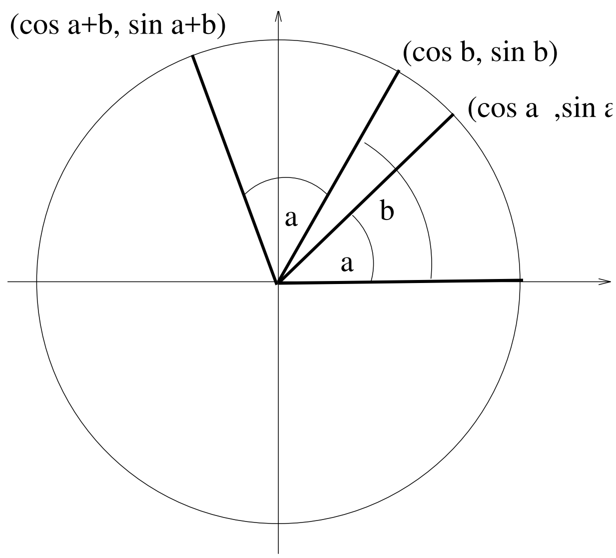


Figure 4.18: preuve du théorème d'addition de cosinus

Puis utiliser les deux résultats pour vérifier le théorème d'addition

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$$

Cette formule est juste pour des angles α et β arbitraire. En remplacent β par $-\beta$ on arrive à

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

C'est le résultat désiré.

• Problème 4–11:
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

richtig?

• Problème 4–12:
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

richtig?

• Problème 4–13:
Calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ d'une façon **exacte** sans calculatrice. Utiliser les valeurs de $\sin$ et $\cos$ pour les angles $30°$, $45°$ ou $60°$.

• Problème 4–14:
Trouver une formule pour $\sin\left(x/2\right)$ et vérifier.

• Problème 4–15:
Utiliser les théorèmes d'additions

$$\sin(x+y) = \sin x\, \cos y + \cos x\, \sin y \quad \text{et} \quad \cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y$$

pour

(a) exprimer $\cos(2\,x)$ en terme de $\sin x$

(b) exprimer $\sin(3\,x)$ en terme de $\sin x$

Il est nécessaire de montrer les résultats intermédiaires.

• Problème 4–16:
Vérifier la formule $\sin\left(x+y\right)\sin\left(x-y\right) = \sin^2 x - \sin^2 y$ à l'aide des théorèmes d'additions.

• Problème 4–17:
Utiliser le théorème d'addition des fonctions trigonométrique pour trouver et vérifier les formules suivantes. Il ne suffit pas de copier le résultat d'un formulaire.

(a) Exprimer $\cos(2\,a)$ en terme de $\cos a$ et $\cos^2 a$.

(b) Exprimer $\cos(4\,a)$ en terme de $\cos a$ et $\cos^n a$ ($n = 1, 2, 3, 4$).

• Problème 4–18:
Finde und beweise eine Formel für $\cos\left(x/2\right)$.

• Problème 4–19:
Finde und beweise Additionstheoreme für die Funktion $\tan\left(x\right)$.

• Problème 4–20:
Finde und beweise Doppelwinkelformeln für die Funktion $\tan\left(x\right)$.

• Problème 4–21:
Finde und beweise Formeln für $\sin\left(3x\right)$ und $\cos\left(3x\right)$.

• Problème 4–22:
Finde und beweise eine Formel für $\cos\left(x\right) + \cos\left(y\right)$.

• Problème 4–23:
Die Funktion $\cot\left(x\right)$ (Cotangens) ist definiert durch

$$\cot\left(x\right) = \frac{\cos\left(x\right)}{\sin\left(x\right)} = \frac{1}{\tan\left(x\right)} \qquad .$$

Finden Sie Definitions– und Bildbereich und skizzieren Sie den Graphen.

• Problème 4–24:
Die $\sin$–Funktion ist keine lineare Funktion.

(a) Zeigen Sie mittels einiger Beispiele, dass im allgemeinen $\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\,\alpha + \sin\,\beta$.

(b) Finden Sie einige spezielle Winkel α und β für die gilt $\sin(\alpha+\beta) = \sin\,\alpha + \sin\,\beta$.

• Problème 4–25:
Die cos–Funktion ist keine lineare Funktion.

(a) Zeigen Sie mittels einiger Beispiele, dass im allgemeinen $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\,\alpha + \cos\,\beta$.

(b) Finden Sie einige spezielle Winkel α und β, für die gilt $\cos(\alpha+\beta) = \cos\,\alpha + \cos\,\beta$.

• Problème 4–26:
Trouver les valeurs **exactes** pour toutes les solution de l'équation ci–dessous dans l'intervalle $[-\pi,\ 2\,\pi]$.
Tip: utiliser la fonction arccos et $\sin(x \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos(x)$.

$$-2\,\sin(x) = 2 - \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

• Problème 4–27:
Beantworten Sie die folgenden Fragen.

(a) Für welche Werte von x gilt $\sin(\sin^{-1} x) = x$.

(b) Für welche Werte von x gilt $\cos^{-1}(\cos x) = x$.

(c) Sei $-1 \leq x \leq 1$. Schreiben Sie $\sin(\cos^{-1} x)$ um, so dass keine trigonometrischen Funktionen mehr auftauchen.

(d) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$4\sin^4 x + 4\sin^2 x = 3$$

• Problème 4–28:
La fonction $\cot(x)$ (cotangente) est définit par

$$f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad .$$

(a) Déterminer domaine de définition et l'image de cette fonction

(b) Esquisser le graphe pour $-2 \leq x \leq 7$

(c) Il existe une fonction inverse "naturelle", dit $f^{-1}(x)$. Esquisser le graphe et déterminer $f^{-1}(-2)$

• Problème 4–29:
Examiner la fonction trigonométrique $y = f(x) = \sin x$ avec domaine de définition $[\pi/2\,,\,3\,\pi/2]$.

(a) Trouver l'image de cette fonction.

(b) Déterminer la domaine de définition et l'image de la fonction inverse f^{-1}.

(c) Esquisser le graphe de la fonction inverse f^{-1}.

(d) Calculer $f^{-1}(-0.5)$

• Problème 4–30:
Untersuchen die Funktion $y = f(x) = \sin x$ mit eingeschränktem Definitionsbereich $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$

(a) Bestimmen Sie das Bild dieser Funktion.

(b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Bild der inversen Funktion f^{-1}.

(c) Zeichnen Sie den Graphen der inversen Funktion f^{-1}.

(d) Berechnen Sie $f^{-1}(-0.2)$ (Taschenrechner ist notwendig).

• Problème 4–31:
Soit $f(x) = \cos(x)$ avec domaine de définition $[-\pi, 0]$. Examiner la fonction inverse $f^{-1}(x)$.

1. Dessiner le graphe de $f^{-1}(x)$.
2. Trouver des propriétés de cette fonction.
3. Calculer $f^{-1}(-0.5)$.

• Problème 4–32:
Die **Chebyshev–Polynome**[2] sind gegeben durch die explizite Formel

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Das führt auf

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ &\dots \end{aligned}$$

Zeigen Sie mittels Induktion und Additionstheoremen, dass

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{für} \quad n \geq 1 \qquad .$$

Diese Polynome werden für Approximationen oft eingesetzt.
Achtung: diese Aufgabe ist ziemlich schwierig.

4.10.3 Équations trigonométriques

• Problème 4–33:
Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

• Problème 4–34:
Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\sin(x) = \sin(2x)$$

im Intervall $[0, 2\pi]$.

• Problème 4–35:
Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\cos(2x) = \sin(2x)$$

im Intervall $[0, 2\pi]$.

[2] P. L. Chebyshev (1821–1894), manchmal auch Tschebyschew geschrieben, russischer Mathematiker. Seine Resultate sind vor allem in der Approximationstheorie von Bedeutung.

• Problème 4–36:
Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\cos(x) + \cos(x + \pi/3) - 3/2 = 0$$

im Intervall $[0, 2\pi]$.

• Problème 4–37:
Trouver les valeurs **exactes** pour toutes les solutions de l'équation

$$\cos(2\,x) = 2\sin^2 x$$

dans l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$. Donner les résultats en radian.

• Problème 4–38:

(a) Examiner la fonction $f(x) = \cos(x)$ pour $\pi \leq x \leq 2\,\pi$. Dessiner le graphe de la fonction inverse f^{-1} et calculer $f^{-1}(-1/2)$.

(b) Trouver toutes les solutions (exactes) de $\cos x = \cos(2\,x)$ pour $0 \leq x \leq 2\,\pi$.

4.10.4 Applications

• Problème 4–39:
Examiner la superposition de deux signauz acoustique, avec la mème amplitude. On ecoute un son de 440 Hz à une amplitude maximale de 1. L'amplitude varie, tous les 2 secondes on a un maximun. Trouver les fréquences et amplitudes des signaux originaux.

• Problème 4–40:
Soient A et B deux points sur les rives opposées d'une rivière. Traçons une droite AC de 275 m de longueur de telle sorte que l'angle $\alpha = 125°40'$ et l'angle $\gamma = 48°50'$. Déterminer la longeur de $c = AB$.

• Problème 4–41:
Un bateau qui vogue vers le nord observe une lumière en position $N35°E$. Après qu'il ait franchi 3 km, la lumière est en position $N48°25'E$. Le bateau poursuit sa route dans la même direction.

(a) Trouver la distance la plus petite qui le séparera de la lumière.

(b) Trouver la position de la lumière après que le bateau ait franchi 10 km (départ au point initial).

• Problème 4–42:
A partir de A, un pilote vole 125 km dans la direction $N38°20'O$ et il revient. Par erreur, il vole 125 km dans la direction $S51°40'E$. Quelle distance doit il parcourir et dans quelle direction doit-il voler pour revenir au point A?

• Problème 4–43:
Un bateau qui vogue vers l'est observe une lumière en position $N62°10'E$. Après qu'il ait franchi 2250 m, la lumière est en position $N48°25'E$. Si le bateau poursuit sa route dans la même direction, trouver la plus petite distance qui le séparera de la lumière.

• Problème 4–44:
Un pilote vole dans la direction $N75°E$ avec une vitesse de 200 km/h. Trouver la direction et la vitesse relative à la surface, s'il y a un vent de 40 km/h qui souffle de la direction $S30°E$.

• Problème 4–45:
A un point fixe on voit la base d'un arbre sous un angle de $\alpha = 0.588$ au–dessus de l'horizontale. Si on s'éloigne 10 m plus de l'arbre on voit la base sous un angle de $\beta = 0.380$ et le sommet sous un angle de $\gamma = 0.850$. Trouver la hauteur de l'arbre.

• Problème 4–46:
Vom Nordpol aus wird ein Satellit 5° über dem Horizont gesehen und gleichzeitig vom Äquator aus in exakt nördlicher Richtung 15° über dem Horizont. Wie hoch fliegt der Satellit über der Erdoberfläche? Für den Erdradius kann man mit R ≈ 6370 km rechnen.

• Problème 4–47:
Un bateau bouge sur une droite avec une vitesse de 20 km/h. Pour $t = 0$ le bateau a une distance de 35 km de l'observateur, 30 minutes plus tard il est à une distance de 28 km. Quand est le bateau à une distance de 25 km de l'observateur?

4.10.5 Solutions de quelques problèmes

Solution pour problème 4–6 : $a = 15$, $b = 24$, $\gamma = 77°$

Solution pour problème 4–7 :

équation	juste	faux
$\sin(15) = \sin(165)$		X
$\sin(\pi + x) = \sin(-x)$	X	
$\sin(3\pi/2 + x) = -\cos(x)$	X	
$\sin(2\pi - x) = \sin(x)$		X
$\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$	X	
$\cos(x + \pi/2) = \sin(x)$		X
$\cos(x + y) = \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y)$		X
$2\cos^2(x/2) = 1 + \cos(x)$	X	
$\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$	X	
$\tan(2x) = \tan(x)/(1 - \tan^2(x))$		X

Solution pour problème 4–10 :

1. Der Abstand zwischen den Punkten $(1, 0)$ und $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
d^2 &= (1 - \cos\,\alpha)^2 + \sin^2\,\alpha \\
&= 1 - 2\,\cos\,\alpha + \cos^2\,\alpha + \sin^2\,\alpha \\
&= 2 - 2\,\cos\,\alpha
\end{aligned}$$

2. Der Abstand zwischen den Punkten $(\cos\beta, \sin\beta)$ und $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ ist

$$\begin{aligned}
d^2 &= (\cos(\alpha+\beta) - \cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha+\beta) - \sin(\beta))^2 \\
&= \cos^2(\alpha+\beta) - 2\,\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta) + \cos^2(\beta) \\
&\quad + \sin^2(\alpha+\beta) - 2\,\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta) + \sin^2(\beta) \\
&= 2 - 2\,\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta) - 2\,\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta)
\end{aligned}$$

Da die beiden Ausdrücke gleich sein müssen, gilt

$$\begin{aligned}2-2\,\cos\,\alpha &= 2-2\,\cos\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(\beta\right)-2\,\sin\left(\alpha+\beta\right)\sin\left(\beta\right)\\ \cos\,\alpha &= \cos\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(\beta\right)+\sin\left(\alpha+\beta\right)\sin\left(\beta\right)\end{aligned}$$

Da diese Formel für beliebige Winkel gilt, können wir α durch $\alpha-\beta$ ersetzen (aus $\alpha+\beta$ wird somit α) und erhalten

$$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\left(\alpha\right)\cos\left(\beta\right)+\sin\left(\alpha\right)\sin\left(\beta\right)$$

Ersetzt man nun noch β durch $-\beta$, so ergibt sich das Standardresultat

$$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\left(\alpha\right)\cos\left(\beta\right)-\sin\left(\alpha\right)\sin\left(\beta\right)$$

Solution pour problème 4–13 :

$$\cos\,\frac{5\pi}{12}=\sin\,15^\circ=\sin\frac{30^\circ}{2}=\frac{1}{2}\,\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\,\sqrt{2}}$$

Um die obige Gleichung zu verifizieren kann man die Identität

$$2\,\left(2-\sqrt{3}\right)=3-2\,\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

verwenden.

Solution pour problème 4–15 :

(a)

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x\,\cos y-\sin x\,\sin y\\ \cos(x+x) &= \cos^2 x-\sin^2 x=1-2\,\sin^2 x\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x\,\cos y+\cos x\,\sin y\\ \sin(2\,x) &= 2\,\sin x\,\cos x\\ \sin(2\,x+x) &= \sin(2\,x)\,\cos x+\cos(2\,x)\,\sin x\\ &= 2\,\sin x\,\cos x\,\cos x+(1-2\,\sin^2 x)\,\sin x\\ &= 2\,\sin x\,\cos^2 x+\sin x-2\,\sin^3 x\\ &= 2\,\sin x\,(1-\sin^2 x)+\sin x-2\,\sin^3 x\\ \sin(3\,x) &= 3\,\sin x-4\,\sin^3 x\end{aligned}$$

Solution pour problème 4–17 : Verwende

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\,\cos b-\sin a\,\sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a\,\cos b+\cos a\,\sin b\end{aligned}$$

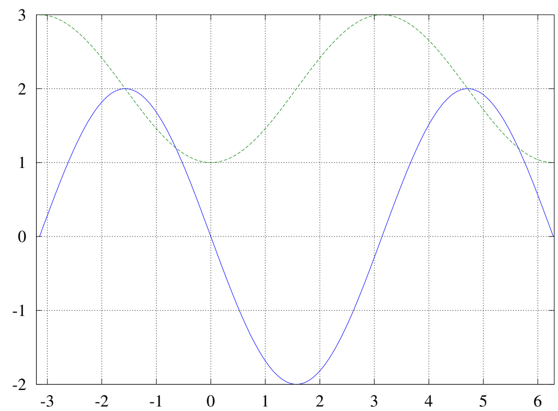
(a)

$$\begin{aligned}\cos(a+a) &= \cos a\,\cos a-\sin a\,\sin a\;=\;\cos^2 a-\sin^2 a\\ &= 2\,\cos^2 a-1\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\cos(2\,a+2\,a) &= 2\,\cos^2(2a)-1\\ &= 2\,\left(2\,\cos^2(a)-1\right)^2-1\\ &= 8\,\cos^4(a)-8\,\cos^2 a+1\end{aligned}$$

Solution pour problème 4–26 : Die Graphen der beiden Funktionen zeigen 4 Schnittpunkte im gefragten Interval.



$$\begin{aligned}-2\,\sin(x) &= 2-\sin(x+\frac{\pi}{2})\\ -2\,\sin(x) &= 2-\cos(x) \qquad | \quad \text{quadrieren}\\ 4\,(1-\cos^2(x)) &= 4-4\,\cos(x)+\cos^2(x)\\ 5\,\cos^2(x)-4\,\cos(x) &= 0\\ \cos(x)\ (5\,\cos(x)-4) &= 0\end{aligned}$$

Somit ergeben sich zwei Möglichkeiten, die jedoch durch einsetzen zu kontrollieren sind.

- Nullstellen von $\cos(x)$:
  Von den drei Nullstellen $\pm\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{3\pi}{2}$ sind nur $x_1=-\frac{\pi}{2}$ und $x_2=\frac{3\pi}{2}$ Lösungen der ursprünglichen Gleichung.
- Lösungen von $\cos(x)=\frac{4}{5}$
  Setze $z=\arccos(\frac{4}{5})\approx 0.6435$. Von den drei Lösungen $\pm z$ und $2\,\pi-z$ sind nur $x_3=-z$ und $x_4=2\,\pi-z$ Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}=\{-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\,\pi}{2},-\arccos(\frac{4}{5}),2\,\pi-\arccos(\frac{4}{5})\}$$

Solution pour problème 4–27 : Untersuchen Sie die Graphen und Definitionsbereiche der Funktionen, um zu folgenden Resultaten zu kommen

(a) Der Definitionsbereich der Funktion $\sin^{-1}=\arcsin$ ist $[-1,1]$. Für diese x gilt die verlangte Bedingung.

(b) Das Bild der Funktion $\cos^{-1}=\arccos$ ist $[0,\pi]$. Für diese x gilt die verlangte Bedingung.

(c)

$$\begin{array}{rcl}
\sin z & = & \pm\sqrt{1-\cos^2 z} \\
\sin\cos^{-1} x & = & \pm\sqrt{1-\cos^2\cos^{-1} x} = \pm\sqrt{1-x^2} \\
0 \le \cos^{-1} x \le \pi & \Longrightarrow & \sin\cos^{-1} x > 0 \\
\sin\cos^{-1} x & = & +\sqrt{1-x^2}
\end{array}$$

(d) Mit der Substitution $z=\sin^2 x$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcl}
4\,z^2+4\,z-3 & = & 0 \\
z_{1,2} = \frac{1}{8}\,\left(-4\pm\sqrt{16+48}\right) & = & \frac{1}{8}\,(-4\pm 8) = \frac{-1}{2}\pm 1
\end{array}$$

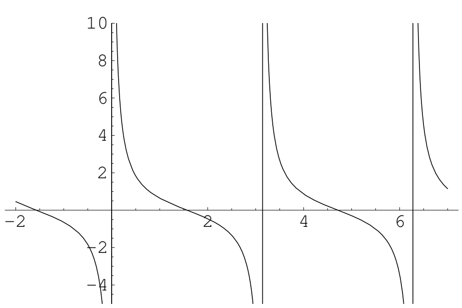
Da $0\le\sin^2 x\le 1$ kommt nur die Lösung $\sin^2 x = 1/2$ in Frage. Somit gilt

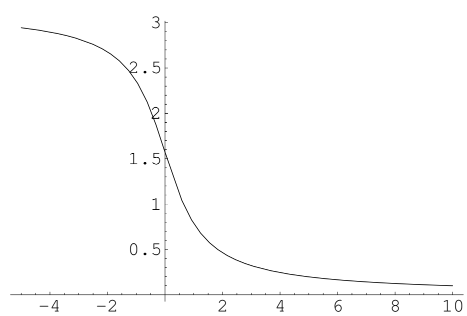
$$\begin{array}{rcl}
\sin x & = & \pm\sqrt{1/2} \\
x & = & \frac{\pi}{4}+k\,\frac{\pi}{2} \quad \text{wobei} \quad k\in\mathbb{Z}
\end{array}$$

Solution pour problème 4–28 :

(a) Der Definitionsbereich darf die Nullstellen von $\sin(x)$ nicht enthalten und somit $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq k\,\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$. Der Bildbereich muss $\mathbb{R}$ sein.

(b) Der linke Teil der untenstehenden Graphik zeigt den Graphen von $\cot(x)$.





(c) Der Definitionsbereich der Funktion f muss eingeschränkt werden. Eine mögliche Einschränkung ist $(0\,,\,\pi)$. Die resultierende inverse Funktion f^{-1} hat Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und das Bild $(0\,,\,\pi)$. Der Graph ist oben rechts gezeigt. Der Wert von $x=f^{-1}(-2)$ ist bestimmt durch die Bedingungen $\cot(x)=-2$ und $0<x<\pi$. Man erhält $x\approx 2.67795$.

Eine andere, oft verwendete Einschränkung für den Definitionsbereich von f ist $-\pi/2<x<\pi/2$. In diesem Fall ergibt sich $f^{-1}(-2)\approx -0.463648 = 2.67795-\pi$.

Solution pour problème 4–29 :

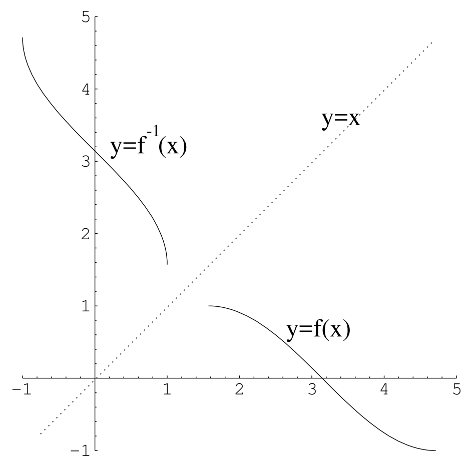
(a) Das Bild der Funktion f ist $[-1\,,\,1]$

(b) Der Definitionsbereich der inversen Funktion f^{-1} ist $[-1\,,\,1]$ und das Bild ist $[\pi/2\,,\,3\,\pi/2]$

(c) Spiegelung des ursprünglichen Graphen an der Geraden $x=y$. Die Graphik wurde erzeugt mit *Mathematica* durch die folgenden Befehle

Mathematica

```
g1 = ParametricPlot[{t, Sin[t]}, {t, Pi/2, 3Pi/2},
       DisplayFunction -> Identity];
g2 = ParametricPlot[{Sin[t], t}, {t, Pi/2, 3Pi/2},
       DisplayFunction -> Identity];
Show[{g1, g2}, PlotRange -> {{-1, 5}, {-1, 5}},
       DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> 1];
```



(d) Der horizontale Abstand des Wertes von x mit $f(x) = -0.5$ von $x = \pi$ ist gegeben durch $\arcsin 0.5 = \pi/6$. Somit gilt

$$f^{-1}(0.5) = \pi + \arcsin(0.5) = \pi + \pi/6 = 7\,\pi/6 = 210^\circ \approx 3.66519$$

Solution pour problème 4–30 :

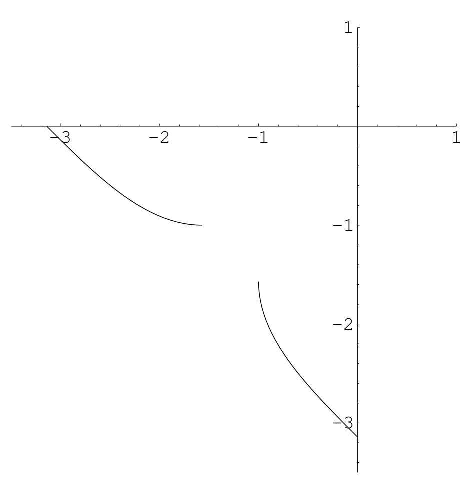
(a) Das Bild der Funktion f ist $[-1\,,\,0]$

(b) Der Definitionsbereich der inversen Funktion f^{-1} ist $[-1\,,\,0]$ und das Bild ist $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$

(c) Spiegelung des ursprünglichen Graphen an der Geraden $x = y$. Die Graphik wurde erzeugt mit *Mathematica* durch die folgenden Befehle

Mathematica

```
g1= ParametricPlot[{t,Sin[t]},{t,-Pi,-Pi/2},DisplayFunction -> Identity];
g2= ParametricPlot[{Sin[t],t},{t,-Pi,-Pi/2},DisplayFunction -> Identity];
g3=Show[{g1,g2},PlotRange->{{-3.5,1},{-3.5,1}},
     DisplayFunction ->$DisplayFunction,AspectRatio -> 1];
```



(d) Der horizontale Abstand des Wertes von x mit $f(x) = -0.2$ von $x = -\pi$ ist gegeben durch $\arcsin 0.2$. Somit gilt
$$f^{-1}(-0.2) = -\pi + \arcsin(0.2) \approx -2.940$$

Solution pour problème 4–31 : $f^{-1}\,(-0.5) = \frac{-2\pi}{3} \approx -2.094$.

Solution pour problème 4–33 : $x = \pm 2\,\pi/3 + k\,4\pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.

Solution pour problème 4–34 : $0\,,\ \pi\,,\ 2\pi\,,\ \pi/3\,,\ 5\pi/3$

Solution pour problème 4–36 :

$$\cos\,(x+\pi/3) = \cos x\cos\,(\pi/3) - \sin x \sin\,(\pi/3) = \frac{1}{2}\ \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \sin x$$

Somit kann die ursprüngliche Gleichung

$$\cos\,(x) + \cos\,(x+\pi/3) - 3/2 = 0$$

ersetzt werden durch

$$2\cos\,(x) + \cos x - \sqrt{3}\ \sin x - 3 = 0$$

oder auch

$$\sqrt{3}\ (\cos\,(x) - 1) = \sin x$$

Durch Quadrieren ergibt sich die Gleichung

$$3\ (\cos^2\,(x) - 2\cos x + 1) = 1 - \cos^2 x$$

oder auch

$$2\cos^2\,(x) - 3\cos x + 1 = 0$$

und somit ist mit

$$\cos x = \frac{1}{4}\ \left(3 \pm \sqrt{9-8}\right) = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Diese Gleichung hat im gegebenen Intervall $[0, 2\pi]$ die Lösungen $x = 0,\ 2\pi,\ \frac{\pi}{3}\,2\pi - \frac{\pi}{3}$ Da im Verlaufe der Rechnung quadriert wurde, sind diese Resultate zu überprüfen mit der ursprünglichen Gleichung, und es zeigt sich, dass $z = \pi/3$ **keine** Lösung ist. Somit bleiben die drei Lösungen

$$x = 0 \quad , \quad x = 2\pi \quad \text{und} \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

Solution pour problème 4–37 : Wegen der trigonometrischen Identität

$$\cos\,(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

kann die Gleichung ersetzt werden durch

$$1 - 2\sin^2 x = 2\sin^2 x$$

oder auch

$$\sin x = \pm\frac{1}{2}$$

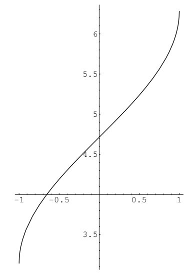
Somit sind die Lösungen gegeben durch

$$x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} \quad , \quad x_{3,4} = \pm(\pi - \frac{\pi}{6}) \quad , \quad x_5 = \pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{und} \quad x_6 = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

Solution pour problème 4–38 :

(a)

Der Graph der Funktion entsteht durch Spiegelung des richtigen **Teils** des Graphen der Funktion $\cos x$ an der Geraden $x = y$. Siehe Figur rechts. Der Wert $z = f^{-1}(-0.5)$ ist bestimmt durch die beiden Bedingungen $\cos z = -0.5$ und $\pi \leq z \leq 2\pi$ und somit gegeben durch $\frac{4}{3}\pi$.



(b) Verwende die Gleichung

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

um mit der Substitution $z = \cos x$ auf die quadratische Gleichung

$$2z^2 - z - 1 = 0$$

zu kommen. Diese Gleichung hat die beiden Lösungen $z_1 = 1$ und $z_2 = -1/2$. Im gegebenen Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$ erhält man somit die vier Lösungen

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad x_3 = \frac{4\pi}{3} \quad , \quad x_4 = 2\pi$$

Solution pour problème 4–39 : Setze

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A\,\sin(\omega_1 t) \\ f_2(t) &= A\,\sin(\omega_2 t) \\ f(t) &= f_1(t) + f_2(t) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$f(t) = 2A\,\sin(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t)\,\sin(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\,t)$$

Die maximale Amplitude von $f(t)$ ist 1, somit $A = 1/2$. Die Frequenz ν des Tones ist 440 Hz, somit

$$440 = \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_1+\omega_2}{4\pi}$$

Die Maxima der Lautstärken haben einen Abstand von 2 Sekunden. Somit ist die entsprechende Frequenz $1/4$ Hz. Es gilt

$$\frac{1}{4} = \frac{\omega_1-\omega_2}{4\pi}$$

Somit erhalten wir das Gleichungssystem für ω_1 und ω_2

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= 4\pi\,440 \\ \omega_1 - \omega_2 &= 4\pi\,\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir leicht

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\pi\,(440 + \frac{1}{4}) \\ \omega_2 &= 2\pi\,(440 - \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

Somit haben die beiden Signale je Amplitude $\frac{1}{2}$ und Frequenzen von 439.75 Hz und 440.25 Hz.

Solution pour problème 4–40 : c=2160 m

Solution pour problème 4–41 :

(a) 5.547 km

(b) En direction S $69°27'$ E.

Solution pour problème 4–42 : 29 km et $S45°O$

Solution pour problème 4–43 : 2934 m

Solution pour problème 4–44 : $N63°29'E$ et 193.5 km/h

Solution pour problème 4–45 : hauteur $\approx 18.43\ m$.

Solution pour problème 4–46 : Es gibt verschiedene mögliche Lösungsansätze.

1. Im Dreieck mit den Ecken Satellit, Nordpol und dem Punkt auf dem Äquator sind eine Seite und zwei Winkel bekannt. Rechnen Sie weiter mit Standardmethoden.
2. Sei $\alpha = 15°$ und $\beta = 5°$, dann liest man aus einer „geeigneten“ Figur ab, dass

$$y\ \tan\alpha = x - R \qquad , \qquad x\ \tan\beta = y - R$$

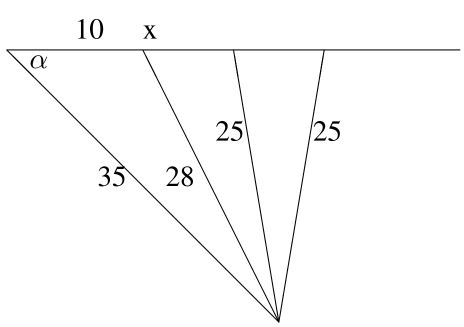
   In diesen beiden Gleichungen sind nur x und y unbekannt und somit kann die Antwort gefunden werden durch Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten.
3. Alle Lösungswege sollten auf die approximative Antwort 4526 km führen.

Solution pour problème 4–47 : Wegen des Cosinus–Satzes im Dreieck mit den Seitenlängen 35, 28 und 10 gilt

$$\cos\,\alpha = \frac{35^2 + 10^2 - 28^2}{2 \cdot 35 \cdot 10} = \frac{541}{700}$$

und mit dem Dreieck mit den Seitenlängen 35, 25 und x gilt

$$25^2 = 35^2 + x^2 - 2 \cdot 35\,x \cos\,\alpha = 35^2 + x^2 - 2 \cdot 35\,x\,\frac{541}{700} = 35^2 + x^2 - x\,\frac{541}{100}$$



Dies führt auf die quadratische Gleichung

$$x^2 - x\,\frac{541}{100} + 35^2 - 25^2 = 0$$

mit den approximativen Lösungen

$$x \approx \begin{cases} 15.57\ km \\ 38.52\ km \end{cases}$$

Da das Boot pro km 3 Minuten benötigt führt dies auf die Zeiten $t_1 \approx 46.71\ min$ und $t_2 \approx 115.56\ min$.

4.11 Récapitulation

Après ce chapitre on doit

- savoir travailler en radiant et degré.
- savoir expliquer les fonctions trigonométriques au triangle et avec un cercle d'unité.
- maîtriser les fonctions trigonométriques inverse et savoir résoudre des équations trigonométriques.
- savoir résoudre des problèmes appliqués simples.
- connaître le théorèmes d'additions et d'autres propriétés importants.
- trouver tout information sur les fonctions trigonométriques dans votre formulaire.

Chapitre 5

Fonctions exponentielle et logarithmique

Les fonction exponentielle et logaritmique sont souvent utilisé pour des problème techniques. Leurs importance se base avant tout sur des solutions des **équations différentielles linéaires**. Des exemples sont: conduction de chaleurs, vibrations mécanique (sans ou avec frottement), désintégration radioactive, comportement dynamique des circuit électronique, ...

La **formule de Euler**

$$e^{i\,x} = \cos x + i\,\sin x$$

fait le liaison entre des fonction trigonométriques et la fonction exponentielle avec exposant complexe. Il est souvent plus simple de calculer avec des fonctions exponentielle $e^{i\omega t}$ au lieu de $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$.

5.1 La fonction exponentielle et le logarithme naturelle

5.1.1 Propriétés de base

Le nombre irrationnel e est donné par une des deux formules

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$$

ou

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

L'explication exacte de ces expressions va suivre dans le chapitre sur des suites des nombres. Pour le moment e est un nombre réelle dont les premiers chiffre du devellopement décimales sont

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496697\ldots$$

Le graphe de la fonction $y = e^x = \exp(x)$ est montré dans la Figure 5.1. La figure est produit par *Octave* avec les commandes ci–dessous.

Octave

```
x = linspace(-2,2,201);
plot(x,exp(x))
grid on
xlabel('x');   ylabel('exp(x)')
```

5–1 Résultat : *La fonction* $\exp(x)$ *est caractérisé par les deux propriétés*

$$f(1) = e \quad \textit{et} \quad f(a+b) = f(a)\cdot f(b)$$

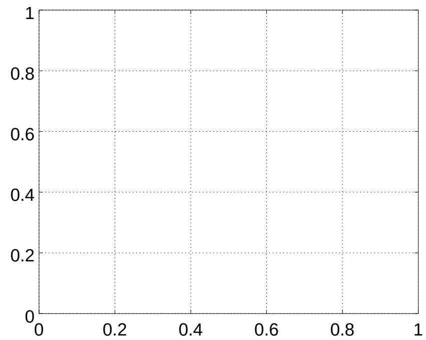


Figure 5.1: Graphe de $f(x) = e^x$

On peut montrer qu'il existe une seule fonction (continue) avec les deux propriétés ci–dessus.

5–2 Exemple : Utilisons la caractérisation de $\exp(x)$ pour déduire quelques règles de calcul.

(a) Mettez $a = 0$ et $b = 1$ dans la formule $e^{a+b} = e^a\, e^b$ pour arriver à

$$e^1 = e^{0+1} = e^0\, e^1$$

et donc on arrive à $e^0 = 1$.

(b) Mettez $a = b = 1$ pour arriver à

$$\exp\, 2 = \exp\,(1+1) = e^1\, e^1 = e\, e = e^2$$

et utiliser récurrence pour vérifier

$$\exp\,(nx) = (e^x)^n$$

(c) Mettez $a = b = 1/2$ et vérifiez que

$$e = e^{1/2+1/2} = \left(e^{1/2}\right)^2$$

et donc

$$e^{1/2} = \sqrt{e}$$

D' une façon similaire on vérifie que

$$e^{1/n} = \sqrt[n]{e}$$

(d) Avec des méthodes similaires on calcule la valeur de $e^{n/m}$ pour des nombres entiers n et m. Donc la fonction e^x est déterminé pour les arguments rationnels.

(e) Avec des calculs similaires on vérifie que

$$e^{x\cdot y} = (e^x)^y = (e^y)^x$$

pour les valeurs rationnelles de x et y. Acceptez que la règle de calcul reste correctes pour tout nombre réel.

$\diamondsuit$

Examiner Figure 5.1 pour voir que sur la domaine de définition $\mathbb{R}$ la fonction $y = e^x$ est strictement croissante et donc inversible. La domaine de définition de la fonction inverse coïncide avec l'image $\mathbb{R}_+$ de la fonction originale.

5–3 Définition : La fonction **logarithmique** (naturelle) $\ln(x)$ est définit comme fonction inverse de la fonction exponentielle e^x. Donc on arrive à les deux propriétes chracteristiques

$$\ln\, e^x = x \quad \text{et} \quad e^{\ln\, x} = x$$

et a cause de $e^0 = 1$ on trouve $\ln 1 = 0$.

Produire le graphe de $\ln(x)$ à l'aide d'une réflexion à la droite $y = x$ du graphe de $y = e^x$ pour arrive aux résultat en Figure 5.2.

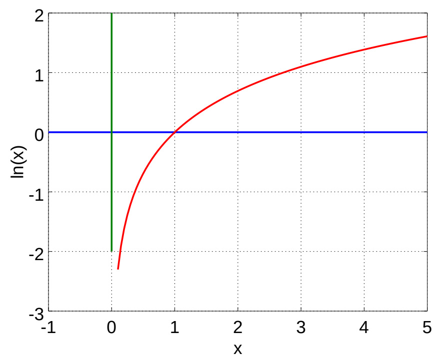


Figure 5.2: Graphe de $f\,(x) = \ln(x)$

5–4 Résultat : *Pour $x, y > 0$ on a*

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Démonstration : La preuve se base sur la propriété similaire de la fonction exponentielle.

$$\begin{aligned} \ln(x \cdot y) &= \ln\left(e^{\ln x} e^{\ln y}\right) \\ &= \ln\left(e^{\ln x + \ln y}\right) \\ &= \ln(x) + \ln(y) \end{aligned}$$

□

5–5 Exemple : Pour résoudre l'équation

$$2e^{4x} - 3e^{2x} - 5 = 0$$

pour la variable x mettre $z = e^{2x}$ et arriver à

$$2z^2 - 3z - 5 = 0$$

avec le solutions $z_1 = 2.5$ et $z_2 = -1$. Parce que e^{2x} est positive z_2 ne rend pas de solution (réel) pour x. Avec $z_1 = 2.5$ obtenez

$$x = \frac{1}{2}\, \ln\, 2.5 \approx 0.4581$$

♢

5.1.2 Des premiers applications

5–6 Exemple : Désintégration radioactive
Se basent sur des observations on suppose que pour $N(t)$ atome d'une matériaux le nombre des désintégration ΔN dans un intervalle de temps Δt petit sont donné par $\Delta N = -k\,N\,\Delta t$. Ça mène à une équation différentielle avec la solution

$$N(t) = N\,(0)\;e^{-k\,t}$$

La **demie-vie** T est définie par $e^{-k\,T} = \frac{1}{2}$ ou équivalent $e^{k\,T} = 2$. Avec la fonction logarithme on arrive à $T = \frac{1}{k}\,\ln 2$.

Pour un matériaux donné on mesure que après 100 années environ 10% sont désintégré. Trouver la demie-vie.
Réponse: T= 658 année ♢

5–7 Exemple : Loi de refroidissement de Newton
Un solide de température $T(t)$ est plongé dans un bain de liquide de température $U(t)$. Pour la différence des températures $P(t) := T(t) - U(t)$ Isaac Newton[1] avait observer (avec beaucoup des essais) que

$$\frac{d\,P}{dt} = -\lambda\,P$$

„Le taux de refroidissement est proportionelle à la différence des températures“. Il s'agit d'une équation différentielle avec la solution $P(t) = P(0)\,e^{-\lambda t}$ ou

$$T(t) - U(t) = (T(0) - U(0))\;\;e^{-\lambda t}$$

Un solide avec température initiale 180° est plongé dans un bain avec température constante 60°. Une minute plus tard on observe une température du solide de 120°. Quand va le solide atteindre la temperature de 90°?
Réponse: après deux minutes. ♢

5–8 Exemple : Saturation exponentielle
Le loi de Ohm pour le courant $I(t)$ par une résistance R et une impédance L implique que

$$L\,\frac{d\,I}{dt} + I\,R = E$$

avec la valeur initiale $I(0) = 0$. La solution de cette équation différentielle est donnée par

$$I(t) = \frac{E}{R}\;\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\,t}\right)$$

Choisir $L = 3$ H, $R = 30$ Ohm et calculer avec une tension de $E = 150$ V. Trouver le courant après 0.1 secondes.
Réponse:: $I(0.1) = 0.476$ A ♢

> Les trois exemples typiques ci–dessus montre que les fonction exponentielles apparaisse souvent comme solutions des **équations différentielles**. C'est une des applications principale des fonction exponentielle.

5–9 Exemple : Le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\quad e^{-x^2/2}$ et dit la **courbe de cloche de Gauss**[2]. Trouver le graphe en Figure 5.3 généré par

Octave

[1] Sir Isaac Newton (1642–1727), physicien, mathématicien et astronome anglais.
[2] Carl Friedrich Gauss (1777—1855), mathématicien

```
1; %% this is a scipt file, not a function file
function y = gauss(x)
  y = 1/sqrt(2*pi)*exp(-x.^2/2);
endfunction

x = linspace(-3,3,301);
plot(x,gauss(x))
axis([-3,3,0,0.5])
grid on
xlabel('x');  ylabel('gauss(x)')
```

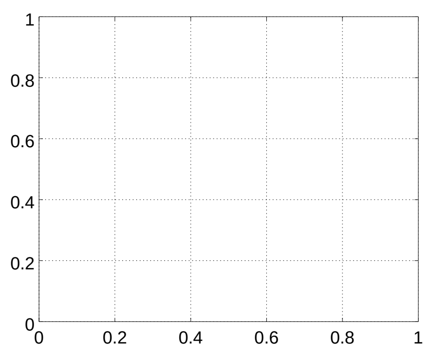


Figure 5.3: Courbe de cloche de Gauss

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est choisit tel que l' aire total au dessous la courbe est 1. Cette fonction est utile pour le calcul de probabilité et statistique. Si le mesure sont donné par une distribution normale avec moyens x_0 et variance σ^2, puis la distributions est

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \exp(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2})$$

$\diamondsuit$

5.2 Fonctions exponentielle et logarithmique avec base arbitraire

Soit $a > 0$ un nombre réel, a servir comme **base**. Puis l'expression a^x est définit par

5–10 Définition :

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Comme conséquence on arrive aux règles de calculs suivantes.

5–11 Résultat : *Pour $a > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ on trouve*

(a)

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a}\, e^{y\ln a} = a^x\, a^y$$

(b)

$$a^0 = e^{0\ln a} = e^0 = 1$$

(c)

$$a^{-x} = e^{-x\ln a} = \frac{1}{e^{x\ln a}} = \frac{1}{a^x}$$

(d)

$$(a^x)^y = e^{(y\cdot\ln(a^x))} = \exp\left(y\cdot\ln e^{x\ln a}\right) = \exp\left(y\cdot x\ln a\right) = a^{x\cdot y}$$

5–12 Exemple : Les graphes de

$$y = e^x \quad \text{et} \quad y = a^x = e^{x\ln a}$$

ne diffère que par un changement d'échelle dans la direction des x par un facteur $\ln a$. Examiner Figure 5.4 pour $a = 5$ et $\ln a = \ln 5 \approx 1.6$.

Octave

```
x = linspace(-2,4,2001);
plot(x,exp(x), x, 5.^x)
xlabel('x'); grid on
axis([-2,4,0,40])
legend("exp(x)","5^x","location","northwest")
```

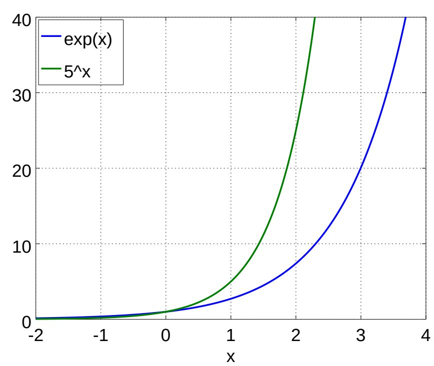


Figure 5.4: Graphes de $y = e^x$ et $y = 5^x$

◇

Pour $a > 1$ la fonction $f(x) = a^x$ est strictement croissante, avec domaine de définition $\mathbb{R}$ et image $\mathbb{R}_+$. Donc elle est inversible et on obtient

5–13 Définition : La fonction $\log_a(x)$ est la fonction inverse de a^x et donc caractérisé par les propriétés

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{et} \quad a^{\log_a(x)} = x$$

Comme conséquence on arrive aux règles de calculs suivantes.

5–14 Résultat :

(a)

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a\left(a^{\log_a x}\, a^{\log_a y}\right) = \log_a\left(a^{\log_a x + \log_a y}\right) = \log_a\left(a^{(x+y)\,\log_a}\right) = \log_a x + \log_a y$$

(b)

$$\log_a 1 = 0 \quad \textit{und} \quad \log_a a = 1$$

En utilisant les graphes de e^x et a^x en Figure 5.4 on arrive aux propriétés en Tableau 5.1.

a	fonction	domain de définition	image	monotonie
	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	croissante
	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$	croissante
$a > 1$	a^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	croissante
$a > 1$	$\log_a x$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$	croissante
$0 < a < 1$	a^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	décroissante
$0 < a < 1$	$\log_a x$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$	décroissante

Tableau 5.1: Propriétés des fonction exponentielle et logarithmique

Pour la grande majorité des calculatrice vous ne trouvez pas directement les fonctions exponentielles et logarithmiques avec base arbitraire.. Mais c'est facile de les programmer.

5–15 Résultat : *On a*

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Démonstration : Avec les règles de calcul on arrive à

$$a^{\ln x/\ln a} = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln a}\,\ln a\right) = e^{\ln x} = x$$

et donc $\dfrac{\ln x}{\ln a}$ est une fonction inverse de a^x. Mais il existe une seul fonction inverse (peut être plusieurs formules) et puis on a $\log_a(x) = \ln x/\ln a$. □

Se basent sur les identités

$$a^x = e^{x\,\ln a} \quad \text{et} \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

il suffit d'avoir les fonctions $e^x = \exp(x)$ et $\ln(x)$ a disposition. Les fonction exponentielles et logarithmiques avec des base différentes sont facile a programmer. Voir problème 5–20.

5.3 Fonctions hyperboliques

Il est essentiel de comparer les fonctions hyperboliques $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ avec les fonctions trigonométriques $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Souvent les formules sont similaires. Les connections devient évident en utilisant des nombres complexes ou des séries entier. On y reviendra plus tard.

5.3.1 Définitions et propriétés simples

Les **fonctions hyperboliques** sont données par

5–16 Définition :

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})\\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})\end{aligned}$$

Ces combinaisons simples de e^x et e^{-x} ont étés baptisées parce-que on peut les utiliser dans quelques applications.

Vérifier les résultats suivantes à l'aide de Figure 5.5.

Octave

```
x = linspace(-2,2.5,2001);
plot(x,cosh(x), x, sinh(x))
xlabel('x'); grid on
axis([-2,2.5,-2,5]); axis('equal')
legend("cosh(x)","sinh(x)","location","northwest")
```

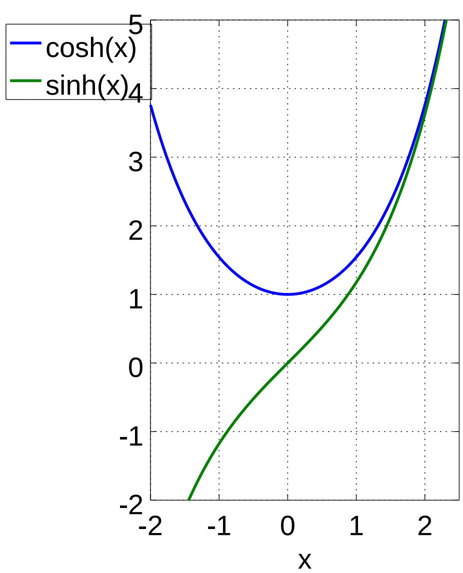


Figure 5.5: Graphes de $\cosh x$ et $\sinh x$

5–17 Résultat : *On trouve les règles de calculs suivantes.*

(a)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Cette identité correspond au théorème de Pythagore $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ *pour les fonction trigonométriques.*

(b)

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$

veut dire que $\cosh(x)$ *est une fonction paire.*

(c)

$$\sinh(-x) = -\sinh(x)$$

veut dire que $\sinh(x)$ *est une fonction impaire.*

(d) $\sinh(x)$ *est strictement croissant.*

(e)

$$\cosh 0 = 1 \quad \textit{et} \quad \sinh 0 = 0$$

(f) Pour $x \gg 1$ *on a*

$$\cosh(x) \approx \sinh(x) \approx \frac{1}{2}\, e^x$$

et pour $x \ll -1$

$$\cosh(x) \approx \frac{1}{2}\, e^{-x} \quad \textit{et} \quad \sinh(x) \approx \frac{-1}{2}\, e^{-x}$$

Démonstration : La vérification de ces formules suit toujours le même schéma.

1. Traduire en fonction exponentielles.
2. Utiliser les résultats pour les exponentielles.
3. Retraduire.

(a)

$$\begin{aligned} 4\left(\cosh^2 x - \sinh^2 x\right) &= \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2 \\ &= e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x} = 4 \end{aligned}$$

(b)

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}\,\left(e^{-x} + e^{+x}\right) = \frac{1}{2}\,\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \cosh x$$

(c)

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\,\left(e^{-x} - e^{+x}\right) = \frac{-1}{2}\,\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\sinh x$$

(d) e^x et $-e^{-x}$ sont des fonctions strictement croissantes, donc $\sinh x$ est aussi croissante. .

(e)

$$\cosh\, 0 = \frac{1}{2}\,\left(e^0 + e^0\right) = 1 \quad \text{et} \quad \sinh 0 = \frac{1}{2}\,\left(e^0 - e^0\right) = 0$$

(f) Utiliser $e^{-x} \approx 0$ pour $x >> 1$.

□

5.3.2 Chaînette

5–18 Problème : chaînette
La hauteur d'un câble sur terre est donné par la fonction

$$y(x) = \frac{H}{\rho g}\,\cosh\left(\frac{\rho g}{H}\,(x - x_0)\right) + h$$

avec

x_0	position horizontale du point le plus bas
ρ	masse spécifique du câble, en $[kg\ m^{-1}]$
H	tension au points le plus bas, en $[N] = [kg\ m\ s^{-2}]$
	ou composante horizontale de la tension
h	hauteur a choisir correctement
g	constante de gravitation $\approx 9.81[\frac{m}{s^2}]$

A cause de cette interprétation on parle d'une **chaînette**.

Pour un câble penché un connaît des data suivants:

1. pour $x = 0$ le câble est attaché à une hauteur de 2.
2. pour $x = 5$ le câble touche le sol horizontal.

A déterminer sont

(a) la constante $\lambda = \rho g/H$.

(b) la hauteur du câble pour $x = 15$.

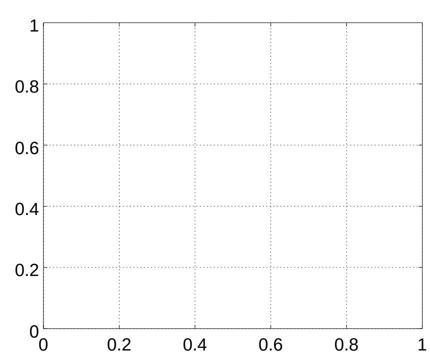


Figure 5.6: Chaînette

Solution: A cause de la deuxième condition et $\cosh(0) = 1$ on sait que $x_0 = 5$, et donc on cherche λ dans la fonction

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\,\left(\cosh\left(\lambda\,(x - 5)\right) - 1\right)$$

Mettons $x = 0$ pour obtenir l'équation

$$\lambda\,2 = (\cosh(\lambda\,5) - 1)$$

à résoudre pour λ. Comparer les graphes de $2\,\lambda$ et $\cosh(5\,\lambda) - 1$ comme fonction de λ dans la domaine correctes pour voir qu'il y a une et une seule solution. Malheureusement on ne peut pas résoudre cette équation d'une façon analytique.

Essayons d'estimer l'ordre de grandeur de λ. Examiner un câble avec un pois spécifique de $\rho = 1\,\frac{kg}{m}$, attaché au mur au points le plus bas. A une distance de 5 m du mur on est à une hauteur de 2 m. Puis estimer la force nécessaire pour tenir ce câble. Une estimation possible est $h \approx 100\,N$ (ça correspond a tenir une masse de 10 kg). Cette estimation mène à $\lambda = \frac{\rho g}{H} \approx 0.1\ [1/m]$. Cette valeur peut être utilisée comme valeur initiale pour la méthode numérique de Newton pour résoudre l'équation pour λ. Un calcul avec la calculatrice programmable montre que une solution approximative est

$$\lambda \approx 0.152471\ [\frac{1}{m}]$$

Octave rend le résultat par les commandes ci–dessous.

Octave

```
1; %% force a script file
function z = h(la)
  z = 2*la-cosh(5*la)+1;
endfunction

la_opt = fsolve("h",0.1)
-->
la_opt =  0.15247
```

Trouver la réponse pour la question par

Octave

```
x = linspace(0,15);
plot(x,1/la_opt * (cosh(la_opt*(x-5))-1))
axis([0,15 0 10])
xlabel("position x"); ylabel(" height h")
grid on

h15 = 1/la_opt * (cosh(la_opt*(15-5))-1)
-->
h15 =  9.2198
```

Donc pour $x = 15\,m$ le câble se trouve à une hauteur de $9.22\,m$, et la forme du câble est montré en Figure 5.6.

Problème 5–22 est très similaire à l'exemple ci–dessus.

5.3.3 Théorème d'additions et fonction inverse

Pour les fonction trigonométriques on a les théorèmes d'addition

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y\\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y\end{aligned}$$

Le résultat comparable pour les fonction hyperboliques est correct.

5–19 Résultat : *On a*

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y\\ \cosh(x+y) &= \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y\end{aligned}$$

Démonstration : On va vérifier la première identité. Il s'agit d'utiliser la formule $e^{x+y} = e^x\, e^y$ au bon moment. La vérification de $\cosh(x+y)$ suit le même schéma.

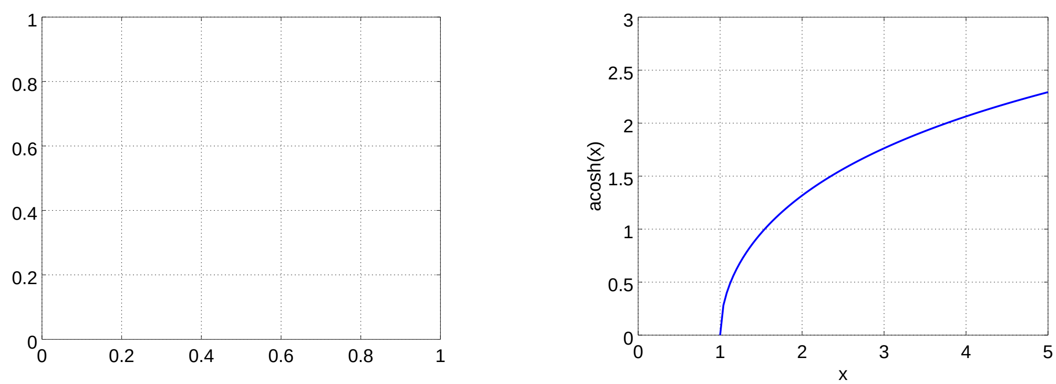
$$\begin{aligned}
4\ \sinh x \cosh y + 4\ \cosh x \sinh y &= (e^x - e^{-x})\,(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})\,(e^y - e^{-y}) \\
&= e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y} \\
&\quad + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y} \\
&= 2\ \left(e^{x+y} - e^{-x-y}\right) \\
&= 4\ \sinh\,(x+y)
\end{aligned}$$

$\square$

Pour les fonctions trigonométriques il existe des fonctions inverse. Pour examiner les fonctions inverse des fonctions hyperboliques if faut examiner les graphes des fonction $\cosh$ et $\sinh$ en Figure 5.5.

La fonction $\sinh(x)$ avec domaine de définition $\mathbb{R}$ et image $\mathbb{R}$ est strictement croissante et donc inversible. Le graphe de la fonction inverse est produit par une réflexion à la droite $y = x$ et il est montré en Figure 5.7(a). La propriété fondamentale de cette fonction est

$$y = \text{Arsinh}(x) = \sinh^{-1}\, x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sinh\, y$$



(a) Arsinh(x)

(b) Arcosh(x)

Figure 5.7: Graphes des fonctions $y = \text{Arsinh}(x) = \sinh^{-1}(x)$ et $y = \text{Arcosh}(x) = \sinh^{-1}(x)$

La fonction $\cosh(x)$ avec domaine de définition $\mathbb{R}$ n'est **pas** inversible. La restriction de lac la fonction inverse dit domaine de définition sur l'intervalle $[0,\infty)$ rend un image de $[0,\infty)$ et cette fonction restreinte est inversible avec la notation $y = \text{Arcosh}(x)$. Trouver le graphe en Figure 5.7(b).

$$y = \text{Arcosh}(x) = \cosh^{-1}\, x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \cosh(y)$$

Pour les fonctions réciproques il y a une interprétation géométrique avec des surface au-dessous des hyperboles, voir Wikipedia ou [Bron93]). Voir le propriétés des fonction hyperboliques en Tableau 5.2.

fonction	domaine de définition	image	symétrie	monotonie
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$		croissante
$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	impaire	croissante
$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$[1,\infty)$	paire	
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$		croissante
$\sinh^{-1}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	impaire	croissante
$\cosh^{-1}(x)$	$[1,\infty)$	$[0,\infty)$		croissante

Tableau 5.2: Propriétés des fonction hyperboliques

5.4 Échelle logarithmique

- Si pour deux grandeurs x et y on a le rapport $y = c\,a^x$ on a une fonction exponentielle. Si on examine ne “nouveau” rapport
$$\log y = \log c + \log a^x = \log c + x \log a$$
on arrive à $\log y$ comme fonction affine de x. On a une droite avec pente $\log a$.

- Si pour deux grandeurs x et y on a le rapport $y = c\,x^a$ on a une fonction de puissance. Si on examine le “nouveau” rapport
$$\log y = \log c + \log x^a = \log c + a \log x$$
on arrive à $\log y$ comme fonction affine de $\log x$. On a une droite avec pente a.

Les observations ci–dessus rend le résultat suivant.

5–20 Résultat : *Échelle logarithmique*

(a) En utilisant une échelle logarithmique pour l'ordonnée les graphes des fonctions exponentielles $y = c\,a^x$ apparaisse comme droite.

(b) En utilisant des échelle logarithmiques pour l'ordonnée et l'abscisse les graphes des fonctions de puissance $y = c\,x^a$ apparaisse comme droite.

On parle des **échelles décibel** si on affiche $20\,\log(y)$ au lieu de y.

5–21 Exemple : Décharge d'une capacité

Si un condensateur avec capacité C est déchargé par une résistance R la tension sur le condensateur est donnée par
$$u(t) = u(0)\, e^{\frac{-t}{RC}}$$

Calculer le logarithme naturelle des deux coté pour arriver à
$$\ln(u(t)) = \ln(u(0)) - \frac{t}{RC}$$

Afficher $\ln(u)$ sur l'ordonnée et t sur l'abscisse pour arriver à une droite avec pente $\frac{-1}{RC}$ et un point d'intersection avec l'ordonnée sur l'hauteur $\ln(u(0))$.

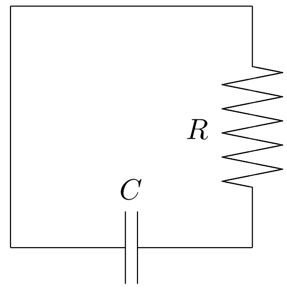


Figure 5.8: Élement RC

Si nous utilisons $\log = \log_{10}$ au lieu de $\ln$ on trouve

$$\log(u(t)) = \log(u(0)) - \frac{1}{\ln 10}\,\frac{t}{RC} = \log(u(0)) - \log e\,\frac{t}{RC}$$

on arrive à une droite avec pente $\frac{-\log e}{RC} = \frac{-1}{RC\,\ln 10}$ et un point d'intersection avec l'ordonnée sur l'hauteur $\log(u(0))$.

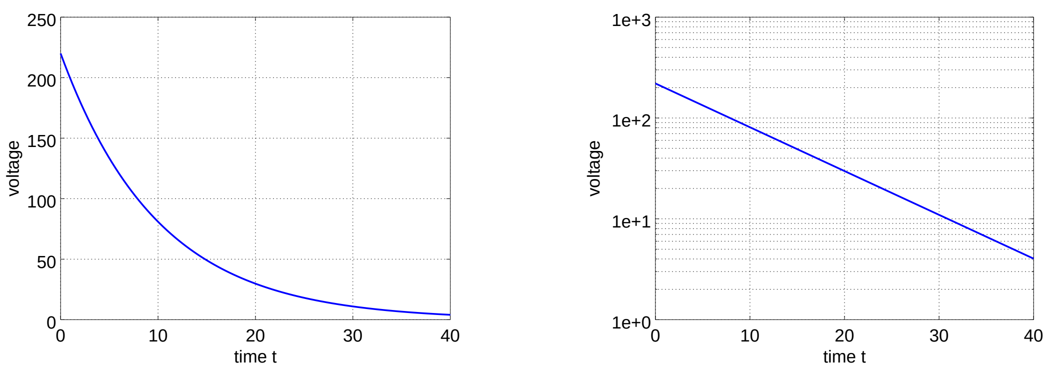


Figure 5.9: Échelle linéaire et logarithmique pour la tension d'un élément RC

En Figure 5.9 essayer de lire la valeur de RC. Les graphes sont produit par *Octave*.

Octave

```
RC = 10.0; u0 = 220;
t = linspace(0,40);
figure(1);
plot(t,u0*exp(-t/RC))
grid on
xlabel("time t"); ylabel("voltage")
figure(2);
semilogy(t,u0*exp(-t/RC))
grid on
xlabel("time t"); ylabel("voltage")
```

$\diamondsuit$

5–22 Exemple : Un système mécanique

L'équation différentielle d' un système masse ressort avec masse m, constante de ressort k et coefficient d' amortissement μ et une force externe $f(t)$ est donné par

$$m\,\ddot{y} + \mu\,\dot{y} + k\,y = f\,(t)$$

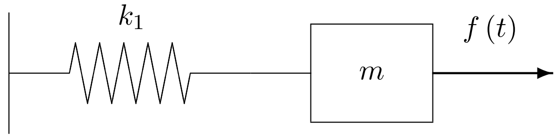


Figure 5.10: Un ressort avec une masse attaché

Par la solution de cette équation différentielle on arrive à un facteur amplification pour l'amplitude de

$$r(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \mu^2\omega^2}}$$

veut dire on a

$$y(t) = r(\omega)\ A\ \cos(\omega\, t + \phi)$$

- Pour $0 < \omega$ très petit ça rend
$$r(\omega) \approx \frac{1}{k}$$
- Pour $0 < \omega$ très grand on arrive à
$$r(\omega) \approx \frac{1}{\omega^2 m}$$
et donc
$$\log r(\omega) \approx -2 \log \omega - \log m$$
Avec les échelles logarithmique des plots de Bode on devrait obtenir une droite avec pente négative. Les Résultat numérique pour un exemple confirme cette observation.

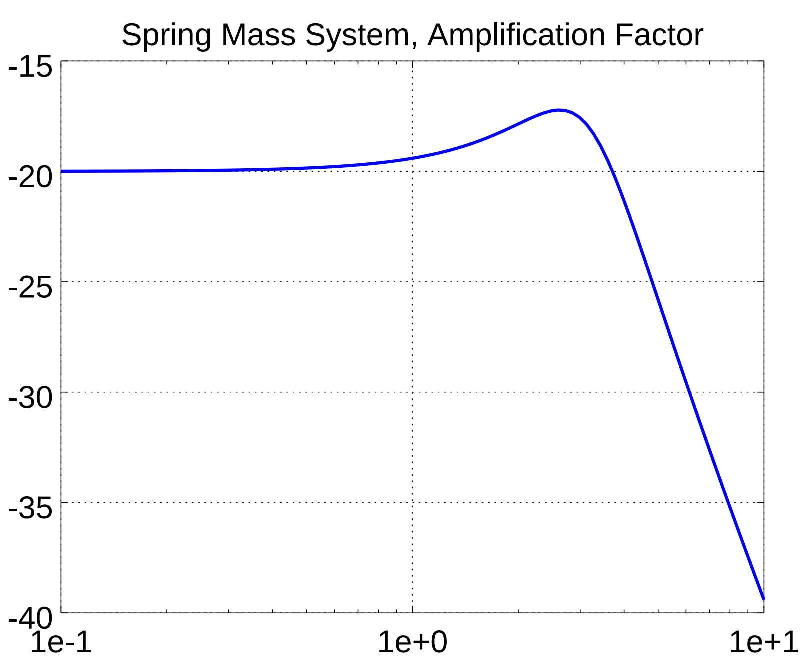


Figure 5.11: Plot de Bode pour le facteur amplification d'un système masse ressort

Examinons l'exemple $k = 10$, $\mu = 2.5$ et $m = 1$. Donc pour ω petit le facteur d'amplification est donné par $r \approx 1/k = 1/10$. Pour l'ordonnée on utilise une échelle décibel et puis on va obtenir $20 \cdot \log r \approx -20 \log 10 = -20$. C'est confirmé par Figure 5.11.

Pour examiner la pente pour des valeurs grande de ω il faut quelques calculs. Examinons $\log \omega = 1/2$ (veut dire $\omega = \sqrt{10} \approx 3.2$) et $\log \omega = 1$ (veut dire $\omega = 10$). Les valeurs sur l'ordonnée passe de -18 à -39. Donc nous lisons une pente de $\frac{-39+18}{1-1/2} = -42$. L'échelle décibel sur l'ordonnée introduit un facteur de 20 pour la pente et donc pour des échelle purement logarithmique (log–log) une pente de $\frac{-42}{20} \approx -2$. Ça confirme notre exemple numérique.

Ci–dessous trouver le code en *Octave* pour produire Figure 5.11.

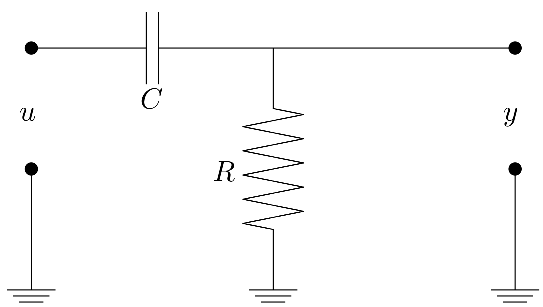
Octave

```
m  = 1 ; nu = 2.5; k  = 10;
w = logspace(-1,1,100);
[amp,phase] = bode([1],[m,nu,k],w);
amp = 20*log10(amp);
semilogx(w,amp)
grid on
grid("minor")
title("Spring Mass System, Amplification Factor")
```

♢

5.4.1 Un filtre passe-haut

Examiner le circuit



Pour le courant I par la capacitance C on a:

$$I = C\,\frac{d}{dt}\,(u-y) = \frac{y}{R}$$

C'est une équation différentielle linéaire, inhomogène de l'ordre 1 pour la tension de sortie $y(t)$.

$$\dot y(t) + \frac{1}{RC}\,y(t) = \dot u(t)$$

Avec la tension d'entrée $u(t) = e^{i\,\omega\,t}$ on arrive à

$$y(t) = \frac{i\,\omega\,RC}{i\,\omega\,RC+1}\,e^{i\,\omega\,t}$$

Le facteur d'amplification est donc

$$A(\omega) = \left|\frac{i\,\omega\,RC}{i\,\omega\,RC+1}\right| = \frac{\omega\,RC}{\sqrt{\omega^2\,(RC)^2+1}}$$

Il faut examiner cette fonction soigneusement.

- $0 < \omega \ll 1/RC$: Dans cette domaine on a $\omega^2\,(RC)^2 \ll 1$ et donc

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx \omega\,RC \\ 20\,\log A(\omega) &\approx 20\,\log\omega + 20\,\log(RC) \end{aligned}$$

  Pour une graphique avec échelle logarithmique (base 10) pour ω $x = \log(\omega)$ et une échelle décibel pour le facteur d'amplification ($y = 20\,\log(A)$) on arrive à une droite $y = 20\,x + 20\,\log(RC)$ avec pente $+20$ et une ordonnée à l'origine ($x = \log\omega = 0 \iff \omega = 1$) sur hauteur $y = 20\,\log(RC)$. Donc l'intersection avec l'axe horizontale logarithmique se trouve à $\log(A) = 0$ ($A = 1$) et donc pour $\omega = \frac{1}{RC}$.

- $1/RC \ll \omega$: Dans cette domaine on a $\omega^2\,(RC)^2 \gg 1$ et donc

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx \frac{\omega\,RC}{\sqrt{\omega^2\,(RC)^2}} = 1 \\ 20\,\log A(\omega) &\approx 0 \end{aligned}$$

- $\omega = 1/RC$: pour cette valeur on a $\omega^2\,(RC)^2 = 1$ et donc

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 20\,\log A(\omega) &\approx 20\,\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -10\,\log 2 \approx -3.0103 \approx -3 \end{aligned}$$

  on parle du **point 3-db** . Pour cette fréquence l'amplitude du signal est diminuée par le facteur $\sqrt{2}$ et donc la puissance est diviser par 2 .

Pour les éléments

$$R = 10\;k\Omega \quad \text{et} \quad C = 22\mu F$$

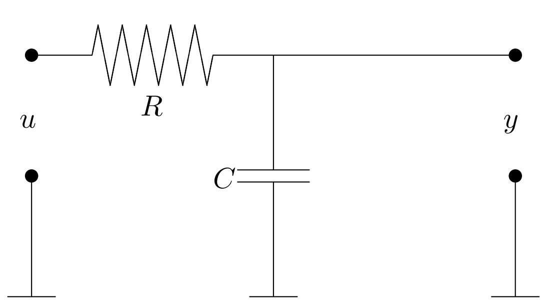
nous allons examiner le plot de Bode pour le facteur d'amplification en Figure 5.12. Le **point 3-db** se trouve à $\omega = 1/RC \approx 4.5$. C'est confirmé par la graphique, parce que $\log 4.5 \approx 0.66$.

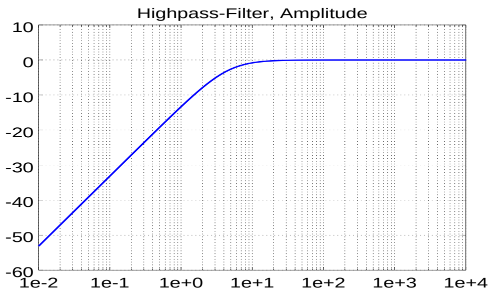
Octave

```
R = 10^4; C = 22*10^(-6);
w = logspace(-2,4.5,100);
[amp,phase] = bode([R*C,0],[R*C,1],w);
amp = 20*log10(amp);
semilogx(w,amp)
grid on
title("Highpass-Filter , Amplitude")
axis([0.01,10000,-60,10])
```

5.4.2 Un filtre passe-bas

Examiner le circuit





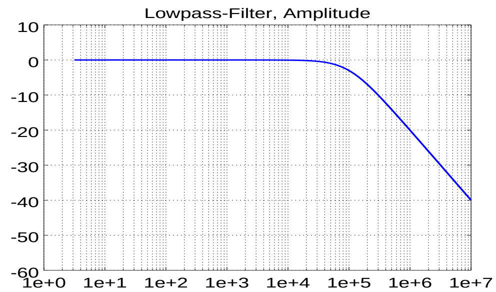


Figure 5.12: Plot des amplitudes pour un filtre passe-haut et un filtre passe-bas

Pour le courant I par la capacitance C on a:

$$C\,\frac{d}{dt}\,y = \frac{u-y}{R}$$

C'est une équation différentielle linéaire, inhomogène de l'ordre 1 pour la tension de sortie $y(t)$.

$$RC\,\dot{y}(t) + y(t) = u(t) = e^{i\,\omega\,t}$$

Avec la tension d'entrée $u(t) = e^{i\,\omega\,t}$ on arrive à

$$y(t) = \frac{1}{i\,\omega\,RC + 1}\,e^{i\,\omega\,t}$$

Le facteur d'amplification est donc

$$A(\omega) = \left|\frac{1}{i\,\omega\,RC + 1}\right| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\,(RC)^2 + 1}}$$

Il faut examiner cette fonction soigneusement.

- $0 < \omega \ll 1/RC$: Dans cette domaine on a $\omega^2\,(RC)^2 \ll 1$ et donc

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx 1 \\ 20\,\log A(\omega) &\approx 0 \end{aligned}$$

- $1/RC \ll \omega$: Dans cette domaine on a $\omega^2\,(RC)^2 \gg 1$ et donc

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx \frac{1}{\omega\,RC} \\ 20\,\log A(\omega) &\approx -20\,\log\omega - 20\,\log(RC) \end{aligned}$$

  Pour une graphique avec échelle logarithmique (base 10) pour ω $x = \log(\omega)$ et une échelle décibel pour le facteur d'amplification ($y = 20\,\log(A)$) on arrive à une droite $y = -20\,x - 20\,\log(RC)$ avec pente -20 et une ordonnée à l'origine ($x = \log\omega = 0 \iff \omega = 1$) sur hauteur $y = -20\,\log(RC)$. Donc l'intersection avec l'axe horizontale logarithmique se trouve à $\log(A) = 0$ ($A = 1$) et donc pour $\omega = \frac{1}{RC}$.

- $\omega = 1/RC$: pour cette valeur on a $\omega^2\,(RC)^2 = 1$ et donc

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 20\,\log A(\omega) &\approx 20\,\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -10\,\log 2 \approx -3.0103 \approx -3 \end{aligned}$$

  on parle du **point 3-db** . Pour cette fréquence l'amplitude du signal est diminuée par le facteur $\sqrt{2}$ et donc la puissance est diviser par 2 .

Pour les éléments

$$R = 1\,k\Omega \quad \text{et} \quad C = 10\,nF$$

nous allons examiner le plot de Bode pour le facteur d'amplification en Figure 5.12. Le **point 3-db** se trouve à $\omega = 1/RC \approx 10^5$. C'est confirmé par la graphique.

Octave

```
R = 10^3; C = 10^(-8);
w = logspace(0.5,7,100);
[amp,phase] = bode([1],[R*C,1],w);
amp = 20*log10(amp);

semilogx(w,amp)
grid on
axis([1,10^7,-60,10])
title("Lowpass-Filter, Amplitude")
```

5.5 Problèmes

5.5.1 Résoudre des équations

• Problème 5–1:
Résoudre les équations suivantes pour x.

(a)

$$p^{3x+5} = p^{2x+1}$$

(b)

$$\sqrt[x-2]{u^{2x-1}} = \sqrt[x+1]{u^{x-3}}$$

(c)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

(d)

$$\sqrt[x]{4360.2} = 0.0011$$

(e)

$$\left(\frac{3}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x+1}$$

(f)

$$100^{1/x} = 36.63^{1/25}$$

(g)

$$2^x - 3^{x+1} = 2^{x+2} - 3^{x+3}$$

(h)

$$3\,e^{4x} - 2\,e^{2x} = 0$$

Utiliser les notations

$$\lg x = \log x = \log_{10} x \quad \text{et} \quad \ln x = \log_e x$$

• Problème 5–2:
Résoudre les équations suivantes pour x.

(a)

$$5 - 2\,\log(3\,x) = 12.4$$

(b)

$$\log\sqrt[3]{2\,x} = 0.876$$

(c)

$$\log(2\,x+3) = \log(x-1) + 1$$

(d)

$$5^{\log x} = 2\cdot 3^{\log x}$$

(e)

$$2\,\log(4\,x) - 2\,\log x - 2\,\log 8 = 0$$

(f)

$$\log x - \log a = b$$

• **Problème 5–3:**

(a) Écrire l'expression $\log_2 x$ tel que seulement le logarithme naturelle $\ln x$ est utilisé.

(b) Soit $y = \log_2 x^2$ et $x > 0$. Résoudre cette équation pour x tel que le résultat ne contiens que les fonctions $\ln x$, e^x et des opérations algébriques.

(c) Trouver les solutions **exactes** de l'équation

$$e^{6\,x} - e^{3\,x} = 6$$

5.5.2 Fonctions et graphes

• **Problème 5–4:**
Esquisser les graphes de

(a) $y = e^{-x}$

(b) $y = \frac{1}{e^x}$

• **Problème 5–5:**
Esquisser les graphes de

(a) $y = e^x$

(b) $y = e^{2x}$

(c) $y = e^{x/2}$

dans **une** graphique et comparer.

• **Problème 5–6:**
Esquisser les graphes des trois fonctions

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} \\ f_2(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 2^2}} \\ f_3(x) &= \frac{1}{0.8\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x+2)^2}{2\cdot 0.8^2}} \end{aligned}$$

dans une graphique. Discuter les résultat comme data trouver en trois série de mesures. Utiliser ordinateur ou calculatrice si nécessaire.
Tip: courbe de cloche de Gauss et transformations des coordonnées.

• Problème 5–7:
Esquisser les graphes des trois fonctions et comparer.

$$y = 2^x \quad , \quad y = x^2 \quad , \quad y = 2^{-x}$$

• Problème 5–8:
Examiner

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = x^8 \quad , \quad h(x) = e^x - 1$$

(a) Esquisser les trois graphes pour $0 \leq x \leq 1$ et comparer.

(b) Esquisser les trois grappes pour $0 \leq x \leq 10$ et comparer.

(c) Esquisser les trois grappes pour $0 \leq x \leq 40$ et comparer.

• Problème 5–9:
Montre que l'équation

$$e^{6x} + 7e^{3x} + 12 = 0$$

n'a pas de solution réel.

• Problème 5–10:
Les fonctions inverses des fonctions hyperboliques peuvent être exprimer en terme du logarithme naturelle $\ln()$.

(a) Résoudre l'identité

$$\sinh x = \frac{1}{2}\,\left(e^x - e^{-x}\right)$$

et puis exprimer $\sinh^{-1} x$ en terme de $\ln x$.

(b) Résoudre l'identité

$$\cosh x = \frac{1}{2}\,\left(e^x + e^{-x}\right)$$

et puis exprimer $\cosh^{-1} x$ en terme de $\ln x$.

• Problème 5–11:
Utiliser les théorèmes d'addition pour les fonctions hyperboliques pour résoudre l'équation au–dessus pour l'inconnu $\cosh x$. Puis trouver les valeurs de x.

$$\cosh(2x) + \cosh(x) = 3$$

• Problème 5–12:
Regarder l'équation

$$\cosh(2x) - 4\cosh(x) = 0$$

(a) Trouver les valeurs **exactes** de $\cosh(x)$ des solutions de l'équation.

(b) Trouver toutes les valeurs de x pour les solutions de l'équation.

• Problème 5–13:
Pour $\lambda \neq 0$ fixe soit

$$\begin{aligned} f_1(x) &= A_1\ \cosh(\lambda\, x) \\ f_2(x) &= A_2\ \sinh(\lambda\, x) \\ f(x) &= f_1(x) + f_2(x) \end{aligned}$$

et $|A_1| \neq |A_2|$. Montrer que $f(x)$ peut être écrit dans la forme

$$f(x) = A\ \cosh(\lambda\, x + \varphi)$$

ou dans la forme

$$f(x) = A\ \sinh(\lambda\, x + \varphi)$$

Trouver A et φ comme fonctions de A_1 et A_2 pour les deux cas possibles.

5.5.3 Applications

• Problème 5–14:
Au cours de 50 ans, 1.7% d'une substance se désintègrent.

(a) Combien de % de la substance reste après 100 ans?

(b) Combien de % de la substance reste après 1000 ans?

(c) Après combien d'années 10% se sont décomposés?

• Problème 5–15:
Un morceau en fer de $80°$ est plongé dans un bain avec une température fixe de $20°$. Après dix minutes, le morceau s'est refroidi à $60°$.

(a) Trouver la température T comme fonction du temps t.

(b) Esquisser le graphe de $T(t)$ pour $0 \leq t \leq 50$.

(c) Pour une échelle bien choisit le graphe de cette fonction devient une droite. Trouver cette échelle et esquisser ce graphe.

• Problème 5–16:
Un morceau de $100°$ est plongé dans un bain avec une température fixe de $20°$. Après dix minutes, le morceau s'est refroidi à $60°$.

(a) Trouver la température comme fonction du temps.

(b) Trouver la température du morceau après 40 minutes.

(c) Quand est-ce que le morceau va avoir une température de $50°$?

• Problème 5–17:
Un thermomètre qui marque $15°$ est posé dans une chambre d'une température de $23°$. Après une minute, il marque $19°$. Après combien de temps il va marquer presque $23°$, disons $22.9°$?

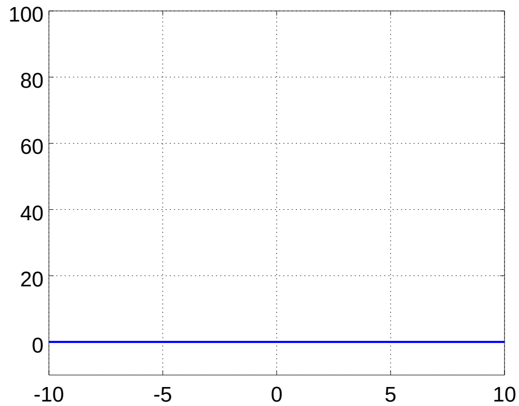
• Problème 5–18:
La température dehors est $-10°\,C$ et le chauffage s'arrête. 10 minutes plus tard on mesure $20°\,C$ dans la cuisine et après 30 minutes il reste encore $17°\,C$. Quand va l'eau commencer a geler ($0°\,C$)?

• Problème 5–19:
Examiner la fonction $y = \cosh(x)$ et utiliser

$$\log 2 = \log_{10} 2 \approx 0.3 \quad \text{und/et} \quad \frac{1}{\ln 10} \approx 0.434$$

- Pour l'axe des y utiliser une échelle décibel.
- Esquisser le graphe dans la figure ci–dessous.

- Dessiner les points $x = \pm 10$ le plus proche possible.
- Montrer tout calcul intermédiaire.



• Problème 5–20:
Les processeur Intel 486 ont des **FPU** (Floating Point Unit) avec des commandes $\log_2$ et 2^x. Il n'y a pas d'autres commandes exponentielle ou logarithmique.

(a) Comment calculer $\ln x$ et $\log x = \log_{10} x$ pur $x \in \mathbb{R}_+$?

(b) Comment calculer e^x et 10^x?

(c) Trouver une formule pour déterminer x^y.

(d) Pourquoi les constantes $\log_2 e$, $\ln 2$, $\log_{10} 2$ et $\log_2 10$ sont ils directement stockés dans le FPU. Ils sont accessible très rapidement (2 cycle de CPU).

(e) Pourqui le 486 utilise la base 2?

Commentaire :
Ce type de question importe pour la programmation des microprocesseurs. Les condition réels sont un peut différentes:

1. Pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ on peut calculer $y \cdot \log_2 x$ directement.
2. Pour $-1 < x < 1$ on peut calculer $2^x - 1$ directment.

La deuxième restriction $-1 < x < 1$ n'est pas un obstacle essentielle. On peut écrire chaque nombre $y \in \mathbb{R}$ dans la forme $y = n + x$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Puis on calcule

$$2^y = 2^{n+x} = 2^n \cdot 2^x = 2^n \cdot (2^x - 1) + 2^n$$

Le coprocesseur numérique calcule $2^x - 1$, en parallèle la CPU applique des opérations shift pour trouver 2^n. Puis on fait la combinaisons des résultats. Pour $-1 < x < 1$ on sait que $\frac{1}{2} < 2^x < 2$. Si $x \approx 0$ on a $2^x \approx 1$ Pour un calcul direct de 2^x (au lieu de $2^x - 1$) il es probable de perdre des chiffres significatifs. A cause de ça la CPU calcule $2^x - 1$ au lieu de 2^x. Examiner l'exemple numérique

$$2^{0.0001} - 2^{0.00005} \approx 1.000069 - 1.0000035 \approx 0.0000034$$

et comparer avec

$$(2^{0.0001} - 1) - (2^{0.00005} - 1) \approx 6.93150 \cdot 10^{-6} - 3.46574 \cdot 10^{-6} \approx 3.46576 \cdot 10^{-6}$$

Avec une arithmétique exactes les deux formules rends le même résultat. Mais avec un nombre fixe des chiffres apr‘es le virgule la deuxième formule rend plus de chiffres correctes.

• Problème 5–21:
Pour les fonctions hyperboliques on sait que

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\end{aligned}$$

Utiliser ces identités et le „théorème de Pythagore pour les fonctions hyperboliques“ pour

(a) réécrire $\cosh(2\,x)$ comme fonction de $\cosh\,x$.

(b) réécrire $\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$ comme fonction de $\cosh\,x$.

• Problème 5–22:
La longueur d'un câble de la forme

$$y(x) = \frac{H}{\rho g}\,\cosh\left(\frac{\rho g}{H}\,x\right) + h$$

pour $0 \leq x \leq L$ est donnée par

$$s = \frac{H}{\rho g}\,\sinh\left(\frac{\rho g}{H}\,L\right)$$

Trouver l'interprétation de ces paramètre sur page 120.

Un câble de longueur 100m et masse 200 kg et penché entre de points. Les deux point d'attachement sont à une distance de 80 m à la même hauteur. Trouver

(a) l'équation de la courbe.

(b) la tension au point le plus bas.

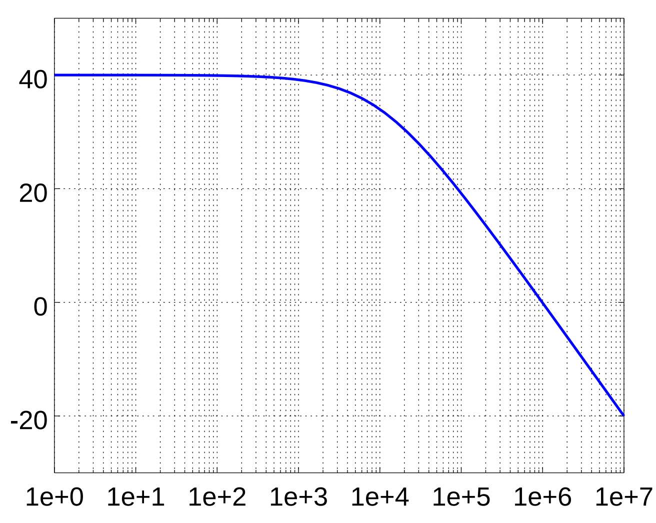
(c) la différence de hauteur.

Pour résoudre ce problème il faut trouver la solution d'une équation sans solution analytique. Utiliser votre calculatrice ou l'ordinateur. Source: [TenePoll85, p. 515]

• Problème 5–23:
Dans le graphique ci–dessous on peut voir le graphe d'une fonction $y = f(x)$. L'axe vertical utilise une échelle décibel.

(a) Dans la partie droite du graphique on trouve une droite. Donner la fonction $y = g(x)$ qui génère cette droite.

(b) La courbe prise en entier représente le graphe d'une fonction rationnelle simple. Trouver cette fonction.



• Problème 5–24:

Au–dessous vous trouver le Bode–Plot du facteur d'amplification $A(\nu)$ d'un filtre bas–passe. Sur l'abscisse on trouve la fréquence ν et sur l'ordonnée le facteur d'amplification avec une échelle décibel. La partie droite de la courbe peut être approximée par une droite.

(a) Trouver une formule approximative pour $A(\nu)$ pour des valeurs très grand de ν. Le résultat est une formule simple avec deux constantes inconnues.

(b) Calculer la valeur de la constante au–dessus, qui est donnée par la pente de la droite au–dessous.

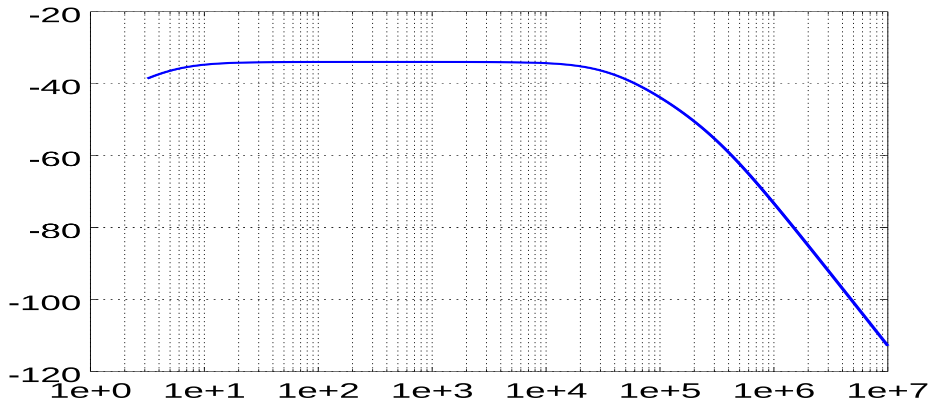


Figure 5.13: Plot de Bode d'un filtre passe-bas

• Problème 5–25:

Pour une **compression adiabatique** d'un gaz on sait que l'équation $p\,V^{\kappa} = c$ pour la pression p et le volume V est correcte. Utiliser une méthode graphique et les data ci–dessous pour déterminer les valeurs de l'exposant κ et de la constante c.

V	$[m^3]$	2	4	8	16	32
p	$[N/m^2]$	45	18	7	3.0	1.2

• Problème 5–26:

Pour une **compression adiabatique** d'un gaz on sait que l'équation $p\,V^{\kappa} = c$ pour la pression p et le volume V est correcte. Utiliser une méthode graphique et les data ci–dessous pour déterminer les valeurs de l'exposant κ .

V	$[m^3]$	0.25	0.5	1	2	4
p	$[N/m^2]$	42.1	18.4	8.0	3.49	1.52

• Problème 5–27:

Pour le pression de l'air p $[Torr]$ comme fonction de la hauteur h $[km]$ sur mer on sait que:

$$p(h) = p_0\,(1 - \alpha\,h)^{\kappa}$$

avec $\alpha = 2.26\cdot 10^{-2}$. Le tableau à droite montre quelques valeurs.

h km	p Torr
1	674.12
2	596.28
4	462.46
5	405.37

(a) Compléter le tableau avec une colonne des valeurs de $z = 1 - \alpha$.

(b) Examiner maintenant p comme fonction de z. Choisir les échelles tel qu'on devrait trouver une droite.

(c) Lire les valeurs de p_0 et κ dans votre graphique. Le **choix correcte des domaines** est importante.

• Problème 5–28:

Pour un bloc en métaux dans une salle à température fixe de $20°C$ on a mesuré la température T pour plusieurs temps t, avec les résultats à droite.

(a) Trouver un graphique, tel que les points devrait se trouver sur une droite.

(b) Utiliser votre graphique pour déterminer la température au temps $t = 0$.

(c) Rendre la formule pour la température $T(t)$ comme fonction du temps t. Utiliser votre graphique pour les valeurs dans la formule.

t [Min]	T [$°C$]
2	1.5
4	6.3
12	16.0
16	17.8

Tip: loi de Newton

• Problème 5–29:

Pour un bloc en métaux dans une salle à température fixe de $20°C$ on a mesuré la température T pour plusieurs temps t, avec les résultats à droite.

(a) Trouver un graphique, tel que les points devrait se trouver sur une droite.

(b) Utiliser votre graphique pour déterminer la température au temps $t = 0$.

(c) Rendre la formule pour la température $T(t)$ comme fonction du temps t. Utiliser votre graphique pour les valeurs dans la formule.

t [Min]	T [$°C$]
1	65
2	50
6	30
8	25

• Problème 5–30:

Pour des enfants de l'âge 5 à 13 ans le *rapport de Ehrenberg* est confirmé par data.. Ça dit que le poids G (en kg) et la hauteur h (en cm) sont liée par

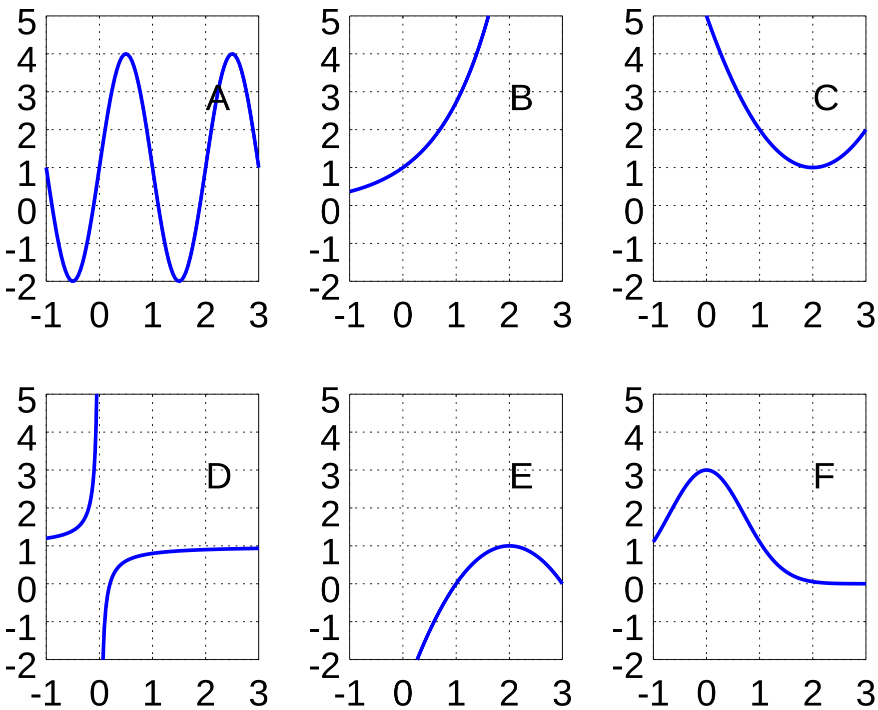
$$G = c\, e^{\alpha\, h}$$

pour des constantes c et α. Une petite étude a donnée les data à droite. Esquisser ces données dans une graphique appropriée et puis lire les valeurs de c et α.

h in cm	G in kg
100	15.1
110	18.2
125	23.9
130	26.4
150	38.0

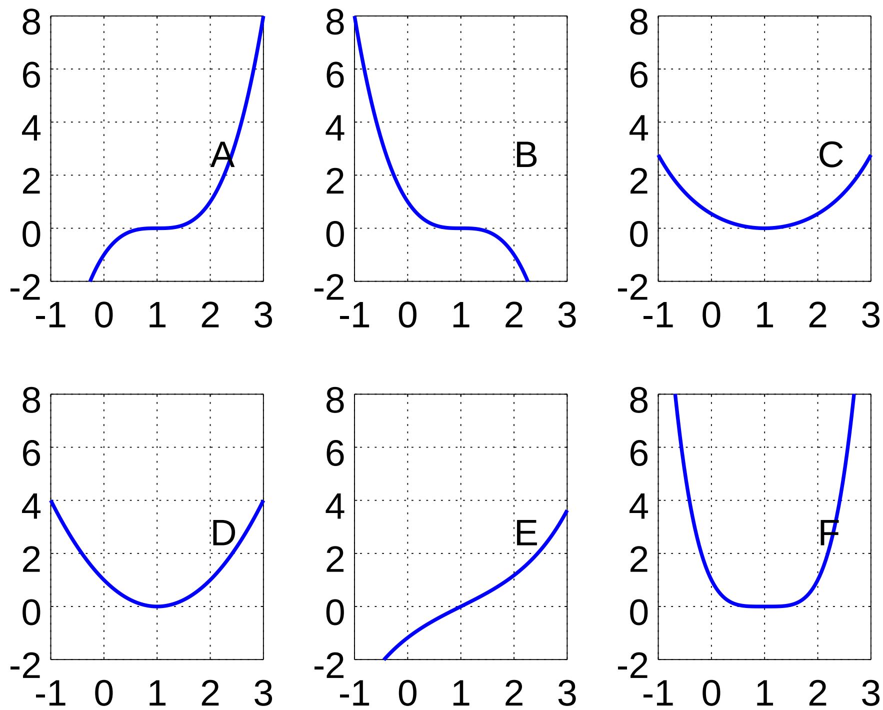
• Problème 5–31:

Pour les graphes ci–dessous trouver des fonctions avec autant de détail que possible. A disposition sont toutes types de fonction: polynôme, rationnelle, trigonométrique, exponentiel.



• Problème 5–32:
Vous trouver ci–dessous les graphes de six des dix fonctions données. Déterminer les paires des fonctions et graphes qui correspondent.

$$
\begin{array}{llll}
1: & f(x) = \cosh(x-1) & 2: & f(x) = \sinh(x-1) \\
3: & f(x) = \cosh(x-1) - 1 & 4: & f(x) = \sinh(x) - 1 \\
5: & f(x) = x - 1 & 6: & f(x) = 1 - x \\
7: & f(x) = (1-x)^3 & 8: & f(x) = (x-1)^3 \\
9: & f(x) = (x-1)^2 & 10: & f(x) = (1-x)^4
\end{array}
$$



5.5.4 Solutions pour quelques problèmes

Solution pour problème 5–1 :

(a) $x = -4$

(b) $x \in \{-7\,,\,1\}$

(c) $x = -5$

(d) $x \approx -1.2301$

(e) $x \approx -1.4823$

(f) $x \approx 31.972$

(g) $x \approx -5.1289$

(h) $x \approx -0.20273$

Solution pour problème 5–2 :

(a) $x \approx 6.651 \cdot 10^{-5}$

(b) $x \approx 212.31$

(c) $x = \frac{13}{8}$

(d) $x \approx 22.746$

(e) keine Lösung

(f) $x = a \cdot 10^b$

Solution pour problème 5–3 :

(a)

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

(b)

$$\begin{aligned} y &= \log_2 x^2 = 2\,\log_2 x = 2\,\frac{\ln x}{\ln 2} \\ \frac{y\,\ln 2}{2} &= \ln x \\ x &= \exp\left(\frac{y\,\ln 2}{2}\right) \end{aligned}$$

(c) Substitution $z = e^{3\,x}$

$$\begin{aligned} e^{6\,x} - e^{3\,x} - 6 &= 0 \\ z^2 - z - 6 &= (z-3)\,(z+2) = 0 \end{aligned}$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

À cause de $z = e^{3\,x} > 0$ on accepte que la solution $z = 3$ et donc

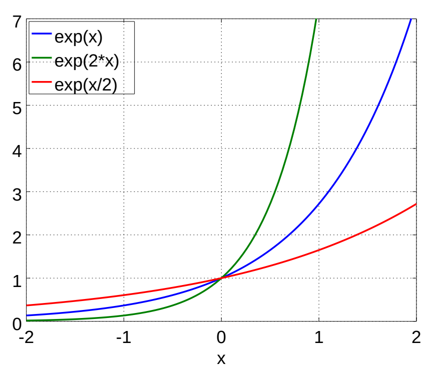
$$x = \frac{\ln z}{3} = \frac{\ln 3}{3}$$

Solution pour problème 5–4 : Les résultats sont identiques et à produire avec une réflexion à l'axe des y en Figure 5.1.

Solution pour problème 5–5 :

Octave

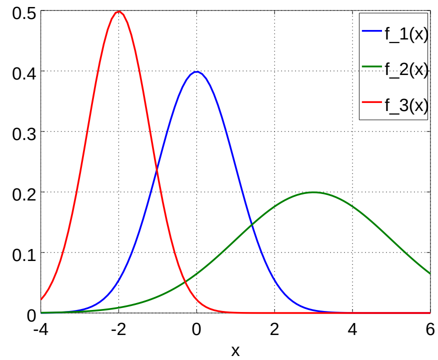
```
x = linspace(-2,2);
plot(x,exp(x),x,exp(2*x),x,exp(x/2))
xlabel("x")
grid on
axis([-2,2,0,7])
legend("exp(x)","exp(2*x)","exp(x/2)","location","northwest")
```



Solution pour problème 5–6 :

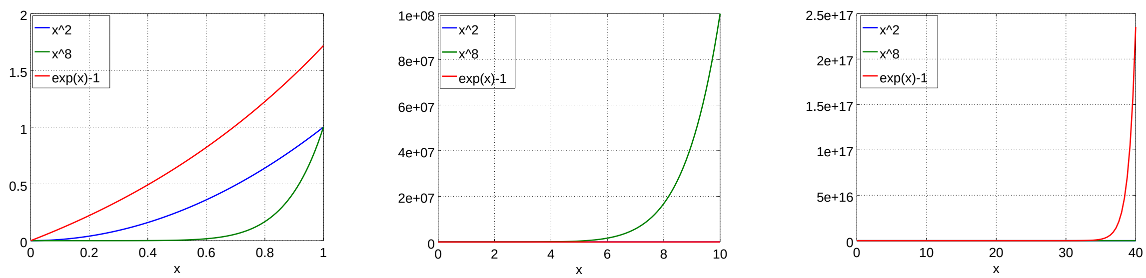
Octave

```
x  = linspace(-4,6);
y1 = 1/sqrt(2*pi)*exp(-x.^2/2);
y2 = 1/(2*sqrt(2*pi))*exp(-(x-3).^2/(2*2^2));
y3 = 1/(0.8*sqrt(2*pi))*exp(-(x+2).^2/(2*0.8^2));
plot(x,y1,x,y2,x,y3)
xlabel("x")
grid on
axis([-4,6,0,0.5])
legend("f_1(x)","f_2(x)","f_3(x)")
```



fonction	valeur moyenne	écart type
$f_1(x)$	0	1
$f_2(x)$	3	2
$f_2(x)$	-2	0.8

Solution pour problème 5–8 :



Solution pour problème 5–9 : Mettez $z = e^{3x}$ et puis l'équation quadratiques $z^2 + 7z + 12 = 0$ a les solutions $z = -3$ et $z = -4$. A cause de $e^x > 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ on n'a pas de solution de l'équation originale.

Solution pour problème 5–10 :

(a) Aufgrund der Definition der hyperbolischen Funktion gilt

$$y = \sinh(x) = \frac{1}{2}\,\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\,\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

wobei die Substitition $z = e^x$ verwendet wurde. Diese Bedingung kann zu einer quadratischen Gleichung für die Unbekannte z umgeformt werden.

$$2\,y\,z = z^2 - 1 \quad \text{oder auch} \quad z^2 - 2\,y\,z - 1 = 0$$

Die beiden Lösungen sind

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(+2\,y \pm \sqrt{4\,y^2 + 4}\right) = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Wegen $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ und $z = e^x > 0$ ist nur eine Lösung zulässig und wir erhalten

$$e^x = z_1 = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

und somit

$$x = \ln z = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = \ln\left(\sinh x + \sqrt{1 + \sinh^2 x}\right)$$

Somit ist die zu $y = \sinh x$ inverse Funktion gegeben durch

$$x = \operatorname{arcsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

(b) Die Überlegungen sind analog zur vorangehenden Teilaufgabe. Das Resulat kann in jeder guten Formelsammlung verifiziert werden.

Solution pour problème 5–11 :

$$\begin{aligned}
\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\,\cosh^2 x - 1 \\
\cosh(2x) + \cosh(x) &= 2\,\cosh^2 x - 1 + \cosh x = 3 \\
2\,\cosh^2 x + \cosh x - 4 &= 0 \\
2\,z^2 + z - 4 &= 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung für $z = \cosh x$ wird gelöst durch

$$z_{1,2} = \frac{1}{4}\,\left(-1 \pm \sqrt{1+32}\right)$$

Da $\cosh x \geq 1$ kommt nur die Lösung

$$z = \cosh x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$$

in Frage. Und somit sind

$$x = \pm\cosh^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right) \approx \pm 0.60106$$

die beiden (reellen) Lösungen des Problems.

Solution pour problème 5–12 :

(a) $\cosh\ x = 1 + \sqrt{3/2}$

(b) $x = \pm\text{arccosh}\ (1 + \sqrt{3/2})$

Solution pour problème 5–13 :

1. Falls $|A_1| > |A_2|$, dann gilt
$$f(x) = A\ \cosh(\lambda\,x + \varphi)$$
mit
$$A = \sqrt{A_1^2 - A_2^2} \quad , \quad \varphi = \text{arctanh}\ \frac{A_2}{A_1}$$

2. Falls $|A_1| < |A_2|$, dann gilt
$$f(x) = A\ \sinh(\lambda\,x + \varphi)$$
mit
$$A = \sqrt{A_2^2 - A_1^2} \quad , \quad \varphi = \text{arctanh}\ \frac{A_1}{A_2}$$

Solution pour problème 5–14 :

(a) 96.63 %

(b) 71 %

(c) $\approx$ 307 années

Solution pour problème 5–15 :

(a) Loi de refroidissement de Newton

$$\begin{aligned} T(t) &= 20 + 60\,e^{-\alpha\,t} \\ 60 &= 20 + 60\,e^{-\alpha\,10} \\ \alpha &= \frac{1}{10}\,\ln(60/40) = \frac{1}{10}\,\ln(3/2) \approx 0.040546 \end{aligned}$$

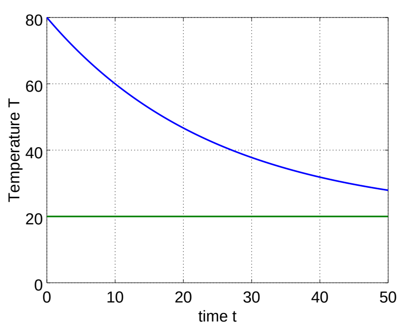
(b) On arrive à une fonction exponentielle, décroissante vers une asymptote horizontale au niveau $T_\infty = 20$. La constante de temps est $1/\alpha \approx 24.663$. Donc après 25 minutes la différence vers $t_\infty = 20$ sera divise par $e \approx 2.718$. La formule exacte est

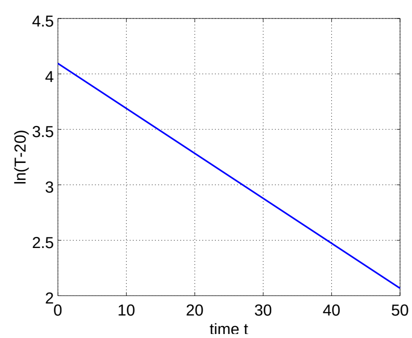
$$T(t) = 20 + 60\,e^{-0.040\,t}$$

(c) Il faut utiliser une échelle logarithmique pour l'axe des T, après la soustraction de 20.

$$\ln(T(t) - 20) = \ln(60\;e^{-\alpha\,t}) = \ln 60 - \alpha\,t \approx 4.09434 - 0.040546\,t$$

On y trouve la pente et la hauteur de l'intersection avec l'axe des T.





Solution pour problème 5–16 :

(a) $T = 20\,\left(1 + 4\,e^{-0.06931\,t}\right)$

(b) $25°$

(c) 14.2 min

Solution pour problème 5–17 : $t\,(t) = 23 - 8\,e^{-k\,t}$, $T\,(1) = 19$, $k = \ln 2$, $t = 6.32\;min$.

Solution pour problème 5–18 : Sei T die Differenz zur Aussentemperatur von $-10°\,C$, dann gilt

$$T\,(t) = c\,e^{-\lambda t}$$

für geeignete Konstanten λ und c. Diese sind zu bestimmen aus den gegebenen Daten

$$T\,(10) = 30 \quad \text{und} \quad T\,(30) = 27$$

Dazu betrachten wir

$$\begin{array}{rl} 30 & = c\,e^{-\lambda 10} \\ 27 & = c\,e^{-\lambda 30} \\ \hline 30/27 & = e^{\lambda 20} \end{array}$$

Die letzte Gleichung lässt sich nach λ auflösen mit dem Resultat

$$\lambda = \frac{\ln(30/27)}{20}$$

Die nach t aufzulösende Gleichung ist

$$10 = c\, e^{-\lambda\, t}$$

Dividieren wir die erste Gleichung durch die hier gegebene, so erhalten wir

$$30/10 = 3 = e^{\lambda\,(t-10)}$$

mit der Lösung

$$t = 10 + \frac{\ln\, 3}{\lambda} = 10 + \frac{20\,\ln\, 3}{\ln(30/27)} \approx 218.54\ [min]$$

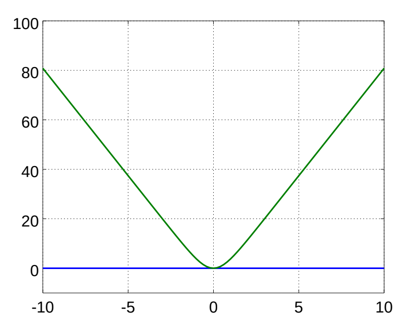
Solution pour problème 5–19 : Die Definition der Funktion $\cosh(x)$ und der Dezibelskala $(20\log())$ führen auf

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}) \\
20\,\log(\cosh(x)) &= 20\,\log\left(\frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})\right) \\
\text{falls}\quad x \gg 1 & \qquad e^{-x} \approx 0 \quad \text{im Vergleich zu } e^x \\
20\,\log(\cosh(x)) &\approx 20\,\log\left(\frac{1}{2}\,(e^x)\right) = 20\,\log\frac{1}{2} + 20\,\log(e^x) \\
&= -20\log 2 + 20\,\log(e)\,x
\end{aligned}$$

Wegen $\log 2 \approx 0.3$ und $\log(e) = \frac{\ln e}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \approx 0.434$ und der Symmetrie von $\cosh(x)$ haben wir

$$20\,\cosh(x) \approx -6 + 0.868\,|x| \quad \text{für} \quad |x| \gg 1$$

d.h. Geraden mit Achsenabschnitt ≈ -6 und Steigungen $\approx \pm 0.868$. Fur $x = \pm 10$ erhalten wir somit $20\,\cosh(\pm 10) \approx -6 + 10 \cdot 0.868 \approx 80.6$. Wegen $\cosh(0) = 1$ geht die Kurve bei $x = 0$ durch $y = 20\,\log(1) = 0$.



Solution pour problème 5–20 :

(a)

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

et donc

$$\ln x = \ln 2 \cdot \log_2 x$$

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{\ln 2 \cdot \log_2 x}{\ln 2 \cdot \log_2 10} = \frac{\log_2 x}{\log_2 10} = \log_{10} 2 \cdot \log_2 x$$

(b)

$$e^x = \left(2^{\log_2 e}\right)^x = 2^{x \log_2 e}$$

$$10^x = \left(2^{\log_2 10}\right)^x = 2^{x \log_2 10}$$

(c)

$$x^y = \left(2^{\log_2 x}\right)^y = 2^{y \log_2 x}$$

(d) Il s'agit des constantes utilisées dans le formules ci–dessus.

$$\log_2 e = \frac{1}{\ln 2} \qquad \log_{10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} = \frac{1}{\log_2 10}$$

Si ils sont rapidement a disposition il est efficace de les utiliser.

(e) Système binaires des nombres.

Solution pour problème 5–21 :

(a)

$$\begin{aligned} \cosh(2\,x) &= \cosh(x+x) \\ &= \cosh x \cosh x + \sinh x \sinh x \\ &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ &= \cosh^2 x + \cosh^2 x - 1 \\ &= 2\,\cosh^2 x - 1 \end{aligned}$$

(b) Substitution $z = \frac{x}{2}$ et puis

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \cosh(2\,z) \\ &= 2\,\cosh^2 z - 1 \end{aligned}$$

et donc

$$\cosh^2 z = \frac{1 + \cosh x}{2}$$

à l'aide de $\cosh z = \cosh \frac{x}{2} > 0$ on trouve

$$\cosh \frac{x}{2} = \cosh z = \sqrt{\frac{1 + \cosh x}{2}}$$

Solution pour problème 5–22 : Offensichtlich ist $\rho = 4\,\frac{kg}{m}$. Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems können wir die Funktion

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\ \cosh\ (\lambda\,x) \qquad -40 \le x \le 40$$

betrachten, wobei $\lambda = \rho g/H$. Da das Seil 100 m lang ist, gilt

$$50\,\lambda = \sinh(\lambda\,40)$$

Diese Gleichung kann mit dem HP–48 oder *Mathematica* gelöst werden, und man erhält

$$\lambda = \frac{\rho g}{H} \approx 0.0296\ \frac{1}{m}$$

und somit

(a)

$$y\,(x) = \frac{1}{\lambda}\;\cosh\;(\lambda\,x)$$

(b)

$$H = \frac{\rho\,g}{\lambda} \approx \frac{4\cdot 9.81}{0.0296}\;N \approx 1327\;N$$

(c)

$$y\,(40\,m) - y\,(0\,m) = \frac{1}{\lambda}\;(\cosh\,(\lambda\,40\,m) - 1) \approx 26.5\,m$$

Solution pour problème 5–23 : Die vertikale Dezibelskala impliziert, dass $20\,\log(y)$ aufgetragen wird. Horizontal liegt einen logarithmische Skala vor.

(a) Eine Gerade in einer doppelt logarithmischen Graphik entspricht einer Potenzfunktion. In der Graphik liest man leicht ab, dass

$$x = 10^6 \quad\to\quad \log x = 6 \quad\to\quad 20\,\log(g(x)) = 0$$

$$x = 10^7 \quad\to\quad \log x = 7 \quad\to\quad 20\,\log(g(x)) = -20$$

Die Gerade fällt um 20 Dezibel pro Dekade in x und bei $x = 10^6$ ist $\log(g(10^6)) = 0$

$$\begin{aligned}
20\,\log(g(x)) &= a + m\cdot\log(x)\\
&= 120 - 20\cdot\log(x)\\
\log(g(x)) &= 6 - \log(x)\\
g(x) &= 10^6\cdot 10^{-\log(x)} = 10^6\cdot x^{-1}
\end{aligned}$$

(b) Für kleine Werte von x gilt $20\,\log(g(x)) \approx 40$ und somit $g(x) \approx 100$. Für grosse Werte von x muss die obige Approximation von $f(x) \approx \frac{10^6}{x}$ richtig sein. Es gibt einfache rationale Funktionen, welche diese beiden Bedingungen erfüllen.

$$f(x) = \frac{A}{B+x} = \frac{10^6}{10^4+x}$$

Solution pour problème 5–24 :

(a) Eine Gerade auf einer doppelt–logarithmischen Skala entspricht einer Abhängigkeit der Form

$$A\,(\nu) = b\cdot\nu^a$$

weil durch logarithmieren die Gleichung

$$\log\;A\,(\nu) = \log\;b + \log\;\nu^a = \log\;b + a\cdot\log\;\nu$$

entsteht. Da die y-Werte in einer Dezibelskala angegeben sind, ist $\log A$ noch mit 20 zu multiplizieren und $y = 20\;\log A$ aufzutragen.

(b) Bei $\nu = 10^6$ liest man $y = -77\,db$ ab und bei $\nu = 10^7$ findet man $y = -117\,db$. Über diesen Bereich ändert sich $\log \nu$ um 1 und $\log A(\nu)$ um -2. Also ist die Steigung $a = -2$ und dies entspricht somit einer ursprünglichen Funktion der Form

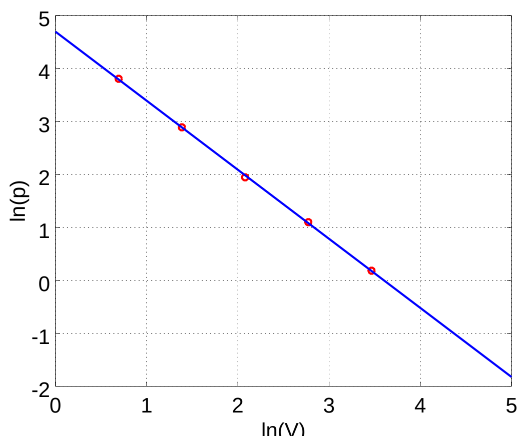
$$A(\nu) = b \cdot \nu^{-2} = \frac{b}{\nu^2}$$

Solution pour problème 5–25 : Die Gleichung ist in die Form $p = c\ V^{-\kappa} = c\ e^{-\kappa\ \ln(V)}$ umzuschreiben. Somit ist

$$\ln(p) = \ln(c) - \kappa \ln(V)$$

Man hat also zwei Möglichkeiten

1. die Werte von p und V auf doppelt logarithmischem Papier auftragen
2. oder $\ln p$ und $\ln V$ auf „normalem“ Papier auftragen



Aus der Graphik liest man ab, dass $\ln c \approx 4.7$ und $\kappa \approx 1.3$. Es ergibt sich also $c \approx 110$.

Solution pour problème 5–26 : Die Gleichung ist in die Form $p = c\ V^{-\kappa} = c\ e^{-\kappa\ \ln(V)}$ umzuschreiben. Somit ist

$$\ln(p) = \ln(c) - \kappa \ln(V)$$

Man hat also zwei Möglichkeiten

1. die Werte von p und V auf doppelt logarithmischem Papier auftragen
2. oder $\ln(p)$ und $\ln(V)$ auf „normalem“ Papier auftragen

Dann ist $-\kappa$ als Steigung der entstehenden Geraden abzulesen. Die Antwort sollte $\kappa \approx 1.2$ sein.

Solution pour problème 5–27 :

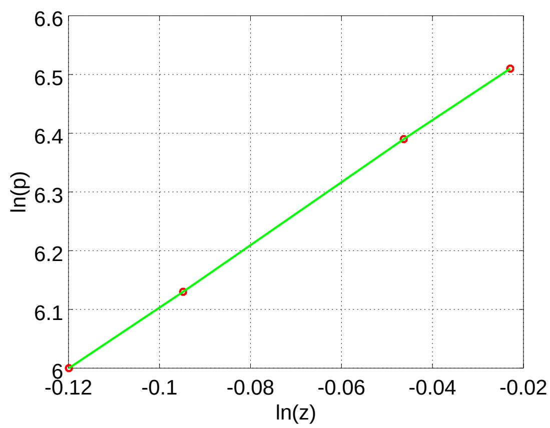
Die gegebene Lösung verwendet den natürlichen Logarithmus $\ln$, analoge Rechnungen können auch mit dem Logarithmus zur Basis 10 $\log$ durchgeführt werden.

$$\begin{aligned}
p\,(h) &= p_0\,(1-\alpha\,h)^\kappa \\
p\,(z) &= p_0\,z^\kappa \\
\ln p\,(z) &= \ln p_0 + \kappa\,\ln z
\end{aligned}$$

h in km	z	p in Torr
1	0.997	674.12
2	0.954	596.28
4	0.910	462.46
5	0.887	405.37

$\ln z$	$\ln p$
-0.0229	6.51
-0.0463	6.39
-0.0948	6.13
-0.1199	6.00

Somit kann eine doppelt–logarithmische Skala verwendet werden. Dazu sind die Logarithmen von z und p zu bestimmen. Diese Daten können nun aufgetragen werden und man finden eine Gerade mit Steigung $\kappa \approx 5.25$ und $\ln p_0 \approx 6.633$. Das führt auf eine Druck von $p_0 \approx e^{6.633} \approx 760\ [Torr]$.

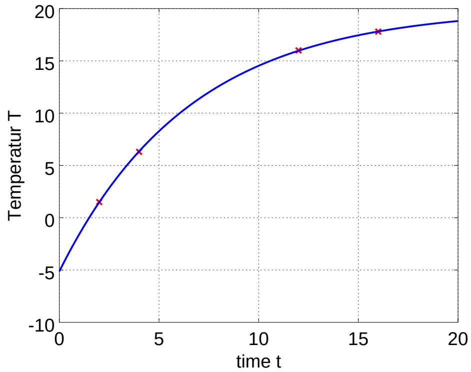


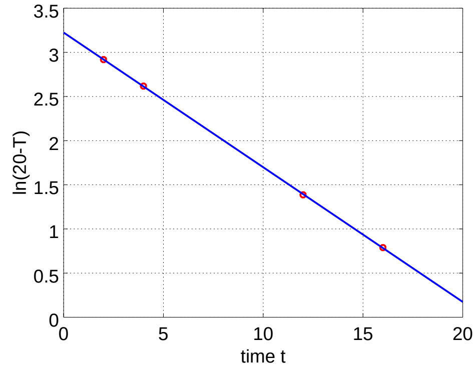
Solution pour problème 5–28 : La température tend vers 20, d'une façon exponentielle, donc $T(t) = 20 - c\,e^{-\alpha t}$. Ajouter des colonnes au table avec les valeurs de $(20-T)$ et $\ln(20-T)$.

t	T	20-T	$\ln(20-T)$
2	1.5	18.5	2.92
4	6.3	13.2	2.62
12	16.0	4.0	1.39
16	17.8	2.2	0.79

Produire les graphique ci–dessous pour visualiser.

(a) A cause de $\ln(20-T) = \ln(c\,e^{-\alpha t}) = \ln c - \alpha\,t$ les valeurs de $\ln(20-T)$ comme fonction de t devrait se trouver sur une droite.





(b) Pour cette droite on trouve l'intersection avec l'axe verticale $\ln c \approx 3.2$ et une pente de $-\alpha \approx -0.15$. Donc on trouve $T(0) = 20 - c \approx 20 - e^{3.2} \approx -4.5$.

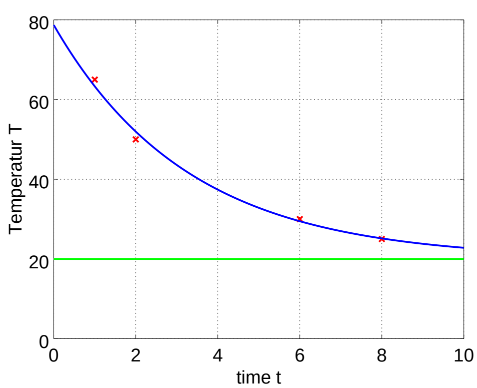
(c) A couse de $\alpha \approx 0.15$ on trouve
$$T(t) \approx 20 - 4.5\, e^{-0.15\,t}$$

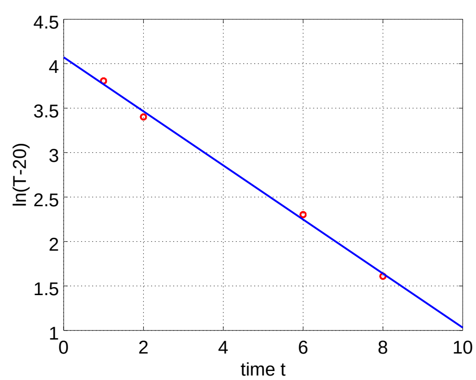
Solution pour problème 5–29 : La température tend vers 20, d'une façon exponentielle, donc $T(t) = 20 - c\, e^{-\alpha t}$. Ajouter des colonnes au table avec les valeurs de $(T - 20)$ et $\ln(T - 20)$.

t	T	T-20	$\ln(T-20)$
1	65	45	3.80666
2	50	30	3.40120
6	30	10	2.30259
8	25	5	1.60944

Produire les graphique ci–dessous pour visualiser.

(a) A cause de $\ln(T-20) = \ln(c\, e^{-\alpha t}) = \ln c - \alpha\, t$ les valeurs de $\ln(T-20)$ comme fonction de t devrait se trouver sur une droite.





(b) Pour cette droite on trouve l'intersection avec l'axe verticale $\ln c \approx 4$ et une pente de $-\alpha \approx -0.3$. Donc on trouve $T(0) = 20 + c \approx 20 + e^{4} \approx 74.6$.

(c) A cause de $\alpha \approx 0.3$ on trouve
$$T(t) \approx 20 + 54.6\, e^{-0.3\,t}$$

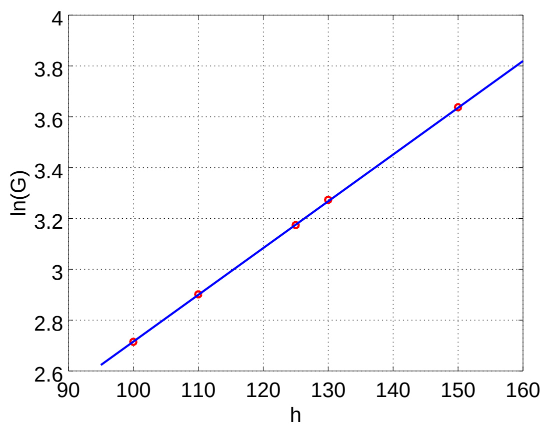
Solution pour problème 5–30 :
Es gilt

$$\ln G = \ln\left(c\,e^{\alpha\,h}\right) = \ln c + \alpha\,h$$

Trägt man statt des Gewichtes G den Logarithmus auf, so sollte eine Gerade entstehen, deren Steigung den Wert von α liefert. Die Zahlenwerte sind so, dass der Achsenabschnitt $\ln c$ nur sehr ungenau (wenn überhaupt) abgelesen werden kann. Es empfiehlt sich diesen mittels eines Punktes auf der Geraden zu berechnen. Als Resultat erhält man $c = 2.4$ und $\alpha = 0.0184$

h in cm	G in kg	$\ln G$
100	15.1	2.71
110	18.2	2.90
125	23.9	3.17
130	26.4	3.27
150	38.0	3.64

Octave
```
h = [100 110 125 130 150];
G = [15.1 18.2 23.9 26.4 38.0]
h_lin = linspace(95,160);
plot(h, log(G),'or', h_lin, log(2.4) + 0.0184*h_lin)
xlabel("h"); ylabel("ln(G)")
```



Solution pour problème 5–31 : Für diese Aufgaben sind verschiedene Lösungen möglich.

A:	$f(x) = 1 + 3\,\sin(\pi\,x)$	Amplitude, Periode, Verschiebung
B:	$f(x) = e^x$	Exponentialfunktion, Steigung
C:	$f(x) = 1 + (x-2)^2$	Parabel, Scheitel, Öffnung
D:	$f(x) = 1 - \frac{0.2}{x-1}$	Polstelle, Asymptote
E:	$f(x) = 1 - (x-2)^2$	Parabel, Scheitel, Öffnung
F:	$f(x) = 3\,e^{-x^2}$	Glockenkurve, ev. gebrochen rational

Solution pour problème 5–32 :

$$A \leftrightarrow 8 \quad , \quad B \leftrightarrow 7 \quad , \quad C \leftrightarrow 3 \quad , \quad D \leftrightarrow 9 \quad , \quad E \leftrightarrow 2 \quad , \quad F \leftrightarrow 10$$

5.6 Récapitulation

Après ce chapitre on doit

- savoir esquisser les graphes des fonctions $e^{k\,x}$ et $\ln(x)$.
- savoir appliquer les règles de calculs des fonction exponentiel et logarithmique.
- savoir résoudre des équations logarithmique et exponentielle.
- savoir calculer avec des fonction de base arbitraire.
- Savoir lire de l'information sur des fonction exponentielles et logarithmiques dans des graphes.

Chapitre 6

Suites, séries et continuité

Nous allons considérer dans ce chapitre des suites de nombres réels. Nous allons introduire la notation d'une **limite** et de **convergence**. Ces deux définitions sont liées aux notations de base de l'analyse mathématique: l'approximation, la dérivée, l'intégral, séries de Taylor, séries de Fourier, etc.

On considère les notation de base á l'aide d'un exemple.

De la distribution des valeurs d'une fonction $y = f(x)$, on obtient des indications sur les valeurs de x pour lesquelles on a $f(x) = 0$. On obtient une approximation de la vraie solution.

Essayer de trouver une solution z entre 0 et 2 de l'équation $f(x) = x^4 - x^3 - 1 = 0$. En figure 6.1 vous trouvez le graphe de cette fonction:

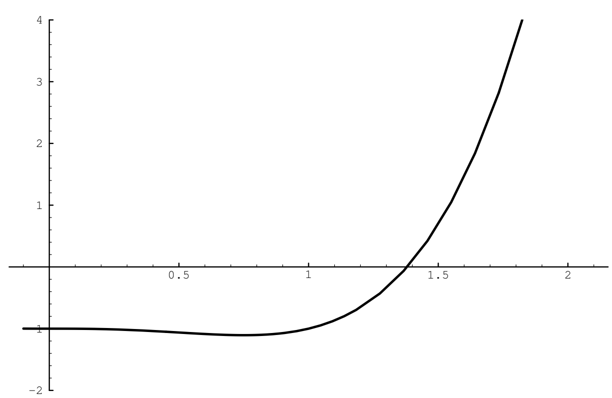


Figure 6.1: Bisection

L'idée pour cette méthode est simple: on commence avec un intervalle $[x_0, x_1]$ tel que $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. La fonction f change le signe dans l'intervalle. Puis on calcule f au centre x_2 de cet intervalle. Si $f(x_2) = 0$ on a une solution, sinon on a $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$ ou $f(x_0) \cdot f(x_2) > 0$. Ça veut dire qu'on peut recommencer avec l'intervalle $[x_0, x_2]$ ou $[x_2, x_1]$ et on cherche un zéro dans cet intervalle. Avec cette iteration on construit un emboîtement des intervalles et la longueur des intervalles tend vers 0, et on obtient des approximations de la vraie solution.

On choisit $x_0 = 0$ et $x_1 = 2$ et obtient

$$f(x_0) = -1 < 0 \qquad f(x_1) = 7 > 0$$

puis il est facile de voir qu'on a une solution entre x_0 et x_1. Essayons le centre $x_2 = (x_0 + x_1)/2$. On a

$f(x_2) = -1 < 0$.

x_2=1	$f(x_2) < 0$	$x_3 = (x_2 + x_1)/2$	$z \in [x_2, x_1]$
x_3=1.5	$f(x_3) > 0$	$x_4 = (x_3 + x_2)/2$	$z \in [x_2, x_3]$
x_4=1.25	$f(x_4) < 0$	$x_5 = (x_3 + x_4)/2$	$z \in [x_4, x_3]$
x_5=1.375	$f(x_5) < 0$	$x_6 = (x_5 + x_3)/2$	$z \in [x_5, x_3]$
x_6=1.4375	$f(x_6) > 0$	$x_7 = (x_5 + x_6)/2$	$z \in [x_5, x_6]$
x_7=1.40625	$f(x_7) > 0$	$x_8 = (x_5 + x_7)/2$	$z \in [x_5, x_7]$
x_8=1.390625	...		
...			

La suite des valeurs $x_1, x_2, x_3 \ldots$ se rapproche de la vraie solution $z = 1.38027756\ldots$. Vérifier que la différence entre x_n et z est plus petite que $2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. On dit que la suite x_n converge vers z.

La méthode de bisection est très simple, mais quand même on ne l'utilise pas souvent. On doit calculer trop d'itérations pour arriver à un résultat assez précis, la suite converge plus lentement que pour des autres méthodes.

6.1 Suites et séries des nombres

6.1.1 Définitions et résultats de base

6–1 Définition : Une **suite** infinie est une fonction d'une variable (qu'on note généralment n), dont le domaine est l'ensemble des entiers positifs $\mathbb{N}$.

6–2 Définition : Si on donne à n successivement les valeurs $1, 2, 3, 4\ldots$, la fonction $f(n) = \frac{1}{n+1}$ forme la suite de termes $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ .... La valeur de la fonction $\frac{1}{n+1}$ est appelée **terme général** ou n**ième terme** de la suite.

On note une suite en mettant le terme général entre accolades, par exemple $\{\frac{1}{n+1}\}$ ou en indicant plusieurs termes de la suite, par exemple $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots$.

6–3 Exemple : Vérifier dans les exemples suivants qu'on a deux notations differentes pour la même suite.

- $\{n^2\}$ correspond à $1, 4, 9, 16, \ldots$.
- $\{1 - 1/n\}$ correspond à $0, 1/2, 2/3, 3/4, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$.
- $\{\frac{2n}{n^2+1}\}$ correspond à $1, 4/5, 6/10, 8/17, 10/26, 12/37, \ldots$.
- $1/1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, \ldots$ correspond à $\{1/n^2\}$.
- $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \ldots$ correspond à $\{n(n+1)/2\}$.
- $1/4, -1/7, 1/10, -1/13, 1/16\ldots$ correspond à $\{(-1)^{n+1}/(3n+1)\}$.

♢

6–4 Définition : On a quelques propriétés simples des suites:

- Une suite $\{s_n\}$ est dite **bornée** s'ils existent deux nombres P et Q, tels que $P \leq s_n \leq Q$ pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$.
- Une suite $\{s_n\}$ est dite **croissante** si $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4 \leq s_5 \leq s_6 \leq \ldots$
- Une suite $\{s_n\}$ est dite **décroissante** si $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq s_4 \geq s_5 \geq s_6 \geq \ldots$
- Une suite $\{s_n\}$ est dite **strictement croissante** si $s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5 < s_6 < \ldots$
- Une suite $\{s_n\}$ est dite **strictement décroissante** si $s_1 > s_2 > s_3 > s_4 > s_5 > s_6 > \ldots$
- Une suite est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

6–5 Définition : On dit que la suite $\{s_n\}$ **converge vers le nombre** L, ou admet L pour **limite**, si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, aussi petit soit-il, il existe un entier m tel qu'on a $|s_n - L| \leq \varepsilon$ pour n'importe quel $n \geq M$. On écrit

$$s_n \to L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = L$$

Si la suite admet une limite, on dit que la suite est **convergente**; dans le cas contraire, on dit que la suite est **divergente**.

6–6 Définition : On dit que la suite $\{s_n\}$ **tends vers l'infini**, $s_n \to \infty$, si pour tout nombre M, aussi grand qu'il soit, il existe un entier m tel qu'on a $s_n \geq M$ pour n'importe quel $n \geq M$.

Selon les définitions ci–dessus il peut apparaître un problème d'interprétation. En effet, une suite qui converge vers ∞ est divergente. A cause de ça il est avantageuse de ne pas utiliser la convergence vers l'infini.

6–7 Résultat :

- *Soit $\{s_n\}$ une suite. On a $s_n \to 0$ si et seulement si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, aussi petit soit-il, il existe un entier m tel qu'on a*

$$|s_n| \leq \varepsilon \quad \textit{pour n'importe quel} \quad n \geq m$$

- *Une suite convergente est bornée.*
- *Une suite convergente a une seule limite.*
- *Si $a_n \geq M$ et $a_n \to a$, puis on a $a \geq M$.*
- *Soit N un nombre entier positif. Une suite convergente (resp. divergente) reste convergente (resp. divergente) si l'on change certains ou tous les termes parmi les N premiers.*

Ci-dessous trouver quelques exemples des suites. Les démonstration se base sur les définitions ci-dessus. Le résultat 16 va mettre à notre dispositions des calculs plus simples à utiliser.

6–8 Définition : $[\,x\,]$ est la partie entière de $x \in \mathbb{R}$, par exemple $[2.5] = 2$ et $[5.15] = 5$.

6–9 Exemple :

(a) La suite $\{1/n^2\}$ tend vers 0.
Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ un nombre positif. If faut trouver les $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|s_n| = \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon$$

Cette condition est équivalente à

$$n^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad n \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Si nous choisissons pour le ε donné un nombre entier

$$m = [\,1/\sqrt{\varepsilon}\,] + 1$$

on arrive à

$$|s_n| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad n \geq m.$$

Si on change le ε au–dessus, il faut aussi changer le m. Habituellement on doit construire le m pour le ε donné. □

(b) La suite $\{1/(n^2 + 2n + 2)\}$ tend vers 0.
Démonstration :
Variante 1: On utilise la même méthode comme au–dessus. Les calculs nécessaires sont plus compliquées.
Variante 2: On utilise le résultat en haut. Parce que

$$n^2 + 2n + 2 \geq n^2 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

on a

$$|s_n| = \frac{1}{n^2 + 2n + 2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut choisir exactement le même m comme dans l'exemple au–dessus et on arrive à

$$|s_n| = \frac{1}{n^2 + 2n + 2} < \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad n \geq m.$$

□

♢

6–10 Définition : Un **emboîtement des intervalles** consiste en deux suites des nombres réels a_n et b_n tels que

1. a_n est une suite croissante.
2. b_n est une suite décroissante.
3. $a_n \leq b_n$ pout tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $b_n - a_n$ converge vers 0.

6–11 Exemple : Montrer que la représentation décimale de $\sqrt{2}$ peut produire un emboîtement des intervalles, tel que $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ et $a_n < \sqrt{2} < b_n$. ♢

Le théorème suivant montre la différence la plus importante entre les nombres rationnels et les nombres réels. Les deux résultats sont faux si on n'utilise que des nombres rationnels.

6–12 Théorème : *Charactérisation des nombres réelles* $\mathbb{R}$
Les deux résultats ci–dessous sont correctes et équivalent.
(a) Pour chaque emboîtement des intervalles en $\mathbb{R}$ *il existe un seul nombre* $x \in \mathbb{R}$, *tel que*

$$a_n \leq x \leq b_n \quad \text{pout tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

(b) Toute suite monotone bornée converge vers une limite en $\mathbb{R}$.

Maintenant on peut prouver le résultat suivant.

6–13 Résultat : *Soient* $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *deux suites et*

$$a_n \to 0 \quad \text{et} \quad |b_n| \leq a_n \qquad \text{pour tout} \quad n \geq n_0$$

pour un nombre $n_0 \in \mathbb{N}$. *Puis il est vrai que*

$$b_n \to 0 \qquad .$$

Voici un théorème similaire, qui sera très utile pour calculer des limites difficile.

6–14 Théorème : *(Sandwich)*
Soient $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *et* $\{c_n\}$ *trois suites avec*

$$a_n \to L \quad , \quad c_n \to L \quad \text{et} \quad a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{pour tout} \quad n \geq n_0$$

pour un nombre $n_0 \in \mathbb{N}$. *Puis il est vrai que*

$$b_n \to L$$

La graphique ci–dessous donne une illustration pour ce résultat.

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_n & \leq & b_n & \leq & c_n \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ L & & & & L \end{array}\right\} \Longrightarrow b_n \longrightarrow L$$

6–15 Exemple : Verifier que la suite

$$a_n = \frac{1}{n+1}\ \cos\left(n^2 - \sinh\left(n-1\right)\right)$$

converge vers 0. ♢

6–16 Théorème : *(Règles de calcul pour des limites)*
Soient $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *deux suites convergentes avec*

$$a_n \to A \quad \text{et} \quad b_n \to B$$

Puis on a

(a) $a_n + b_n \to A + B$

(b) $c \cdot a_n \to c \cdot A$, c *étant une constante quelconque.*

(c) $a_n \cdot b_n \to A \cdot B$

(d) $a_n / b_n \to A/B$ *si* $B \neq 0$ *et* $b_n \neq 0$ *pour tout* n.

Ce théorème est très utile pour calculer des limites difficiles, on va l'utiliser souvent. Il rest a trouver un ensembles de bases des limites connues.

6–17 Résultat : *Suite géométrique*
Soient $r \in \mathbb{R}$ *et* $a_n = r^n$. *Puis on a*

(a) $a_n \to 0$ *si* $|r| < 1$.

(b) a_n *est divergente si* $|r| > 1$.

Démonstration :

(a) Regardons le cas $0 < r < 1$. Puis on sait que $0 < a_{n+1} = r\,a_n < a_n$. On sait que $a_n = r^n$ est une suite monotone et positive, donc convergente. Si $a_n \to A$ on regarde

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{et} \quad A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = r \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = r \cdot A$$

pour voir que $A \cdot (1 - r) = 0$ et puis $A = 0$.
Pour $-1 < r < 0$ on peut utiliser le théorème du Sandwich et $-|r|^n \leq a_n \leq |r|^n$.

(b) Avec des idées similaire on peut verifier que la suite $a_n = r^n$ n'est pas bornée si $|r| > 1$.

$\square$

6–18 Exemple :

(a) Si $c \geq 1$ et $a_n = \sqrt[n]{c}$ on a $a_n \to 1$.

(b) $a_n = \sqrt[n]{1 + x^n}$ pour un $0 < x \leq 1$ on a $a_n \to 1$.

(c) $a_n = \sqrt[n]{1 + x^n}$ pour un $x > 1$ on a $a_n \to x$.

(d) $\sqrt[n]{n} \to 1$

$\diamondsuit$

Démonstration :

(a) Utiliser $\alpha_n = a_n - 1$ et montrer que $\alpha_n \to 1$. A cause de l'inégalité de Bernoulli on a

$$c = a_n^n = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n \cdot \alpha_n$$

et donc

$$0 \leq \alpha_n \leq \frac{c-1}{n} \to 0$$

et le théorème du sandwich implique que $\alpha_n \to 0$.

(b) Regarder les inégalités

$$\sqrt[n]{1} \leq a_n \leq \sqrt[n]{1+1} = \sqrt[n]{2}$$

et utiliser le théorème du sandwich.

(c) Regarder les inégalités

$$x = \sqrt[n]{x^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{x^n + x^n} = \sqrt[n]{2}\, x$$

et utiliser le théorème du sandwich.

(d) L'inégalité de Bernoulli dit que

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n} \geq \sqrt{n} \geq 1$$

et donc

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2\,n} \geq n \geq 1$$

La n-ième racine de cette inégalité rend

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \geq \sqrt[n]{n} \geq 1$$

Puis avec

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 1 \cdot 1 = 1$$

et on arrive au résultat.

□

6–19 Résultat : *Soit* $a_n = f\,(n) = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ *pour une fonction rationnelle* f.

- *Si* f *est une fonction rationnelle* **propre**, *on a*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- *Si le degré de* P *est plus grand que le degré de* Q, *la suite* a_n *est divergente.*
- *Si le degré de* P *est égale au degré de* Q, *la suite* a_n *converge vers un nombre* $L \neq 0$.

Démonstration : Cette preuve est simple, regarder quelques exemples comme illustrations. □

6–20 Exemple : Pour trouvel la limite de la suite

$$a_n = \frac{n^3 - 17\,n^2 + 13}{2\,n^3 + 177\,n + 4711}$$

utiliser les transformations et règles de calcul

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1/n^3}{1/n^3}\,\frac{n^3 - 17\,n^2 + 13}{2\,n^3 + 177\,n + 4711} = \frac{1 - 17\,\frac{1}{n} + 13\,\frac{1}{n^3}}{2 + 177\,\frac{1}{n^2} + 4711\,\frac{1}{n^3}} \\
1 - 17\,\frac{1}{n} + 13\,\frac{1}{n^3} &\longrightarrow 1 - 17 \cdot 0 + 13 \cdot 0 = 1 \\
2 + 177\,\frac{1}{n^2} + 4711\,\frac{1}{n^3} &\longrightarrow 2 + 177 \cdot 0 + 4711 \cdot 0 = 2 \\
a_n &\longrightarrow \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

6–21 Problème : Soit $a_1 = 2$. Construire une suite par la formule

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2}.$$

Il est facile à voir que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Prouver que $a_n^2 \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Vérifier que la suite est décroissante et alors convergente.

(c) Trouver la limite.

Les exercices 6–10 demandent les mêmes calculs.

Démonstration : On utilise des calculs simples (mais longs).

(a) Examiner

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^2 \geq 2 \iff & \left(\tfrac{1}{a_n} + \tfrac{a_n}{2}\right)^2 \geq 2 \\
\iff & \tfrac{1}{a_n^2} + 1 + \tfrac{a_n^2}{4} \geq 2 \\
\iff & \tfrac{1}{a_n^2} - 1 + \tfrac{a_n^2}{4} \geq 0 \\
\iff & \left(\tfrac{1}{a_n} - \tfrac{a_n}{2}\right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Donc on sait que $a_{n+1}^2 \geq 2$.

(b)

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \leq a_n \iff & \tfrac{1}{a_n} + \tfrac{a_n}{2} \leq a_n \\
\iff & \tfrac{1}{a_n} - \tfrac{a_n}{2} \leq 0 \\
\iff & 1 - \tfrac{a_n^2}{2} \leq 0 \\
\iff & a_n^2 \geq 2
\end{aligned}$$

Donc on sait que a_n est une suite décroissante et bornée, puis convergente.

(c) Soit $a_n \to A \geq 1$. Avec les règles de calcul on obtient donc

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2}\right) = \frac{1}{A} + \frac{A}{2}$$

et puis

$$A = \frac{1}{A} + \frac{A}{2}$$

cette équation est équivalente à $A^2 = 2$ et donc $A = \sqrt{2}$.

Cette itération est une méthode rapide pour calculer des approximations de $\sqrt{2}$, en n'utilisant que des multiplications et divisions. On va retrouver cette idée plus tard sous le nom de **méthode de Newton**. □

6–22 Exemple : (Somme géométrique)
Soit $|q| < 1$ et $a \in \mathbb{R}$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a\, q^k = a\,(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n)$$

Vérifier que cette suite est convergente et calculer la limite.

Solution: Examiner la difference entre s_n et $q\, s_n$.

$$\begin{array}{rclllllllll|l}
\frac{s_n}{a} & = & 1 & +q & +q^2 & +q^3 & +q^4 & +\ldots+ & q^n & & & + \\
q\,\frac{s_n}{a} & = & & +q & +q^2 & +q^3 & +q^4 & +\ldots+ & q^n & +q^{n+1} & & - \\
\hline
(1-q)\,\frac{s_n}{a} & = & 1 & & & & & & & -q^{n+1} & &
\end{array}$$

Donc on a pour $q \neq 1$

$$s_n = \frac{a\,(1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

A cause de $|q| < 1$ on a $q^{n+1} \to 0$ pour $n \to \infty$ et donc

$$s_n \to \frac{a}{1-q} \quad \text{pour} \quad n \to \infty$$

♢

6–23 Exemple : Soit

$$s_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Vérifier que cette suite est croissante et bornée. Puis il existe un nombre e (Euler) tel que $s_n \to e = 2.71828182845904523536\ldots$. En utilisent la définition $0! := 1$ on peut écrire

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Solution: A cause de

$$s_n = s_{n-1} + \frac{1}{n!}$$

la suite est monotone croissante. À l'aide d'une suite géométrique comme majorante on arrive a

$$\begin{aligned} s_n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n!} \\ &\leq 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+2=3 \end{aligned}$$

Donc la suite monotone est bornée et puis à l'aide de le characterisation de $\mathbb{R}$ en théorème 6–12 convergente. $\diamondsuit$

6–24 Résultat : *Le nombre e n'est par rationnal ($e \notin \mathbb{Q}$).*

Démonstration : Par contradiction.
Assomption: $e = a/b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$
Puis on sait que $b \cdot e \in \mathbb{N}$ et donc $b! \cdot e \in \mathbb{N}$. En utilisant

$$s_b = \sum_{k=0}^{b}\frac{1}{k!} \quad , \qquad r_b = \sum_{k=b+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

on a

$$b! \cdot e = b! \cdot s_b + b! \cdot r_b$$

Il est évident que $b! \cdot s_b \in \mathbb{N}$ et donc $b! \cdot r_b \in \mathbb{N}$. Mais il est aussi vrai que

$$\begin{aligned} b! \cdot r_b &= \sum_{k=b+1}^{\infty}\frac{b!}{k!} \\ &< \sum_{k=b+1}^{\infty}\frac{1}{(b+1)^{k-b}} \\ &< \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(b+1)^{j}} = \frac{1}{b+1}\,\frac{1}{1-\frac{1}{b+1}} \\ &= \frac{1}{b} < 1 \end{aligned}$$

Donc on a un nombre naturel, mais plus petit que 1. Ça ne peut pas être correct. Donc l'assomption doit être faux. $\square$

6.1.2 Sous–suites

6–25 Définition : Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres et $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction croissante. Puis la nouvelle suite

$$b_n = a_{k\,(n)}$$

est une **sous–suite** de la suite $\{a_n\}$.

6–26 Exemple : Regarder la suite $a_n = 1/n$ et la fonction $k\,(n) = 3n$. Puis $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et croissante et $b_n = a_{k\,(n)} = 1/(3n)$ est une sous–suite de a_n. $\diamondsuit$

6–27 Exemple : Verifier que

$$\sin(1) \quad , \quad \sin(4) \quad , \quad \sin(9) \quad , \quad \sin(16) \quad , \quad \sin(25) \quad \ldots$$

est une sous–suite de

$$\sin(1) \quad , \quad \sin(2) \quad , \quad \sin(3) \quad , \quad \sin(4) \quad , \quad \sin(5) \quad \ldots$$

Mais

$$\sin(2) \quad , \quad \sin(1) \quad , \quad \sin(4) \quad , \quad \sin(3) \quad , \quad \sin(6) \quad \ldots$$

n'est pas une sous–suite de

$$\sin(1) \quad , \quad \sin(2) \quad , \quad \sin(3) \quad , \quad \sin(4) \quad , \quad \sin(5) \quad \ldots$$

$\diamondsuit$

6–28 Théorème : *Un suite a_n est convergente vers L si et seulement si chaque sous–suite converge vers L.*

6–29 Exemple : La suite $a_n = (-1)^n$ ne converge pas, parce que la sous–suite $b_n = a_{2n}$ converge vers 1, mais la sous–suite $c_n = a_{2n+1}$ converge vers -1. $\diamondsuit$

6.1.3 Séries des nombres

Définitions de base et exemples simples

6–30 Définition : Soit a_k une suites des nombres et on regarde

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Cette nouveau suites est appelée une **série**. s_n est dite la n–ième **somme partielle**. On dit que la série converge, si la suite s_n converge et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Si on sait qu'une série converge on écrit aussi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \quad .$$

6–31 Exemple : (Série arithmétique)
Soit c et d des nombres fixe et on regarde $a_k = c + k\,d$. Puis on regarde la **somme arithmétique**

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (c + k\,d)$$

Verifier que cette série ne converge pas, puis elle est divergente. ♢

6–32 Exemple : (Série géométrique)
Soit c et q des nombres fixe et on regarde $a_k = c\,q^k$. Puis on regarde la **somme géométrique**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (c\,q^k)$$

Verifier que cette série converge si $|q| < 1$ et trouver la limite.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (c\,q^k) = \lim_{n\to\infty} c\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{c}{1-q}$$

♢

6–33 Exemple : Dans la section précédante on a montré que la série

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge. ♢

6–34 Théorème : *(Condition nécessaire)*
Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

converge, puis on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad .$$

Observer que $a_n \to 0$ est une condition nécessaire, mais ne pas suffisante.

6–35 Résultat : *Prouver que la série harmonique*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ne converge pas.

Démonstration :
Version 1: (voir [Apos92b, p.419])

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots \\
&\geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots
\end{aligned}$$

Donc il est évidant que cette série ne converge pas, parce que la suite $s_m = \sum_{n=1}^{m} 1/n$ n'est pas bornée.
Version 2: (voir [Apos92b, p.400])
Par contradiction. Assomption:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = s$$

Donc

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\,k} = \frac{s}{2}$$

et puis

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots = s - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\,k} = \frac{s}{2}$$

Ça n'est pas possible parce que

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{1}{5} > \frac{1}{6} \ldots$$

□

6–36 Théorème : *(Règles de calcul pour des séries)*
Soit $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *deux suites tel que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

Puis on a

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot A$, c *étant une constante quelconque.*
3. *Mais* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n) \neq A \cdot B$ *(habituellement)*
4. *Mais* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n / b_n) \neq A/B$ *(habituellement)*

Critères de convergence

Pour la majorité des problèmes sur des séries on va poser deux questions

1. Est–ce que la série converge?
2. Si oui, trouver la limite.

Pour beaucoup de séries on ne va pas être capable de calculer la limite, même si on sait que la limite existe.

6–37 Théorème : *(de Leibniz)*
Si $\{a_k > 0\}$ *est une suite décroissante et* $a_k \to 0$ *puis*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$$

est une suite convergente.

Démonstration : La preuve se base sur le théorème sur les emboîtement des intervalles. Une illustration est donné en classe. □

6–38 Exemple : Soit

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

Prouver que cette série est convergente. ♢

6–39 Exemple : La condition dans le Théorème de Leibniz que la suite a_n doit être décroissant est important. Voilà un exemple: soit

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est paire} \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

Considerer

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

et calculer quelques termes de cette série et verifier qu'elle ne converge pas. ♢

6–40 Exemple : Soit

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Prouver que cette série est convergente. ♢

Démonstration : Reécrire le term $1/k^2$ comme difference de deux termes. On a

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k\,(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

et donc

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2 \end{aligned}$$

Puis la suite des s_n est croissante et bornée, donc convergente. □

Observation: On peut montrer que (voir [Apos92b, p.428/400])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

La théorème la plus importante pour examiner la convergence d'une série est la **critère de la majorante**.

6–41 Théorème : *(Critère de la majorante)*
Si $|a_n| \leq b_n$ pour tout $n \geq M$ et on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$$

puis

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

La graphique ci–dessous donne une illustration pour ce résultat.

$$\left.\begin{array}{c} |a_n| \leq b_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

Pour verifier q'une série est divergente on peut utiliser la **critère de la minorante**.

6–42 Théorème : *(Critère de la minorante)*
Si $0 \leq a_n \leq b_n$ *pour tout* $n \geq M$ *et on sait que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

est divergente, puis le série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ne converge pas.

La graphique ci–dessous donne une illustration pour ce résultat.

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq a_n \leq b_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

6–43 Exemple : Soit

$$a_n = \frac{\cos(n^2 - \sinh n)}{n^2 + n + 1} \quad .$$

Pour examiner

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

on trouve que $|a_n| \leq 1/n^2$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Puis la série des a_n converge. ♢

6–44 Exemple : Vérifier que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(1/n^2)}{n}$$

ne converge pas. ♢

6–45 Exemple : Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

est divergente si $0 < p \leq 1$. ♢
Démonstration : Comparer avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. □

6–46 Résultat : *On peut montrer que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

est convergente si $p > 1$ *(voir [Apos92b, p.400]).*

6–47 Résultat : *On peut montrer que*

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

(voir [Apos92a, p.432]). Regarder les exercises (6–21), (6–22) et (6–23).

6–48 Définition : On dit qu'une série est **absolument convergente** quand la série des valeurs absolut des termes est convergente.

On dit qu'une série est **semi–convergente** quand la série est convergente, mais ne pas absolument convergente.

6–49 Exemple : La série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

est absolument convergente. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

est semi–convergente. ♢

6–50 Définition : Soit a_n une suites des nombres et $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction bijective. Puis la nouveau suite

$$b_n = a_{k(n)}$$

est une **réarrangement** de la suite a_n.

6–51 Exemple : Verifier que

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{1}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{6}\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \frac{1}{8}\ ,\ldots$$

est une réarrangement de la suite

$$\frac{1}{1}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \frac{1}{6}\ ,\ \frac{1}{7}\ ,\ldots$$

♢

6–52 Exemple : Verifier que

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{36},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{49},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{11},\ldots$$

est une réarrangement de la suite

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ldots$$

♢

6–53 Théorème : *Si la série des a_n est absolument convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

puis chaque réarrangement de cette série converge vers la même valeur L.

6–54 Résultat : *Si la série des a_n est semi–convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

puis pour chaque nombre $M \in \mathbb{R}$ il existe un réarrangenemt de cette série tel que la nouveau série converge vers M.

6–55 Résultat : *Doubles séries*
Souvent on trouve des doubles séries

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j}$$

Si on a une des deux conditions

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{i,j}| < \infty$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} |a_{i,j}| < \infty$$

donc la doubles série est absolument convergent. Puis on peut réarranger les termes. Au lieu de d'abord calculer la somme pour une ligne (ou columne) on fait d'abord la sommation sur une diagonale. Figure 6.2 est une illustration de cette idée. On arrive à

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} a_{k,j-k}$$

6–56 Théorème : *(Multiplication de deux séries)*
Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$$

deux séries absolument convergentes. Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad .$$

Puis on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A \cdot B$$

et la série est absolument convergente. Cette formule est appelée **produit de Cauchy**.

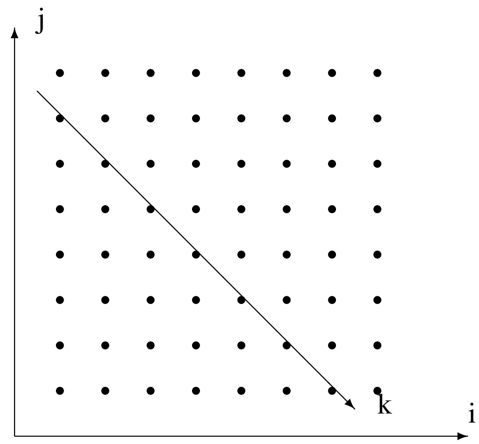


Figure 6.2: Illustration pour des doubles séries

6–57 Théorème : *(critère du quotient)*
Regarder la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

et calculer

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$$

si possible.

(a) Si $q < 1$ la série est absolument convergent.

(b) Si $q > 1$ la série est divergent.

(c) Si $q = 1$ la série peut être convergente ou divergent.

Démonstration : Utiliser une majorante géométriques. Le résultat est aussi connu comme critère de d'Alembert[1]. □

6–58 Exemple : Verifier que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} < \infty \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}$$

♢

[1]Jean Baptiste le Rond D'Alembert (1717–1783), mathématicien et physicien français

6–59 Théorème : *(Règle de Cauchy)*
Regarder la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

avec $a_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et calculer*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

si possible.

(a) Si $r < 1$ *la série est absolument convergent.*

(b) Si $r > 1$ *la série est divergent.*

(c) Si $r = 1$ *la série peut être convergente ou divergent.*

Démonstration : Comparer avec des séries géométrique.

(a) Choisir $r < q < 1$ et parce que $\sqrt[n]{a_n} \to r$ on a $a_n \leq q^n$ pour des valeurs de $n \geq n_0$ (N_0 assez grand). Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n < \infty$$

(b) Choisir $1 < q < r$ et parce que $\sqrt[n]{a_n} \to r$ on a $a_n \geq q^n$ pour des valeurs de $n \geq n_0$ (n_0 assez grand). Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$$

et on utilise le théorème de la minorante.

$\square$

6–60 Exemple : Verifier que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$$

$\diamondsuit$

Démonstration : Utiliser la méthode de D'Alembert et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Problème 6–21 montre que la suite

$$(1+\frac{1}{n})^n$$

est croissante, donc

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \leq \left(1+\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9} < 1$$

On peut aussi utiliser la formule de Stirling pour $n!$. $\square$

6–61 Exemple : Verifier que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$$

mais la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

est divergente. ♢

6.1.4 Inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques

Ce résultat n'a pas ne dépend pas de la théorie des suites et séries. On va l'utiliser pour les problèmes (6–21) et (6–22).

6–62 Théorème : *Soit $a_1, a_2, \ldots a_n$ des nombres positives. Puis*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Donc la moyenne géométrique est toujous plus petite que la moyenne arithmétique.

Démonstration :

(a) On commence avec le cas spécial $n = 2$ et trouve

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2)^2 &= a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \\ (a_1 - a_2)^2 &= a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \end{aligned}$$

La difference de ces deux équations donne

$$(a_1 + a_2)^2 - (a_1 - a_2)^2 = 4a_1a_2$$

et donc

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \sqrt{a_1a_2 + \frac{1}{4}\,(a_1 - a_2)^2} \geq \sqrt{a_1a_2}$$

et on voit, qu'on obtien une égalité si et seulement si $a_1 = a_2$. De plus on voit que la difference entre le moyenne arithmétique et géométrique et characterisée par l'expression $(a_1 - a_2)^2$.

(b) Pour n nombres on peut les rearranger tel que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n$$

Avec la notation

$$M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad G = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

Il nous rest a montrer que $G \leq M$. Si $a_1 = a_n$ il est évidant que $G = M$. Donc nous regardon seulement le cas $a_1 < a_n$ et metton

$$\tilde{a}_1 = M \quad , \quad \tilde{a}_n = a_n + a_1 - M \quad \text{et} \quad \tilde{a}_k = a_k \quad \text{pour} \quad k = 2, 3, 4, \ldots, n-1$$

On ne change pas le moyene aritmétique. A cause du

$$|\tilde{a}_n - \tilde{a}_1| < |a_n - a_1|$$

et (a) on sait que

$$\sqrt{a_1 a_n} < \sqrt{\tilde{a}_1 \tilde{a}_n} \leq \frac{\tilde{a}_1 + \tilde{a}_n}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Donc on a

$$G = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \tilde{a}_k} = \tilde{G} \quad \text{et} \quad \tilde{M} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k = M$$

On a augmente le moyen géométrique, sans changer le moyen arithmétique.

(c) A cause de (a) et (b) on sait que $G = M$ si et seulement si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

(d) Le calcul au–dessus va remplacer la nombre la plus petite a_1 par M. Um peut répéter ces calulations. Pour chaque pas on obtien un nombre M de plus. On peut répéter ce calcul jusqu'à ce que $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_n = M$ et donc $G \leq \tilde{G} = \tilde{M} = M$.

□

6.2 Fonctions continues

Dans des applications on trouve souvent des fonctions **discontinues**. Prendre par exemple le processus de fondre de la glace. On commence avec un bloc de glace et on ajoute de l'énergie de chaleur. La température va d'abord monter, puis la glace va commencer à fondre et la température ne monte plus. Si toute la glace est disparue, la température recommence à monter. Regarder l'énergie de chaleur comme fonction de la température pour obtenir une fonction discontinue. Le graphe de la fonction saute.

Voici un exemple d'une fonction continue

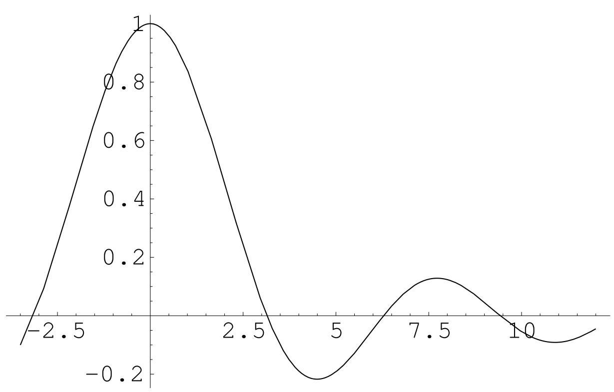


Figure 6.3: Graphe de $(\sin x)/x$

6–63 Exemple : La fonction

$$y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

est definie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour $x = 0$ on obtient l'expression $\frac{0}{0}$, la valeur $f(0)$ n'existe pas. La question qu'on pose maintenant est: Quelles sont les valeurs de $f(x)$ pour des x „proche" de 0? ♢

Pour des fonctions plus simples, c'est facile de trouver la réponse à la question au–dessus.

6–64 Exemple : Regarder la fonction $f(x) = x^2 + 1$. Si on a une suite $\{x_n\}$ telle que $x_n \to 2$, on obtient $f(x_n) = x_n x_n + 1 \to 5 = f(2)$. On ne doit même pas connaître la forme exacte de la suite, il suffit de savoir qu'elle converge vers 2. On va dire que la fonction $f(x)$ est continue pour $x = 2$. ♢

6.2.1 Définitions et résultats de base

6–65 Définition : (Limite d'une fonction)
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $z \in I$. On dit que $f(x)$ **converge vers** L**, si** x **converge vers** z si, pour toute suite $\{x_n\}$ en I avec $x_n \to z$ et $x_n \neq z$, la suite $\{f(x_n)\}$ converge vers L. La notation est

$$\begin{array}{l} \lim_{x \to z} f(x) = L \\ f(x) \to L \quad \text{si} \quad x \to z \\ f(x) \underset{x \to z}{\longrightarrow} L \end{array}$$

Dans la définition au–dessus il est très important qu'on obtient la limite L pour n'importe quelle suite $x_n \to z$. Il ne suffit **pas** de trouver une suite spéciale $y_n \to z$ telle que $f(y_n) \to L$.

6–66 Exemple : Utiliser les règles de calcul pour des limites pour calculer les limites suivantes des fonctions.

(a)

$$\lim_{x \to 0} (x + 1) = 1$$

(b)

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 8$$

(c)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x + 1}{x^3} = \frac{3}{8}$$

(d)

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = ?$$

(e)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^6 - x^3 + 1}{x^3 - 2x + (1 - x)} = -1$$

Dans la majorité des exemples au–dessus on obtient

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

On va dire qu'une telle fonction f est continue pour $x = a$. ♢

Le but de cette chapitre est de trouver des méthodes pour calculer les limites au–dessus et de connaître quelques résultats pour des fonctions continues.

Regardons d'abord deux exemples pour lesquelles il n'est **pas** facile de trouver les limites. Dans ces deux exemples on peut obtenir un résultat faux, qui se base sur des calculs corrects. On n'a pas regardé l'expression juste.

6–67 Exemple : Considérer la fonction

$$f(x) = x^{1/100} - 0.933$$

et chercher $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(a) Utiliser $x = 0.1$, $x = 0.01$, $x = 0.001$ pour deviner la limite.

(b) Trouver la limite.

Solution: Le tableau

x=	0.1	0.01	0.001	...
f (x)=	0.0442372	0.0219926	0.000254301	...

indique que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Mais on a $\lim_{x\to 0} \sqrt[100]{x} = 0$ et donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -0.933$.

$\diamondsuit$

6–68 Exemple :

(a) Trouver une suite $x_n \to 0$ telle que $\sin(1/x_n) \to 0$.

(b) Trouver une suite $x_n \to 0$ telle que $\sin(1/x_n) \to 1$.

(c) Trouver une suite $x_n \to 0$ telle que $\sin(1/x_n) \to 0.5$.

(d) Trouver une suite $x_n \to 0$ telle que $\sin(1/x_n) \to -1$.

(e) Verifier que $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ n'existe pas.

$\diamondsuit$

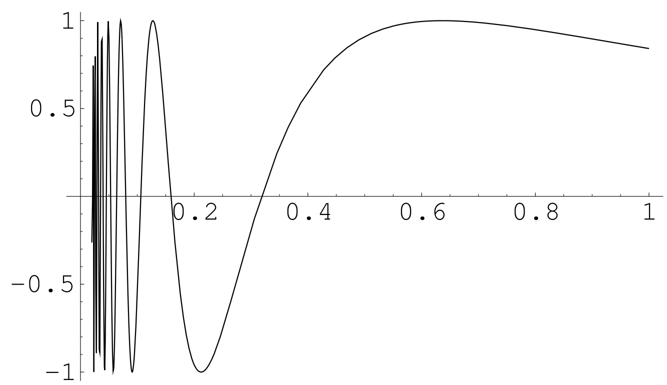


Figure 6.4: Graphe de $\sin(1/x)$

En utilisant les règles de calcul pour des limites des suites des nombres on obtient le résultat suivant. Ces règles simples sont très importantes pour trouver les limites des fonctions. Il existe très peu de limites qu'on peut calculer sans ces règles.

6–69 Théorème : *Soient f et g deux fonctions de I sur $\mathbb{R}$, $z \in I$ et*

$$\lim_{x\to z} f(x) = A \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to z} g(x) = B$$

Puis on a

1. $\lim_{x\to z} (f(x) + g(x)) = A + B$

2. $\lim_{x\to z} (c f(x)) = c \cdot A$, *$c$ étant une constante quelconque.*

3. $\lim_{x\to z} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$

4. $\lim_{x\to z} (f(x)/g(x)) = A/B$ *si* $B \neq 0$

6–70 Définition : (Fonctions continues)
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $z \in I$. On dit que la fonction $f(x)$ est **continue pour** $x = z$ si

1. $\lim_{x\to z} f(x)$ existe
2. $\lim_{x\to z} f(x) = f(z)$

On dit que la fonction f est **continue sur** I si elle est continue pour tout $z \in I$.

La majorité des fonctions qu'on va rencontrer sont des fonctions continues. Voilà quelques exemples.

6–71 Exemple :

(a) La fonction $f(x) = x + 1$ est continue pour $x = 2.65$.

(b) La fonction $f(x) = x + 1$ est continue pour $x = 0$.

(c) La fonction $f(x) = x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(d) La fonction $f(x) = x^3 - 2x + 3$ est continue pour $x = 7$.

(e) La fonction $f(x) = x^3 - 2x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(f) La fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 3}{x + 1}$ est continue pour $x = 7$.

(g) La fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 3}{x + 1}$ est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$, sauf $x = -1$.

$\diamondsuit$

On peut montrer que la caractérisation suivante est équivalente à la définition originale.

6–72 Théorème : *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue pour $x \in I$ si est seulement si:*
Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour n'importe quel $z \in I$ avec $|z - x| < \delta$ on a $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$.

En utilisant les règles de calcul avec des limites des fonctions on obtient le résultat suivant.

6–73 Théorème : *Soient f et g deux fonctions de I sur $\mathbb{R}$, $z \in I$ et*

$$\lim_{x\to z} f(x) = f(z) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to z} g(x) = g(z)$$

(f et g sont continues pour $z \in I$)
Puis on a

(a) La fonction $f(x) + g(x)$ est continue pour $z \in I$.

(b) La fonction $c \cdot f(x)$ est continue pour $z \in I$. c étant une constante quelconque.

(c) La fonction $f(x) \cdot g(x)$ est continue pour $z \in I$.

(d) La fonction $f(x)/g(x)$ est continue pour $z \in I$, si $g(z) \neq 0$.

Comme application du théorème au–dessus on obtient:

6–74 Résultat :

(a) Tous les polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

(b) Tous les fonctions rationnels sont continues pour tous les $x \in \mathbb{R}$, sauf les zéros du dénominateur.

6–75 Résultat : *La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue pour $x > 0$.*

Démonstration :
1. Étape :
Pour examiner la limite

$$\lim_{h \to 0} \sqrt{1+h}$$

on utilise pour $|h| < 1$

$$\left(\sqrt{1+h}\right)^2 = 1 + h \leq 1 + |h| \leq 1 + 2|h| + h^2 = (1 + |h|)^2$$

et

$$\left(\sqrt{1+h}\right)^2 \geq 1 - |h| \geq 1 - 2|h| + h^2 = (1 - |h|)^2$$

Puis on sait que

$$1 - |h| \leq \sqrt{1+h} \leq 1 + |h|$$

et le théorème du Sandwich implique

$$\lim_{h \to 0} \sqrt{1+h} = 1$$

2. Étape :
On doit montrer que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{x}$$

Utiliser la notation $h = \frac{\Delta x}{x}$ et

$$\sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{x\,(1 + \frac{\Delta x}{x})} = \sqrt{x}\,\sqrt{1+h}$$

Si $\Delta x \to 0$ on sait que $h \to 0$ et puis $\sqrt{1+h} \to 1$. On a prouvé le résultat.

□

6–76 Résultat :

(a) La fonction $f(x) = \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction $f(x) = \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) La fonction $f(x) = \tan x$ est continue sur $\mathbb{R}$, sauf pour les zéros de la fonction $\cos x$ $(x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N})$.

Démonstration : On utilise un argument géométrique pour montrer que

$$\lim_{h\to 0} \sin h = 0$$

Puis on utilise des théorèmes sur les fonctions trigonométriques et des règles de calcul pour vérifier les résultats. Par exemple

(a) Pour $-0.5 < h < 0.5$ on sait que

$$\cos h = \sqrt{1 - \sin^2 h} \to \sqrt{1+0} = 1 \quad \text{si} \quad h \to 0$$

(b)

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h \to \sin x \cdot 1 + 0$$

□

6–77 Résultat : *La fonction $f(x) = \exp x = e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

6–78 Théorème : *Les compositions des fonctions continues sont continues.*

Démonstration : Regarder deux fonctions continue f et g et une suite $x_n \to x$. On doit verifier que $g(f(x_n)) \to g(f(x))$. La fonction $f(x)$ est continue, donc

$$z_n := f(x_n) \to f(x) =: z$$

La fonction g est continue, donc

$$g(f(x_n)) = g(z_n) \to g(z) = g(f(x))$$

□

6–79 Exemple : Verifier que la fonction

$$f(x) = \sin \frac{1 - x^2 + 4x}{1 + x^2}$$

est continue partout. ♢

6–80 Théorème : *Soit $D \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.*

(a) *Si la fonction f est monotone, elle est aussi invertible. Il y a une fonction g telle que*

$$g(f(x)) = x \quad \textit{pour} \quad x \in D$$

*La fonction g est la **fonction inverse** et la notation standard est*

$$g(z) = f^{-1}(z)$$

(b) *Si la fonction f est monotone et continue, puis l'inverse f^{-1} est une fonction monotone et continue.*

Angle x	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
1.000	0.84147098	0.8414709848
0.200	0.19866933	0.9933466540
0.100	0.09833342	0.9983341665
0.010	0.00999983	0.9999833334
0.001	0.00099993	0.9999998333
0.000	0.00000000	pas défini

Tableau 6.1: $\sin x \approx x$ pour $|x| \ll 1$

6–81 Résultat :

(a) *Soit* $D = \{x > 0\}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*. La fonction* $f(x) = x^n$ *est monotone et continue. Puis l'inverse* $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ *est monotone et continue.*

(b) *Soit* $D = [-\pi/2, \pi/2]$*. La fonction* $f(x) = \sin x$ *est monotone et continue. Puis l'inverse* $f^{-1}(x) = \arcsin x$ *est monotone et continue.*

(c) *Soit* $D = [0, \pi]$*. La fonction* $f(x) = \cos x$ *est monotone et continue. Puis l'inverse* $f^{-1}(x) = \arccos x$ *est monotone et continue.*

A cause une graphique on devine que $\sin x \approx x$ pour $|x| \ll 1$. Le tableau 6.1 peut servir comme illustration. L'approximation n'est que valable pour des angles mesurés en radian.

6–82 Résultat :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration : Lire en figure 6.5 que l'aire du secteur est plus petit que l'aire du grand triangle. Et la

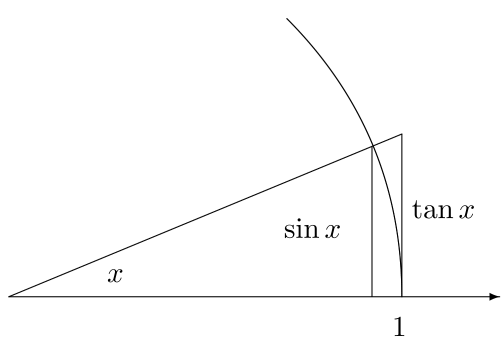


Figure 6.5: Preuve de $\frac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$

hauteur $\sin x$ est plus courte que la longeur de l'arc x. Donc pour $x > 0$ petit on a

$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Puis diviser par $\sin x$ et calculer l'inverse.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & < & \dfrac{x}{\sin x} & < & \dfrac{1}{\cos x} \\ 1 & > & \dfrac{\sin x}{x} & > & \cos x \end{array}$$

Trouver la limite $x \longrightarrow 0+$ avec le théorème du Sandwich. □

6–83 Résultat : *Les résultats suivants sont des conséquences des théorèmes sur des fonctions trigonométriques. Ils sont importants pour calculer les dérivés des fonctions trigonometriques*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\sin(x)$$

Démonstration : Examinons seulement la première limite, les calculs pour la deuxième sont similaires.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\ \cos(h) + \cos(x)\ \sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \frac{\cos(x)\ \sin(h)}{h} + \frac{\sin(x)\,(\cos(h)-1)}{h} \\ &= \cos(x)\ \frac{\sin(h)}{h} + \sin(x)\ \frac{(\cos(h)-1)(\cos(h)+1)}{h\ (\cos(h)+1)} \\ &= \cos(x)\ \frac{\sin(h)}{h} - \sin(x)\ \frac{\sin^2(h)}{h\ (\cos(h)+1)} \\ &= \cos(x)\ \frac{\sin(h)}{h} - \frac{\sin(x)}{\cos(h)+1}\ \frac{\sin(h)}{h}\ \sin(h) \\ &\longrightarrow \cos(x)\cdot 1 - \frac{\sin(x)}{2}\cdot 1\cdot 0 = \cos(x) \quad \text{si} \quad h \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Problème 6–49 utilise des réflexions et calculs similaires. □

6–84 Résultat : *Soit $f(x)$ une fonction continue avec $f(a) = 0$ et $g(x)$ une fonction bornée. Prouver que*

$$\lim_{x\to a} (f(x)\, g(x)) = 0$$

6.2.2 Limites à gauche et à droite

6–85 Définition : (Limite à droite)
Soit I un intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction, et $z \in I$. On dit que

$$\lim_{x\to z+} f(x) = L$$

si pour n'importe quelle suite x_n avec $x_n > z$ et $x_n \to z$, on a $f(x_n) \to L$. L est la **limite à droite**.

La définition de **limite à gauche** est similaire.

6–86 Théorème :

$$\lim_{x\to z} f(x) = L$$

si et seulement si

$$\lim_{x\to z+} f(x) = L \qquad \lim_{x\to z-} f(x) = L$$

6–87 Résultat : *La fonction $f(x)$ est continue pour $x = z$ si et seulement si*

$$\lim_{x\to z+} f(x) = \lim_{x\to z-} f(x) = f(z)$$

6–88 Résultat : *La fonction $f(x)$ n'est pas continue pour $x = z$ si*

$$\lim_{x\to z+} f(x) \neq \lim_{x\to z-} f(x)$$

ou

$$\lim_{x\to z+} f(x) = \lim_{x\to z-} f(x) \neq f(z)$$

ou

$$\lim_{x\to z} f(x) \quad \textit{existe pas}$$

6–89 Exemple : Verifier que

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{|x|} = 1 \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{|x|} = -1$$

puis la fonction $g(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ n'est pas continue pour $x = 0$, indépendant de la valeur de $g(0)$.

Mais la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$. ♢

6–90 Exemple : Vérifier que la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 5.5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

n'est pas continue pour $x = 3$. Dessiner les graphes de ces deux fonctions. ♢

6–91 Exemple : Soit $\alpha > 0$, calculer la limite

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha e^{1/x}$$

Utiliser $z < e^z$ pour $z > 0$.

Solution:

$$\begin{aligned} x^\alpha e^{1/x} &= (x^{1/2} \exp \frac{1}{2x\alpha})^{2\alpha} \\ &> (x^{1/2} \frac{1}{2x\alpha})^{2\alpha} \\ &= (x^{-1/2} \frac{1}{2\alpha})^{2\alpha} \\ &= x^{-\alpha} \, (\frac{1}{2\alpha})^{2\alpha} \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Puis on a une minorante divergente (elle tend vers l'infini), donc l'expression en question tend vers l' infini.

$\diamondsuit$

Si on remplace x par $1/x$ dans le résultat au–dessus, on obtient

6–92 Résultat : *Pour tout $\alpha > 0$ on a*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$$

6.2.3 Résultats sur des fonctions continues

6–93 Théorème : *(Théorème de Bolzano[2])*
Soit $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. Si la fonction prend des valeurs de signes opposées en les deux points a et b, alors il existe au moins un point ξ en $[a, b]$ tel que $f(\xi) = 0$.

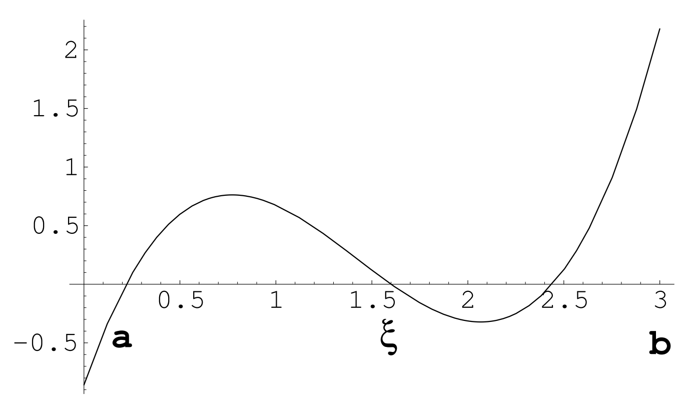


Figure 6.6: Théorème de Bolzano

[2]Bernhard Bolzano (1781–1848)

Démonstration : La méthode de bisection va produire un point ξ dans l'intervalle et deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ avec

$$a_n < b_n \qquad a_n \to \xi \qquad b_n \to \xi \qquad f(a_n) \leq 0 \qquad f(b_n) > 0$$

Comme la fonction est continue, on sait que

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \quad \text{et} \quad f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$$

Donc on sait que $f(\xi) = 0$. □

Observation: Le théorème de Bolzano est faux pour des fonctions qui ne sont pas continues, par exemple $f(x) = 1/(x-1)$ sur l'intervalle $[0, \sqrt{2}]$.

6–94 Exemple : La température d'ébullition de l'eau T (en ${}^0C$) dépend de la hauteur au–dessus de la mer (en m) par la formule

$$T(h) = 100.862 - 0.0415\sqrt{h + 431.03} \qquad .$$

Utiliser le théorème de Bolzano pour vérifier qu'on obtient une température d'ébullition de 98^0C à une altitude entre $4000\ m$ et $4500\ m$. Trouver la température exacte par la méthode de bisection. ♢

Comme conséquence simple du théorème de Bolzano on sait que chaque polynôme du degré impaire a (au moins) un zéro.

6–95 Résultat : *Soit $f(x)$ un polynôme du degré $n \in \mathbb{N}$. Si n est impair il existe un zéro du polynôme.*

6–96 Théorème : *(Théorème du maximum)*
Soit $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. Puis il existe un $z \in [a, b]$ tel que $f(x) \leq f(z)$ pour tout $x \in [a, b]$. La fonction atteint sa borne supérieure.

Observation: Le théorème du maximum est faux si

(a) l'intervalle n'est pas fermé.
Exemple : $f(x) = x^2$ sur $(0, 1)$.

(b) la fonction n'est pas continue.
Exemple:

$$f(x) := \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

sur l'intervalle $[0, 4]$.

(c) l'intervalle n'est pas borné.
Exemple: $f(x) = -e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

6.3 Problèmes

6.3.1 Suites

• Problème 6–1:
Für die untenstehende Folge ist der Grenzwert a zu bestimmen. Finden Sie für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein zugehöriges m so dass

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq m$$

$$a_n = \frac{3n^2 - 21n\sin(n^2) + 2}{n^2 - 7n\sin(n^2)}$$

• Problème 6–2:
Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}$ telles que les suites suivantes convergent vers 0

$$(a) \qquad n^c \qquad\qquad (b) \qquad c^n \qquad\qquad (c) \qquad \sqrt[n]{c} - 1$$

• Problème 6–3:
Prouver que $\sqrt[n]{n!} \to \infty$.
Tip/Tuyau: $\sqrt[2n]{(2n)!} \geq \sqrt{n}$

• Problème 6–4:
Soit $\{a_n\}$ une suite, tel que

$$\lim_{n\to\infty} a_n < 1 \quad .$$

Prouver qu'il existe un nombre $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$a_n < 1 \quad \text{pour tout} \quad n > m \quad .$$

• Problème 6–5:
Calculer les expressions suivantes

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+3} \\ b &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{13\,n^2\,e^{-n}} \\ c &= \lim_{n\to\infty} \frac{3+4\,n^4}{2\,n - n^4 + 17} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d &= 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \\ e &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{3\,n}}{\cosh(3\,n) + n^2} \end{aligned}$$

• Problème 6–6:
Utiliser les règles de calcul pour des limites pour trouver les limites suivantes.

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1+n^4}{n^3-2n^2+13n+1} & \qquad b_n &= \tfrac{1+n^3}{n^3-2n^2+13n+1} \\ c_n &= \tfrac{1+n^2}{n^3-2n^2+13n+1} & \qquad d_n &= \tfrac{\cos\, n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

• Problème 6–7:
Calculer les limites

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{n}{n+1} & \qquad a_n &= \tfrac{a\,n}{n+1} & \qquad a_n &= \tfrac{1}{1+c^n} \quad \text{pour} \quad |c| < 1 \\ a_n &= \tfrac{a\,n+b}{c\,n+d} & \qquad a_n &= \tfrac{7n^3-1.234}{2n+3n^3} & \qquad a_n &= \tfrac{1}{1+c^n} \quad \text{pour} \quad |c| > 1 \\ a_n &= \sqrt[n]{n^3} & & & \qquad a_n &= \tfrac{1}{1+c^n} \quad \text{pour} \quad c = 1 \end{aligned}$$

Source : [Leup85, p.113].

• Problème 6–8:
Calculer les limites ci-dessous. Les **coefficients binomial** sont donnés par

$$\left(\begin{array}{c}\alpha\\ n\end{array}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha-k+1}{k}=\frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}$$

pour $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rclrclrcl}
a_n & = & (\frac{1}{2})^{n-2} & a_n & = & \left(\begin{array}{c}n\\ 6\end{array}\right)=\frac{n!}{6!\,(n-6)!} & a_n & = & \frac{1}{n^6}\left(\begin{array}{c}n\\ 6\end{array}\right)\\
a_n & = & \sqrt[n]{n+12345} & a_n & = & \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\cos\left(n\pi\right) & & &
\end{array}$$

Source : [Leup85, p.113].

• Problème 6–9:
Prouver (par contradiction) que la suite

$$a_n=\frac{2^n}{n^2}$$

n'est pas convergente.

• Problème 6–10:
Soit $x>1$ un nombre positive et $a_0^2>x$. Construire une suite par la formule

$$a_{n+1}=\frac{x}{2a_n}+\frac{a_n}{2}.$$

Il est facile a voir que $a_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(a) Prover que $a_n^2\geq x$ pout tout $n\in\mathbb{N}$.

(b) Vérifier que la suite est décroissante et puis convergente.

(c) Trouver la limite.

• Problème 6–11:
Utiliser les règles de calcul pour des limites et calculer les limites suivantes.
Utiliser $\cos\left(1/n\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$.

$$\begin{array}{rclrclrcl}
a_n & = & \frac{1}{n}\cos\left(n^3\right) & b_n & = & \frac{\sin\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n}} & c_n & = & \frac{1+2n^3}{n^3+2n^2-n+10}\\
d_n & = & \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}} & e_n & = & \sqrt[n]{\sqrt{n}} & & &
\end{array}$$

• Problème 6–12:
Calculer les limites suivantes. Montrer les arguments.

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+17}{\sqrt{2}n^2-\sqrt{n}}\quad,\quad b=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{17n^3}\quad\text{et}\quad c=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^n}$$

• Problème 6–13:
Utiliser les règles des calcul pour des limites des suites pour calculer les limites suivantes.

$$a_n=n\cos\left(n^3\right)\quad,\quad b_n=\frac{\tan\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}\quad\text{et}\quad c_n=\frac{n^3+2n^2-n+10}{1+2n^3}$$

• Problème 6–14:
Utiliser que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

et les règles pour calculer les limites

$$\begin{array}{rclcrcl}
a &=& \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{c\,n}} \quad \text{pour} \quad c>0 & \qquad & b &=& \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} \\
c &=& \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{c\,n}} & \qquad & d &=& \lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{e^n} \quad \text{pour} \quad m\in\mathbb{N}
\end{array}$$

• Problème 6–15:
Trouver des suites a_n und b_n, tel que

(a) a_n et b_n sont convergentes et $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ est divergente.

(b) a_n et b_n sont divergentes et $c_n = a_n + b_n$ est convergente.

(c) a_n divergente, b_n convergente et $c_n = a_n b_n$ est divergente.

(d) a_n divergierte, b_n convergente et $c_n = a_n b_n$ est convergente.

• Problème 6–16:
Regarder la suite

$$a_n = \frac{n^2 + \cos(n) - 1}{n^3 + n - 1}$$

Trouver la limite a de la suite et trouver pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire un nombre $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \text{pout tout} \quad n \geq m$$

• Problème 6–17:
Decider pour les suites a_n si les proprietés suivantes sont **justes** ou **faux**.

a_n	monotone	croissante	bornée	convergente	divergente
$1/n$					
$(-1)^{2-n} \frac{n^2}{2n^2+1}$					
$(-1)^{2n} \frac{n^2}{2n^2+1}$					
$-\sinh\left(\frac{n^2-1}{n+1}\right)$					
$\sin(n)$					
$\sin\left(\frac{1}{2n}\right)$					

• Problème 6–18:
Regarder la suite

$$a_n = \sqrt[n]{n^2 + 17}$$

(a) Trouver (deviner) la limite a de la suite.

(b) **Prouver** que $a_n \to a$.

• Problème 6–19:
Trouver les limites suivantes.

$$\begin{array}{lclclclclcl} a_n & = & 2 + \frac{n^3-2}{n^4} & \quad & b_n & = & \frac{(-1)^n n^3 - 2n^2 + 17}{1+n+n^2+n^3} & \quad & c_n & = & \sqrt[n]{2 + \frac{n^2}{n+1}} \\ d_n & = & \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k & & e_n & = & \sin\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) & & & & \end{array}$$

• Problème 6–20:
Regarder la suite

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 7}{3x_n^2} \quad , \quad x_0 = 100$$

Utiliser que $x_n^3 > 7$ pour tout n (sans vérification).

(a) Trouver x_1 et x_2.

(b) Montrer que cette suite est convergente.

(c) Trouver la limite (soluble sans (b)).

• Problème 6–21:
Verifier que

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

est une suite croissante (difficile, voir [Apos92a, p. 431]).

• Problème 6–22:
Verifier que

$$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

est une suite décroissante (difficile, voir [Apos92a, p. 431]).

• Problème 6–23:
Utiliser les résultats des deux problèmes précédants pour montrer que les deux suites

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \quad \text{et} \quad b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

converge vers un seul nombre L. Il est vrai (mais difficile a montrer) que $L = e$.

• Problème 6–24:
Calculer les expressions suivantes.

$$\begin{array}{lclclcl} a & = & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-3n}{1+2n+3n^3+4n^3} & \quad & b & = & \lim_{n\to\infty}\left(n\,\left((x+\frac{1}{n})^3 - x^3\right)\right) \\ c & = & \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n-1} - \frac{2n^3}{n^2-1}\right) & & d & = & 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \ldots \\ e & = & \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4 + 23} & & & & \end{array}$$

• Problème 6–25:
Calculer les expressions suivantes. Montrer les calculs.

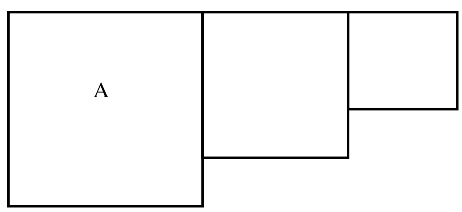
$$\begin{array}{rclrcl} a & = & \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3\,n}{3\,n^2+n+27} & d & = & \lim_{h\to -1} \dfrac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{h} \\ b & = & \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3-\cos(n)}{n^3+\cosh n} & e & = & \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,\pi^n}{2^{2n}} \\ c & = & \lim_{h\to 0} \dfrac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{h} & & & \end{array}$$

6.3.2 Séries

• Problème 6–26:
Pour un carré avec aire A on allonge chaque côté par un facteur $0 < r < 1$ et puis on ajoute le nouveau carré à droite. Répéter ce processus.

(a) Trouver une formule simple pour la somme des aires pour les premiers n carrés. Ci–dessous la situation $n = 3$ et montré.

(b) Déterminer l'aire totale si on tien compte d'un nombre infinie de ces carrés.



• Problème 6–27:
Un ballon tombe à partir d'une hauteur H sur un terrain plat. A chaque saut le ballon remont à une hauteur de r fois la hauteur précédente ($0 < r < 1$).

(a) Calculer le chemin à parcourir pour trois sauts complets (du point le plus haut au point le plus haut).

(b) Calculer le chemin à parcourir pour n sauts complèts.

(c) Calculer le chemin à parcourir jusque le ballon arrête de sauter.

• Problème 6–28:
Pour chaque série ci–dessous décider si elle converge ou pas.

$$\begin{array}{rclrcl} a & = & \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\,\pi)}{n+1} & d & = & \sum_{n=3}^{\infty} 3^{-n} \\ b & = & \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4711}{n+1} & e & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \\ c & = & \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4711}{n^2+1} & & & \end{array}$$

• Problème 6–29:
Examiner la suite

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 0.9 \\ a_2 & = & 0.99 \\ a_3 & = & 0.999 \\ a_4 & = & 0.9999 \\ a_5 & = & 0.99999 \\ & \vdots & \end{array}$$

(a) Trouver une somme appropriée pour a_n.

(b) Répondre à la question $0.99999999\ldots = ?$ d'une façon mathématiquement correcte, inclus le raisonnement.

• Problème 6–30:

(a) Décider si les séries suivantes sont convergent ou pas.

$$a = \sum_{n=17}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad , \quad b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad , \quad c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

(b) Déterminer la valeur **exacte** de la série ci–dessous. Tip: somme de deux séries.

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n}{e^{2\,n}}$$

• Problème 6–31:

(a) Trouver deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ telles que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

sont divergentes, mais la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

converge.

(b) Trouver deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ telles que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

sont convergentes, mais la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

est divergente.

• Problème 6–32:
Verifier que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} < \infty \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}$$

On peut montrer (plus tard) que cette limite est égale à $\cosh\, x$.

• Problème 6–33:
Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n$$

est convergente, si $|q| < 1$.

• Problème 6–34:
Man zeige, dass mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 < \infty$$

die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

absolut konvergiert.

• Problème 6–35:
Verwenden Sie die vorangehende Aufgabe um zu zeigen, dass mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$$

absolut konvergiert für $\alpha > 1/2$.

• Problème 6–36:
Entscheiden Sie ob die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie deren Wert, falls möglich.

$$\begin{array}{rclcrcl} a & = & 3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots & \qquad & b & = & \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \\ c & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} & & d & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \end{array}$$

• Problème 6–37:
Die **Binomialkoeffizienten** sind gegeben durch

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n} + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1} + \binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{n-2} + \ldots + \binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

Die **Binomialreihe** ist nun gegeben durch

$$B\,(x,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

(b) Zeigen Sie

$$B\,(\alpha,x) \cdot B\,(\beta,x) = B\,(\alpha+\beta,x) \quad \text{für} \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,,\ |x| < 1$$

Wegen $B\,(1,x) = 1 + x$ folgt hieraus

$$B\,(\alpha,x) = (1+x)^\alpha \quad \text{für} \quad \alpha \in \mathbb{Q}\,,\ |x| < 1$$

• Problème 6–38:
Examiner la convergence des séries ci–dessous. Donner le raisonnement pour vos réponses (critère de convergence).

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$$

(b) Pour quels valeurs de x la série est convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, x^n$$

(c) Pour quels valeurs de x la série est convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)^n}\; x^n$$

• Problème 6–39:
Examiner les suites et séries ci-dessous. Pour les suites trouver les limites, si possible. Pour une série décider si elle converge ou pas.

$$\begin{array}{rclcrcl}
a & = & \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2-17}{3\,n+17\,n^2} & \qquad & b & = & \lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{-n}}{\cos(1/n)} \\
c & = & \lim_{h\to 0} \dfrac{\cosh(14+2\,h)-\cosh 14}{h} & & d & = & \lim_{h\to 1} \dfrac{\cosh(14+2\,h)-\cosh 14}{h} \\
e & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,\pi)}{n} & & f & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{1+n^2} \\
g & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh n}{e^{2n}} & & & &
\end{array}$$

6.3.3 Continuité

• Problème 6–40:
Choisir une suite x_n pour **deviner** les limites suivantes.

$$\begin{array}{llllll}
(a) & \lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} & (b) & \lim\limits_{x\to 1/2} \frac{2x^2+x-1}{4x^2-1} & (c) & \lim\limits_{x\to 2} \frac{-x^2-3x+10}{2x^2+x-10} \\
(d) & \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-2)^2-4}{x} & (e) & \lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} & (f) & \lim\limits_{x\to a} \frac{x^4-a^4}{x-a}
\end{array}$$

• Problème 6–41:
Utiliser la division des polynômes pour **trouver** les limites dans le problème précédent.

• Problème 6–42:
Utiliser que

$$\lim_{h\to 0} e^h = 1$$

pour vérifier que la fonction $f\,(x) = e^x$ est continue partout.

• Problème 6–43:
Utiliser que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$$

pour vérifier que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)}-e^x}{h} = e^x \quad .$$

• Problème 6–44:
Pour la fonction $f(x) = e^x$ on sait que $f'(0) = 1$.

(a) Utiliser la définition de la dérivée pour transformer $f'(0) = 1$ dans une limite.

(b) Utiliser la limite ci–dessus, la définition de la dérivée et des propriétés de la fonction exponentielle pour déterminer la dérivé de la fonction $g(x) = e^{3\,x}$ au point $x = x_0$.

Montrer tout calcul intermédiaire.

• Problème 6–45:
Vérifier que les fonctions $\log x$ et $\ln x$ sont continues sur leur domaines de définition.

• Problème 6–46:
Soit $a > 0$, prouver que la fonction $f\,(x) = a^x$ est continue pour $x \in \mathbb{R}$.

• Problème 6–47:
Montrer que les fonctions hyperboliques $\cosh x$ et $\sinh x$ sont continues.

• Problème 6–48:
Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\,(x^\circ)}{x} \quad .$$

• Problème 6–49:
Utiliser que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sinh\,(h)}{h} = 1$$

pour vérifier que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sinh\,(x+h) - \sinh\,(x)}{h} = \cosh\,(x)$$

et

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cosh\,(x+h) - \cosh\,(x)}{h} = \sinh\,(x).$$

• Problème 6–50:
Trouver les limites

$$\begin{array}{lllllllll} a &=& \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} & b &=& \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} & c &=& \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} \\ d &=& \lim_{x\to 0} (\frac{1}{2})^x & e &=& \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x}{x} & f &=& \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} \\ g &=& \lim_{x\to \pi/2} \frac{1-\sin x}{\cos x} & & & & & & \end{array}$$

• Problème 6–51:
Trouver la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

Utiliser $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

• Problème 6–52:
Calculer les limites au–dessous:

$$a = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} \qquad b = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} \qquad c = \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

• Problème 6–53:
Trouver les limites suivantes

$$\begin{array}{rclcrcl} a &=& \lim_{x\to\pi} \frac{x^2}{1+\cos(2x)} & & b &=& \lim_{x\to 1.5} \frac{x^2-2.25}{x-1.5} \\ c &=& \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} & & d &=& \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(2x)} \end{array}$$

• Problème 6–54:
Utiliser les règles de calcul pour des limites des fonctions pour trouver les limites suivantes.

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} a &=& \lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2}{x^2-3x} & & b &=& \lim_{x\to 1} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} & & c &=& \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x^2)}{x+x^2} \\ d &=& \lim_{x\to 0-} \frac{\tan x}{|x|} & & e &=& \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(3\,x)-1}{x^2} & & f &=& \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3\,x)-1}{x^2} \end{array}$$

• Problème 6–55:
Calculer les expressions suivantes

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke

$$\begin{array}{rclcrcl} a &=& \lim_{n\to\infty} \dfrac{1+n^2+3\,n^4}{e^{-n}+n^4+n+\sin(n^5)} & & b &=& \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{17\,n^2\,e^{2\,n}} \\ c &=& \lim_{n\to\infty} \dfrac{17+2^n}{\cos(n)+2^n} & & d &=& 3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\ldots \\ e &:& \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^3+4} \quad \text{konvergent/divergent} & & f &:& \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2-\cos(n)}{n} \quad \text{konvergent/divergent} \end{array}$$

• Problème 6–56:
Considérer la fonction

$$f(x) = e^{-1/x^2} \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$

et

$$f(0) = a$$

(a) Est-il possible de choisir un a tel que f est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$?

(b) Si OUI, trouver a.

(c) Si NON, pourquoi pas?

• Problème 6–57:
Considérer la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x\,\sin\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ a & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) Est-il possible de choisir un a, tel que f est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$?

(b) Si OUI, trouver a.

(c) Si NON, pourquoi pas?

• Problème 6–58:
Considérer la fonction

$$g(x) = \sin(-1/x^2) \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$

et

$$g(0) = b$$

(a) Est-il possible de choisir un b , tel que g est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$?

(b) Si OUI, trouver b.

(c) Si NON, pourquoi pas?

• **Problème 6–59:**
Considérer la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\cos x - 1)(x-2)}{x^2-4} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ a & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

(a) Est-il possible de choisir un a tel que f est continue pour tout $x > 0$?

(b) Si OUI, trouver a.

(c) Si NON, pourquoi pas?

• **Problème 6–60:**
Considérer la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^4-4)}{x^2-2} & \text{si} \quad |x| \neq \sqrt{2} \\ a & \text{si} \quad |x| = \sqrt{2} \end{cases}$$

(a) Est-il possible de choisir un a tel que f est continue pour tout $x > 0$?

(b) Si OUI, trouver a.

(c) Si NON, pourquoi pas?

• **Problème 6–61:**
Trouver une fonction $y = f(x)$ pour $0 \leq x \leq 1$, tel que $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

• **Problème 6–62:**
Pourquoi ne peut–on pas utiliser le théorème de Bolzano pour prouver que des polynômes de degré pair ont un zéro?

• **Problème 6–63:**
Trouver les valeurs de x pour lesquelles les fonctions suivantes sont continues.

$$\begin{array}{lll} a(x) = \frac{x}{|x|} & b(x) = \cos\frac{1}{x} & c(x) = x\sin\frac{1}{x} \\ d(x) = \frac{1}{|x|-1} & e(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} & f(x) = 2^{\frac{x}{|x|}} \\ g(x) = x\,2^{\frac{x}{|x|}} & & \end{array}$$

Décider si c'est possible d'enlever les points de discontinuité par des definitions propres.

6.3.4 Solutions de quelques problèmes

Solution pour problème 6–1 : Zuerst eine vorbereitende Rechnung.

$$a_n = \frac{3n^2 - 21n\sin(n^2) + 2}{n^2 - 7n\sin(n^2)} = 3 + \frac{2}{n^2 - 7n\sin(n^2)}$$

Für $n > 8$ gilt $n^2 - 7n\sin(n^2) \geq n\,(n-7) > n$ und somit

$$|a_n - 3| = |\frac{2}{n^2 - 7n\sin(n^2)}| < \frac{2}{n}$$

Für gegebenes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|a_n - 3| < \frac{2}{n} \leq \varepsilon \quad \text{falls nur} \quad n > \max\{8, \frac{2}{\varepsilon}\}$$

Solution pour problème 6–2 : $c < 0$, $|c| < 1$, $0 < c$

Solution pour problème 6–3 :

$$(2n)! \geq n^n n! \geq n^n \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{(2n)!} \geq n \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[2n]{(2n)!} \geq \sqrt{n}$$

Somit konvergiert die Teilfolge $\sqrt[2n]{(2n)!}$ gegen ∞.

$$\sqrt[2n-1]{(2n-1)!} \geq \sqrt[2n]{(2n-1)!} = \frac{1}{\sqrt[2n]{2n}} \sqrt[2n]{(2n)!} \geq \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $\sqrt[2n]{2n} \to 1$. Damit ist die Folge nicht konvergent.

Solution pour problème 6–5 :

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n^2}} = \frac{0}{1+0} = 0 \\
b &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{13\,n^2\,e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{13}\;\sqrt[n]{n}\;\sqrt[n]{n}\,e^{-1}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e} \\
c &= \lim_{n\to\infty} \frac{3+4\,n^4}{2\,n-n^4+17} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^4}+4}{\frac{2}{n^3}-1+\frac{17}{n^4}} = -4 \\
d &= 3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81} = 3\sum_{k=0}^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^k = 3\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6}{1-\frac{1}{3}} = 3\,\frac{\frac{3^6-1}{3^6}}{\frac{2}{3}} = \frac{3^6-1}{2\cdot 3^4} = \frac{728}{162} \approx 4.4938 \\
e &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{3\,n}}{\cosh(3\,n)+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{3\,n}}{\frac{1}{2}\,(\exp(3\,n)+\exp(-3\,n))+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,e^{3\,n}}{\exp(3\,n)+\exp(-3\,n)+2\,n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\exp(-6\,n)+2\,n^2\,\exp(-3\,n)} = \frac{2}{1+0+0} = 2
\end{aligned}$$

Solution pour problème 6–6 : ∞ oder existiert nicht, 1 , 0 , 0

Solution pour problème 6–7 : 1 , a , 1 , a/c , $7/3$, 0 , 1 , $1/2$

Solution pour problème 6–8 : 0 , divergent (oder ∞), $1/6!$, 1 , existiert nicht.

Solution pour problème 6–9 : Wir nehmen an, dass die Folge konvergiert, also $a_n \to a$. Mit den Rechenregeln gilt auch $a_n^2 \to a^2$ und

$$a_n \cdot a_n = \frac{2^n}{n^2}\frac{2^n}{n^2} = \frac{2^{2n}}{(2n)^2}\frac{4}{n^2} \to a \cdot 0 = 0$$

Somit ist $a^2 = 0$ und also $a = 0$, falls der Grenzwert existiert. Gleichzeitig gilt aber

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{2^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 2 > 1 \quad \text{falls} \quad n > 3$$

und somit ist a_n eine strikt wachsende Folge. Dies ist ein klarer Widerspruch zu $a = 0$.

Solution pour problème 6–11 : 0 , 1 , 2 , 0 , 1.

Solution pour problème 6–12 :

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 17}{\sqrt{2}n^2 - \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{17n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{17}\ \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n} \right) = 1$$

(c) Für $n > 10$ gilt $\frac{e}{n} < \frac{1}{3}$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{n}\right)^n = 0$$

Solution pour problème 6–13 : n'existe pas , 1 , $1/2$.

Solution pour problème 6–14 :

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{c\,n}} = \frac{1}{c} \lim_{n\to\infty} \frac{c\,n}{e^{c\,n}} = 0 \quad \text{pour} \quad c > 0$$

(b) Utiliser (a) et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e^{n/2}} \frac{n}{e^{n/2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n/2}} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n/2}} = 0$$

(c) Utiliser (a) et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{c\,n}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n/3}}\right)^3 = 0$$

(d) Utiliser (a) et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{e^n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n/m}}\right)^m = 0$$

Solution pour problème 6–15 : Par exemple

(a) $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{1}{n^2}$.

(b) $a_n = n^2$ et $b_n = -n^2 + \frac{1}{n}$.

(c) $a_n = n^2$ et $b_n = \frac{1}{n}$.

(d) $a_n = n^2$ et $b_n = \frac{1}{n^3}$.

Solution pour problème 6–16 : $a = 0$ und

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| \frac{n^2 + \cos(n) - 1}{n^3 + n - 1} \right| \\ &\leq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ setzt man $m = 1/\varepsilon$, dann ist die gewünschte Ugleichung erfüllt.

Solution pour problème 6–17 :

a_n	monotone	croissante	bornée	convergente	divergente
$1/n$	w	f	w	w	f
$(-1)^{2-n}\,\frac{n^2}{2n^2+1}$	f	f	w	f	w
$(-1)^{2n}\,\frac{n^2}{2n^2+1}$	w	w	w	w	f
$-\sinh\left(\frac{n^2-1}{n+1}\right)$	w	f	f	f	w
$\sin(n)$	f	f	w	f	w
$\sin\left(\frac{1}{2n}\right)$	w	f	w	w	f

Solution pour problème 6–18 :

(a) $a = 1$

(b) Pour $n \geq 5$ on a

$$1 \leq a_n \leq \sqrt[n]{2\,n^2} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n} \to 1$$

Puis utiliser le théorème du Sandwich.

Solution pour problème 6–19 : 2, divergent, 1, divergent, $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

Solution pour problème 6–20 :

(a) $x_1 \approx 66.6669$, $x_2 \approx 44.4451$

(b) $x_n^3 > 7$ puis $(x_n^3 - 7)/(3x_n) > 0$, donc $x_{n+1} < x_n$. On sait que la suite est décroissante et bornée, donc convergente.

(c) $x = \sqrt[3]{7}$

Solution pour problème 6–21 : Regarder les $n + 1$ nombres

$$1 \quad , \quad 1+\frac{1}{n} \quad , \quad 1+\frac{1}{n} \quad , \quad 1+\frac{1}{n} \quad , \ldots , \qquad 1+\frac{1}{n}$$

et l'inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques pour voir que

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1}{n+1}\,\left(1+n+\frac{n}{n}\right) = 1+\frac{1}{n+1}$$

et donc

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Solution pour problème 6–22 : Regarder les $n + 2$ nombres

$$1 \quad , \quad \frac{n}{n+1} \quad , \quad \frac{n}{n+1} \quad , \quad \frac{n}{n+1} \quad , \ldots , \qquad \frac{n}{n+1}$$

et l'inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques pour voir que

$$\sqrt[n+2]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} < \frac{1}{n+2}\,\left(1+\frac{(n+1)\,n}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n+2}$$

et donc

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n+2}} > \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

et

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

Solution pour problème 6–23 : A cause de

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = a_n \cdot (1+\frac{1}{n}) < a_n$$

les deux suites sont monotones et bornées, donc convergentes. Si $a_n \to A$ et $b_n \to B$ on voit aussi que

$$b_n = a_n \cdot (1+\frac{1}{n}) \to A \cdot 1$$

et donc $A = B = L$.

Solution pour problème 6–24 :

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 3n}{1+2n+3n^3+4n^3} = \frac{1}{7}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \left(n\left((x+\frac{1}{n})^3 - x^3\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(n\left(3x^2(\frac{1}{n}) + 3x(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^3\right)\right) = 3\,x^2$$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2}{n-1} - \frac{2n^3}{n^2-1}\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)2n^2}{n^2-1} - \frac{2n^3}{n^2-1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{n^2}} = 2\end{aligned}$$

(d)

$$3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\ldots = 3\,\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n = 3\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$$

(e)

$$1 \leq \sqrt[n]{n^4+23} \leq \sqrt[n]{2\,n^4} \to 1$$

und mit dem „Sandwich–Theorem“

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4+23} = 1$$

Solution pour problème 6–25 :

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3\,n}{3\,n^2+n+27} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-3\,\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}+\frac{27}{n^2}} = \frac{1}{3} \\
b &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-\cos(n)}{n^3+\cosh n} = 0 \quad \text{da} \quad \cosh n \approx \frac{1}{2}\,e^n \\
c &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{h} = 3\,\lim_{h\to 0} \frac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{3\,h} = -3\,\sin 1 \\
&\quad \text{Ableitung von } \cos x \text{ verwenden} \\
d &= \lim_{h\to -1} \frac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{h} = \frac{\cos(-2)-\cos 1}{-1} = \cos(1)-\cos(-2) \\
e &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\pi^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\pi}{4}\right)^n = \frac{-\pi}{4}\,\frac{1}{1-\frac{-\pi}{4}} = \frac{-\pi}{4+\pi} \\
&\quad \text{geometrische Reihe}
\end{aligned}$$

Solution pour problème 6–26 : Falls eine Seitenlänge mit r multipliziert wird, so ist die Fläche mir r^2 zu multiplizieren. Somit erhält man für die Flächeninhalte eine geometrische Summe: $A_k = A \cdot r^{2\,k}$ wobei $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(a) $F(n)$ sei die Summe der Flächen der ersten n Quadrate

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k = \sum_{k=0}^{n-1} A \cdot r^{2\,k} = A\,\frac{1 - r^{2\,n}}{1 - r^2}$$

(b)

$$F(\infty) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \sum_{k=0}^{\infty} A \cdot r^{2\,k} = \frac{A}{1 - r^2}$$

Solution pour problème 6–27 :

(a) Jeweils ein Weg nach unten und oben werden zusammengefasst. Es sind drei Beiträge zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned} W(3) &= H\ (1+r) + r\ H\ (1+r) + r^2\ H\ (1+r) \\ &= H\ (1+r)\ \left(1 + r + r^2\right) = H\ (1 + 2\,r + 2\,r^2 + r^3) \end{aligned}$$

(b) Es sind n Beiträge zu berücksichtigen. Es entsteht eine geometrische Summe.

$$W(n) = H\ (1+r)\ \left(1 + r + r^2 + \ldots r^{n-1}\right) = H\ (1+r)\ \sum_{k=0}^{n-1} r^k = H\ (1+r)\ \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

(c)

$$W(\infty) = \lim_{n\to\infty} W(n) = H\ (1+r)\ \frac{1}{1-r} = H\,\frac{1+r}{1-r}$$

Solution pour problème 6–28 :

$a = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\,\pi)}{n+1}$	konvergiert (Leibniz), da $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$
$b = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4711}{n+1}$	divergiert, da vergleichbar zu $a_n \approx \frac{1}{n+1}$
$c = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4711}{n^2+1}$	konvergiert, da vergleichbar zu $a_n \approx \frac{1}{n^2}$
$d = \sum_{n=3}^{\infty} 3^{-n}$	konvergiert, da geometrische Reihe mit Faktor $q = \frac{1}{3} < 1$
$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$	konvergiert, Wurzelkriterium $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} \to \frac{1}{2}$

Solution pour problème 6–29 :

(a) Es handelt sich um eine geometrische Summe

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10}\ \sum_{j=0}^{n-1} 10^{-j} = \frac{9}{10}\ \frac{1 - 10^{-n}}{1 - 10^{-1}} = 9\ \frac{1 - 10^{-n}}{10 - 1} = 1 - 10^{-n}$$

(b) Es handelt sich nun um eine geometriche Reihe, geschrieben als einfache Grenzwertberechnung.

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \lim_{n\to\infty} (1 - 10^{-n}) = 1$$

Solution pour problème 6–30 :

(a) Quotientenkriterium

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2\,n^2} = \frac{1}{2} < 1\\ a &= \sum_{n=17}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} \quad \text{ist konvergent}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1\\ b &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} \quad \text{ist konvergent}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\,n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1\\ c &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2} \quad \text{ist divergent}\end{aligned}$$

(b) Die Reihe kann als Summe zweier geometrischer Reihen geschrieben werden.

$$\begin{aligned}s &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh n}{e^{2\,n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n - e^{-n}}{2\,e^{2\,n}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\,e^n} - \frac{1}{2\,e^{3\,n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\,e^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\,e^{3\,n}}\\ &= \frac{1}{2\,e}\frac{1}{1-e^{-1}} - \frac{1}{2\,e^3}\frac{1}{1-e^{-3}} = \frac{1}{2\,(e-1)} - \frac{1}{2\,(e^3-1)}\end{aligned}$$

Solution pour problème 6–33 : Utiliser le Théorème de D'Alembert et

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |q|\frac{n+1}{n} \longrightarrow |q| \quad \text{si} \quad n\to\infty$$

Solution pour problème 6–34 : Offensichtlich gilt

$$|a_n\cdot b_n| \le a_n^2 + b_n^2$$

und somit

$$\sum_{n=0}^{N}|a_n\cdot b_n| \le \sum_{n=0}^{N}(a_n^2+b_n^2)$$

d.h. wie haben eine absolut konvergente Majorante.

Solution pour problème 6–35 : Für $\alpha > 1/2$ ist $p = 2\,\alpha > 1$ und somit die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p} < \infty$$

absolut konvergent. Setzen Sie nun $b_n = 1/n^\alpha$ und die Behauptung folgt.

Solution pour problème 6–36 :

(a) Dies ist eine geometrische Reihe

$$3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}=3\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}$$

(b) Dies ist eine geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}=\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}=\frac{1}{1-e}$$

(c) Mit dem Wurzelkriterium gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}\,\sqrt[n]{n^2}\longrightarrow\frac{1}{2}<1$$

somit konvergiert die Reihe.

(d) Mit dem Quotientekriterium gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,e^n}=\frac{e}{n+1}\longrightarrow 0<1$$

somit konvergiert die Reihe.

Solution pour problème 6–37 :

(a) Wir verwenden das Quotientenkriterium mit $a_n=\binom{\alpha}{n}x^n$ und erhalten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}x^n}=\frac{x\,(\alpha-n)}{n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}-x$$

(b) Für $|x|<1$ sind die Reihen absolut konvergent und wir können sie multiplizieren. Mit Hilfe des Cauchy–Produktes von der zwei Reihen gilt

$$B\,(\alpha,x)\cdot B\,(\beta,x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n\quad\text{wobei}\quad d_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}$$

Die in der Aufgabenstellung gegebene Formel besagt nun

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}=\binom{\alpha+\beta}{n}$$

und somit

$$B\,(\alpha,x)\cdot B\,(\beta,x)=B\,(\alpha+\beta,x)$$

Solution pour problème 6–38 :

(a) Für grosse n gilt $\frac{n}{n^2+4} \approx \frac{1}{n}$. Folglich ist wird die Reihe vermutlich divergieren. Es gilt

$$\begin{array}{rcl} \frac{n}{n^2+4} & \geq & \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2\,n} \\ \sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{n} & & \text{ist divergent} \end{array}$$

Somit hat man eine divergente Minorante. Wegen des Minorantenkriteriums ist die Reihe also divergent.

(b) Quotientenkriterium

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2\,x^{n+1}}{n^2\,x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}\ |x| \\ &= |x| \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Reihe für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

(c) Wurzelkriterium

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{(2\,n)^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2\,n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Reihe für alle Werte von $x \in \mathbb{R}$.

Solution pour problème 6–39 :

$$\begin{array}{rcl} a & = & \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-17}{3\,n+17\,n^2} = \frac{1}{17} \\ b & = & \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}}{\cos(1/n)} = \frac{0}{1} \\ c & = & \lim_{h\to 0} \frac{\cosh(14+2\,h)-\cosh 14}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cosh(2\cdot(7+h))-\cosh(2\cdot 7)}{h} \\ & = & 2\ \sinh(2\cdot 7) \quad \text{Ableitung von } \cosh(2\cdot x) \text{ bei } x=7 \\ & & \quad \text{oder de l'Hospital anwenden} \\ d & = & \lim_{h\to 1} \frac{\cosh(14+2\,h)-\cosh 14}{h} = \cosh 16 - \cosh 14 \\ e & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{konvergiert, alternierende Vorzeichen} \\ f & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{1+n^2} \quad \text{konvergiert, Majorante} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ g & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh n}{e^{2n}} \quad \text{konvergiert, Majorante} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} \end{array}$$

Solution pour problème 6–41 : -6, $3/4$, $-7/9$, -4, 12, $4a^3$.

Solution pour problème 6–42 :

$$\lim_{h\to 0} e^{x+h} = \lim_{h\to 0} e^x\,e^h = e^x \lim_{h\to 0} e^h = e^x$$

Solution pour problème 6–44 :

(a) Da die Ableitung an der Stelle $x = 0$ gegeben ist als Wert und durch die Definition der Ableitung gilt

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(b) Aus der Definition der Ableitung, angewandt auf die Funktion $g(x) = e^{3\,x}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\, g\,(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{3\,(x_0+h)} - e^{3\,x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{3\,x_0}\left(e^{3\,h} - 1\right)}{h} \\ &= e^{3\,x_0}\, \lim_{h \to 0} \frac{3\,\left(e^{3\,h} - 1\right)}{3\,h} = e^{3\,x_0}\, 3\, \lim_{3h \to 0} \frac{\left(e^{3\,h} - 1\right)}{3\,h} = e^{3\,x_0}\, 3 \end{aligned}$$

Solution pour problème 6–45 : $\ln x$ ($\log x$) est la fonction inverse la fonction e^x (10^x), qui est monotone et continue, donc continue.

Solution pour problème 6–46 : A cause de $a^x = e^{x \ln a}$ on a une composition des fonctions continues, donc une fonction continue.

Solution pour problème 6–47 : Somme des fonctions continues.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Solution pour problème 6–48 : $\pi/180$.

Solution pour problème 6–50 : $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$, $e = 1$, $f = 0$, $g = 0$.

Solution pour problème 6–51 :

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 (x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin (x/2)}{x/2}\right)^2 \to \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad x \to 0$$

Solution pour problème 6–52 : $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$

Solution pour problème 6–53 : $a = \pi^2/2$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 1/2$

Solution pour problème 6–54 :

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2\,(x-2)}{x\,(x-3)} \lim_{x \to 0} \frac{x\,(x-2)}{(x-3)} = 0$$

(b)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{\sin^2 1}{1 - \cos 1}$$

(c)

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin (x^2)}{x + x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{x\, \sin (x^2)}{x^2\,(1+x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin (x^2)}{x^2} \lim_{x \to 0+} \frac{x}{1+x} = 0$$

(d)

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\tan x}{|x|} = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin\, x}{|x|\, \cos\, x} = \lim_{x \to 0-} \left(\frac{\sin\, x}{|x|} \frac{1}{\cos\, x}\right) = -1$$

(e)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos(3\,x)-1}{x^2}=\frac{-2}{\pi^2}$$

(f)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3\,x)-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos(3\,x)-1)\,(\cos(3\,x)+1)}{x^2\,(\cos(3\,x)+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(3\,x)-1}{x^2\,(\cos(3\,x)+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-9\,\sin^2(3\,x)}{(3\,x)^2\,(\cos(3\,x)+1)}\\ &= -9\,\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3\,x)}{3\,x}\,\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3\,x)}{3\,x}\,\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(3\,x)+1}\\ &= -\frac{9}{2}\end{aligned}$$

Solution pour problème 6–55 :

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+n^2+3\,n^4}{e^{-n}+n^4+n+\sin(n^5)}=3\\ b &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{17\,n^2\,e^{2\,n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{17}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}\,e^2\right)=e^2\\ c &= \lim_{n\to\infty}\frac{17+2^n}{\cos(n)+2^n}=1\\ d &= 3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\ldots=3\,\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=3\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

geometrische Reihe

e : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+4}$ ist konvergent, Vergleich mit $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$

f : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-\cos(n)}{n}$ ist divergent, Vergleich mit $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$

Solution pour problème 6–56 : Calculer

$$\lim_{x\to 0}e^{-1/x^2}=0=a$$

et la fonction est continue partout.

Solution pour problème 6–57 : Es gilt

$$-|x|\leq x\,\sin\frac{1}{x}\leq|x|$$

und somit (Sandwich)

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0$$

(a) Es ist möglich ein solches a zu wählen.

(b)

$$a=\lim_{x\to 0}f(x)=0$$

(c) Nicht zu beantworten.

Solution pour problème 6–58 : La limit $\lim_{x\to 0}\sin(-1/x^2)$ existe pas, donc la fonction n'est pas continue pour $x=0$.

6.4 Récapitulation

Après ce chapitre on doit

- connaître les définitions et notations de base des suites et séries.
- être capable de calculer des limites simples.
- connaître les règles de calcul pour les suites et les séries.
- connaître les méthodes pour examiner la convergence des suites (Suites monotones, Sandwich).
- connaître les limites de quelques séries et suites typiques.
- connaître les critère de base pour examiner la convergence des séries (Majorante, Minorante, D'Alembert, Cauchy, Leibniz).
- être capable de calculer des limites des fonctions.
- connaître les règles de calcule pour des limites des fonctions.
- connaître la définition d'une fonction continue.
- être capable de distinguer entre une fonction continue et une fonction discontinue.
- savoir le théorème de Bolzano et le théorème du maximum.

Chapitre 7

La dérivée

7.1 Qu'est-ce qu'on entend par vitesse?

Considérons un exemple.

Considérons une voiture sur un bout de route droite. Comment peut–on déterminer sa vitesse? On entend souvent

$$\text{vitesse} = \frac{\text{chemin parcouru}}{\text{temps}} \qquad .$$

Cette réponse est correcte si la vitesse est constante. Comment peut on calculer la vitesse instantanée si la voiture accélère ou freine?

Nous supposons que la voiture roule sur une route droite et se trouve à l'endroit $y = 0$ à l'instant $t = 0$. A l'instant t la voiture a parcouru y mètres sur la route, en d'autres termes y est une fonction du temps t.

$$y = f(t)$$

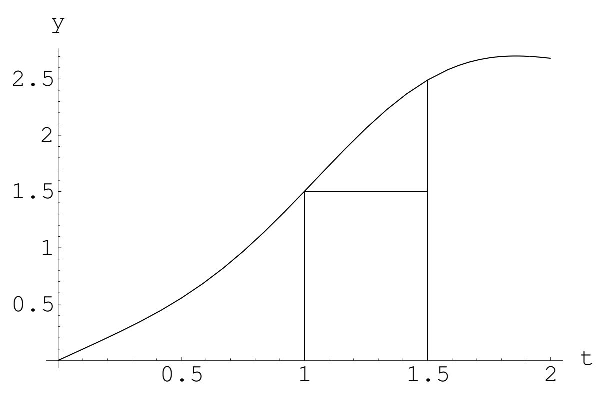


Figure 7.1: Position en fonction du temps

Considérons deux instants $t_0 < t$; la différence de temps est donnée par $\Delta t = t - t_0$. Dans l'intervalle de temps $[t_0, t]$ la voiture a parcouru la distance $\Delta y = f(t) - f(t_0)$. Par conséquent, la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps $[t_0, t]$ est donnée par

$$v_{t_0,t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \qquad .$$

Si l'on veut déterminer une meilleure approximation de la vitesse instantanée à l'instant t_0, il faut rendre l'intervalle de temps plus petit. Si l'expression ci-dessus converge vers un nombre, on peut dire à juste titre que la vitesse instantanée de la voiture est donnée par

$$v_{t_0} := \lim_{t\to t_0} v_{t,t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \qquad .$$

7–1 Exemple : (La chute libre)
Un caillou est lâché dans un puits de 10 m de profondeur. Quelle est la vitesse du caillou lorsqu'il touche le fond?

Le movement du caillou est décrit par

$$y(t) = f(t) = \frac{g}{2}\, t^2 \quad \text{où} \quad g = 9.81\, \frac{m}{s^2}$$

Nous calculons d'abord l'instant t_0 où le caillou touche le fond:

$$10m = \frac{g}{2}\, t_0^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t_0 = \sqrt{\frac{20m}{g}} = 1.43s \quad .$$

Maintenant il nous faut déterminer la vitesse v_{t_0} . A cet effet nous formons pour $t \neq t_0$ le **taux d'accroissement**

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{g}{2}\frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} = \frac{g}{2}\,\frac{(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} = \frac{g}{2}\,(t + t_0) \quad .$$

Il est ainsi facile à voir que

$$v_{t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = g \cdot t_0 = 14.0\, \frac{m}{s} \qquad .$$

Plus tard nous pourrons simplifier le calcul ci-dessus considérablement en utilisant des dérivées, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\, f(t_0) = g \cdot t_0 \qquad .$$

♢

7.2 Tangentes

Etant donné la fonction $f(x) = (\sin x)^6 + x$ nous voulons essayer de déterminer la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $P = (1, f(1))$. Un point P de la tangente est déjà connu; si nous arrivons à trouver la pente M_P , l'équation de la tangente est déterminée. La figure 7.2 montre le graphe de la fonction.

Afin de pouvoir déterminer la pente de la tangente nous considérons un point supplémentaire $Q = (z, f(z))$, $z \neq 1$, sur la courbe. La figure montre la situation pour $z = 2$. Soit l_{PQ} la sécante passant par les points P et Q. Nous allons rapprocher le point Q au point P pour pouvoir déduire la pente de la tangente de celle de la sécante. Puisque nous connaissons deux points de la sécante nous pouvons déterminer sa pente m_{PQ}.

$$m_{PQ} = \frac{f(z) - f(1)}{z - 1}$$

On obtient ainsi l'équation de la sécante

$$l_Q : \qquad y(x) = f(1) + (x - 1)\, m_{PQ} = f(1) + (x - 1)\, \frac{f(z) - f(1)}{z - 1}$$

Nous obtenons pour la pente de la tangente à la courbe au point $P = (1, f(1))$

$$m_P = \lim_{z\to 1} m_{PQ} = \lim_{z\to 1} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1}$$

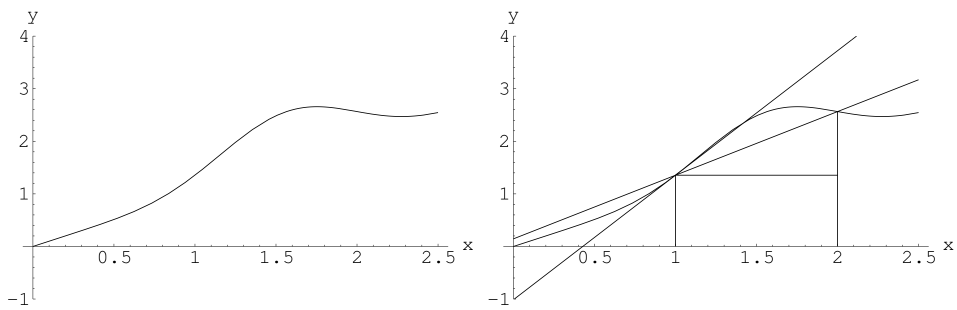


Figure 7.2: Graphe de $f\,(x) = \sin^6\,x + x$ avec sécante et tangente

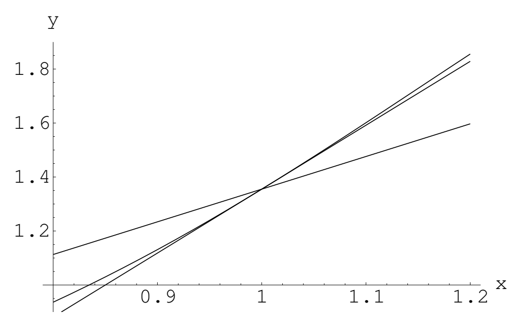


Figure 7.3: Agrandissement du graphe, de la sécante et de la tangente

La limite a été calculée pour la fonction ci-dessus. On obtient une valeur numérique de $m_P \approx 2.36768$. Dans la figure ci-dessus, la courbe, une sécante et la tangente sont dessinées. On constate que la tangente se serre très bien contre la courbe si x est proche de 1 . Ceci devient encore plus flagrant par l'agrandissement ci-dessous.

La tangente donne parmi toutes les droites la meilleure approximation de la courbe $y = f(x)$; **mais cette approximation n'est que bonne si la valeur** x **est proche de 1.** Ainsi, par exemple pour $x = 2$, la sécante est une approximation qui est nettement meilleure.

7.3 Définition de la dérivée

Considérons une fonction $y = f(x)$, c'est-à-dire une fonction avec la variable indépendante x et la variable dépendante y. Géométriquement la dérivée doit fournir la pente de la courbe $y = f(x)$ au point $P_0(x_0, f(x_0))$. Les réflexions ci-dessus mènent aux définitions suivantes:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

L'expression $\frac{d}{dx} f(x_0)$ s'appelle **dérivée de** f **par rapport à** x, évaluée pour x_0.

Les notations suivantes qui ont pour la fonction $y = f(x)$ la même signification sont utilisées:

$$f'\,(x_0) = y'\,(x_0) = D_x f\,(x_0) = \frac{dy}{dx}\,(x_0) = \frac{df}{dx}\,(x_0) = \frac{d}{dx}\,f\,(x_0) = \frac{d}{dx}\,y\,(x_0)$$

ou aussi

$$f' = y' = D_x f = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\, f = \frac{d}{dx}\, y \qquad .$$

Le symbole f' représente la dérivée par rapport à **la** variable indépendante. Si la variable indépendante n'est pas identifiable d'après le contexte, cette notation doit être évitée. Ces notations doivent être modifiées si d'autres symboles que x et y sont utilisés pour la variable indépendante respectivement dépendante. Si la variable indépendante correspond au temps t et $y = f(t)$, on utilise souvent la notation

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

7–2 Définition : La fonction f est **différentiable** en $x = x_0$, si la dérivée $f'(x_0)$ (c'est-à-dire la limite) existe. On dit que la fonction est **dérivable**.

7–3 Exemple : Calculer la dérivée de la fonction $g\,(x) = x^2$ pour $x = 3$.

$$\begin{aligned} g'\,(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{g\,(3+h) - g\,(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(9+6h+h^2) - 9}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{6h}{h} + \frac{h^2}{h}\right) \\ &= 6 = 2\cdot 3 \end{aligned}$$

Avec un calcul presque identique on montre que

$$g'\,(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2\,x \qquad ,$$

par conséquent

$$\frac{d}{dx}\, x^2 = 2\,x \qquad .$$

$\diamondsuit$

Observation: Si vous étudiez maintenant l'exemple introductif pour ce chapitre (voiture), vous allez constater que la vitesse instantanée est donnée par

$$v_{t_0} = \frac{df}{dt}\,(t_0) \qquad .$$

Pour une voiture qui se déplace le long d'une droite, la vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps.

7–4 Définition : La dérivée $f'(x)$ peut de nouveau être interprétée comme une nouvelle fonction de x ce qui mène aux définitions suivantes:

- La fonction $f(x)$ est **dérivable sur l'intervalle ouvert** (a, b), si $f'(x)$ existe pour tout x, $a < x < b$.
- La fonction $f(x)$ est **dérivable sur l'intervalle fermé** $[a, b]$, si
  1. elle est dérivable sur l'intervalle ouvert (a, b)
  2. et
  $$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{existe}$$
  3. et
  $$\lim_{x \to b-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{existe.}$$
- La fonction $f(x)$ est **continûment dérivable sur un intervalle** I, si la fonction est dérivable sur l'intervalle et si la fonction f' est une fonction continue sur l'intervalle. On écrit
  $$f \in C^1(I, \mathbb{R})$$
- Si la fonction $f(x)$ est **continue sur l'intervalle** I, on écrit
  $$f \in C(I, \mathbb{R}) \quad \text{ou aussi} \quad f \in C^0(I, \mathbb{R})$$

7–5 Résultat : *Une fonction dérivable est continue.*

La démonstration de ce fait n'est pas difficile, le résultat est pourtant utile. Si une fonction n'est pas continue en un point, la fonction n'y est pas dérivable non plus.

A cause des résultats correspondants pour l'existence des limites on obtient:

7–6 Résultat : *Une fonction $f(x)$ est dérivable au point $x = a$ si et seulement si*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

7–7 Exemple : La figure 7.4 montre le graphe de la fonction $y = |x|$. Montrer qu'elle est partout dérivable sauf au point $x = 0$. Déterminer la dérivée (là où elle existe). Qu'est-ce que ce résultat signifie pour l'existence de la tangente à la courbe $y = |x|$ au point $(0, 0)$? ♢

7–8 Résultat : *Les fonctions trigonométriques* $\sin x$ *et* $\cos x$ *sont dérivables et on a*

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \qquad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

Il est maintenant facile à voir qu'elles sont infiniment dérivables.

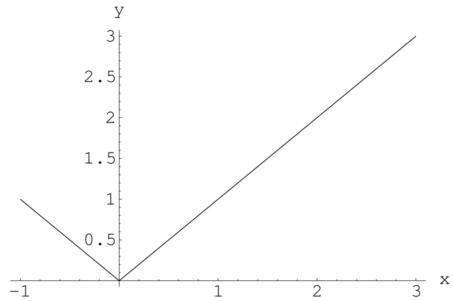


Figure 7.4: Graphe de $|x|$

Démonstration : La démonstration de ce résultat se base sur les limites suivantes:
(a)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x)$$

(b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\sin(x)$$

Elles ont déjà été déterminées dans le chapitre sur les limites de fonctions. □

Il est possible de déterminer la dérivée d'autres fonctions trigonométriques à l'aide des limites. Il est pourtant plus efficace d'utiliser les règles de dérivations que nous apprendrons plus tard.

7.4 Approximation linéaire et symboles $o(x)$ et $O(x)$.

Presque toutes les applications des dérivées reposent sur le fait que la dérivée fournit une bonne approximation d'une fonction «compliquée» par une fonction simple et linéaire. La tangente donne l'approximation la meilleure possible d'une courbe $y = f(x)$ par une droite. On a pour de petites valeurs de h :

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h \qquad .$$

Plus précisément on a

$$f(x+h) - f(x) - f'(x)h \to 0 \quad \text{si} \quad h \to 0 \qquad .$$

En fait, l'approximation est même nettement meilleure, à savoir

$$\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h}{h} \to 0 \quad \text{si} \quad h \to 0 \qquad ,$$

ou

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + r(h) \quad \text{où} \quad \frac{r(h)}{h} \to 0 \quad \text{si } h \to 0 \qquad ,$$

On écrit cette propriété sous la forme

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + o(h) \quad ,$$

c'est-à-dire l'erreur est d'un ordre inférieur à h. Pour tout nombre $A \in \mathbb{R}$ avec $A \neq f'(x)$ on a

$$f(x+h) \neq f(x) + A\,h + o(h) \quad ,$$

Cela correspond au fait que la tangente se serre mieux contre la courbe que toute autre droite.

7–9 Définition : La fonction $g(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ s'appelle **approximation linéaire** de la fonction $f(x)$ à l'endroit $x = x_0$.

7–10 Définition : Soit $r(z)$ une fonction de z. On utilise ensuite les notations suivantes:

(a)

$$r(z) = o(z) \quad \text{si} \quad \lim_{z\to 0} \frac{r(z)}{z} = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire l'expression $r(x)$ est **de plus petit ordre** que x.

(b)

$$r(z) = O(z)$$

s'il y a une constante c telle que

$$|\,r(z)\,| \leq c\,|z|$$

si $|z|$ est suffisamment petit. L'expression $r(x)$ est **du même ordre** que x (au plus).

7–11 Exemple : Nous illustrons l'utilisation de $o(x)$ et $O(x)$ par quelques exemples simples. A cause de

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \quad \text{si} \quad x \to 0$$

on a

$$\begin{aligned}
\sin x &= O(x) \\
\frac{\sin x}{x} &= O(1) \\
\sin(x^2) &= o(x) \\
\cos x &= 1 + O(x^2) \\
\cos x &= 1 + o(x) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)
\end{aligned}$$

Les deux derniers exemples exigent pourtant des connaissances des séries de Taylor

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$$

♢

7–12 Exemple : Calculer $\sqrt{143}$ sans calculatrice aussi précis que possible à l'aide d'une approximation linéaire. Utiliser $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ pour $x > 0$.

Solution: Avec les notations $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 144$ und $h = -1$ il nous faut calculer $f(x_0 + h)$. L'approximation linéaire est donnée par

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$$

Nous obtenons pour notre fonction $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ et $f'(x_0) = 1/(2\sqrt{144}) = 1/24$. Donc

$$\sqrt{143} = f(x_0 + h) \approx 12 + \frac{1}{24}(-1)$$

♢

7–13 Exemple : L'approximation linéaire de la fonction $f(x) = \sin(x)$ au point $x_0 = \pi/6$ est donnée par

$$f\,(\frac{\pi}{6}+h) \approx g\,(h) = f\,(\frac{\pi}{6}) + f'\,(\frac{\pi}{6}) \cdot h = \frac{1+\sqrt{3}h}{2}$$

Le programme de *Octave* ci-dessous calcule un tableau avec les valeurs de h, de $f\,(x_0+h)$, de l'approximation linÃ©aire $g\,(h)$ et de l'erreur $g(h)-f(x_0+h)$. Notez que si x_0 est approchÃ© par un chiffre supplÃ©mentaire, l'approximation de $f(x_0+h)$ devient exacte Ã**?** deux chiffres supplÃ©mentaires.

Octave

```
x0 = pi/6;
function y = f(x)
  y = sin(x);
endfunction
function y = g(x0,h)
  y = sin(x0) + cos(x0)*h;
endfunction
format short e
h = 10.^-(0:6)';
[h, f(x0+h), g(x0,h), g(x0,h)-f(x0+h)]
-->
ans =
   1.0000e+00   9.9889e-01   1.3660e+00   3.6714e-01
   1.0000e-01   5.8396e-01   5.8660e-01   2.6422e-03
   1.0000e-02   5.0864e-01   5.0866e-01   2.5144e-05
   1.0000e-03   5.0087e-01   5.0087e-01   2.5014e-07
   1.0000e-04   5.0009e-01   5.0009e-01   2.5001e-09
   1.0000e-05   5.0001e-01   5.0001e-01   2.5000e-11
   1.0000e-06   5.0000e-01   5.0000e-01   2.4991e-13
```

Notez que l'approximation est misérable pour de grandes valeurs de h (par exemple $h = 1.0$). $\diamondsuit$

7.5 Règles de dérivation

Pour des applications il serait très pénible de calculer les dérivées avec la définition de la limite. C'est la raison pour laquelle on établit quelques règles de dérivation qui sont extrêmement utiles. Ces règles nous permettent de calculer presque toutes les dérivées à l'aide de quelques dérivées de base. Les calculs peuvent ainsi être simplifiés.

7–14 Théorème : *Soit f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = (a, b)$. On a:*

(a) **Dérivée d'une somme:** *La fonction $(f + g)(x)$ est dérivable sur I et*

$$(f+g)' = f' + g' \qquad .$$

(b) Soit $c \in \mathbb{R}$, alors la fonction $(cf)(x)$ est dérivable sur I et

$$(cf)' = c \cdot f'$$

(c) **Dérivée d'un produit:** *La fonction $(f \cdot g)(x)$ est dérivable sur I et*

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

(d) Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction $\dfrac{1}{g(x)}$ est dérivable et

$$(\frac{1}{g})' = \frac{-g'}{g^2} \qquad .$$

(e) **Dérivée d'un quotient:** *Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable et*

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \qquad .$$

Démonstration : Les démonstrations de ces règles très importantes sont données en classe. □

Il est maintenant facile de prouver les résultats suivants à l'aide de ces règles de dérivation.

7–15 Résultat :

1. *Une fonction de la forme $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, est partout dérivable et on a*

$$\frac{d}{dx}\, x^n = n x^{n-1}$$

2. *Un polynôme $f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$ est partout dérivable et on a*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\,(\sum_{n=0}^{m} a_n x^n) = \sum_{n=1}^{m} a_n n x^{n-1}$$

3. *A part les zéros de g une fraction rationnelle $f(x)/g(x)$ est partout dérivable*

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \qquad .$$

Démonstration :

1. Utiliser la règle pour la dérivée d'un produit pour faire un raisonnement par récurrence sur n .
2. Utiliser les règles pour la dérivée d'une somme et d'un produit.
3. Utiliser les deux premiers résultats ainsi que la règle pour la dérivée d'un quotient.

□

7–16 Résultat : *La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est pour tout $x > 0$ dérivable et*

$$\frac{d}{dx}\,\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad .$$

Démonstration : Il y a au moins deux démonstrations:

1. On peut calculer la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad .$$

   Le calcul est très astucieux. Indication: multiplier les deux membres par $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$.

2. En supposant que $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable, on peut calculer la dérivée par une astuce élégante. On a

$$x = \sqrt{x}\sqrt{x} = f(x) \cdot f(x) \qquad .$$

   Nous utilisons la règle pour dériver un produit avec $f = g$. En dérivant l'équation ci-dessus nous obtenons

$$1 = f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x) = 2f'(x) \cdot f(x) = 2f'(x) \cdot \sqrt{x}$$

   On obtient le résultat souhaité en résolvant cette équation par rapport à $f'(x)$.

□

7–17 Exemple : Montrer à l'aide d'un calcul similaire que

$$\frac{d}{dx}\,\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

pour tout $x > 0$. Il ne faut pas montrer que la fonction est dérivable, il suffit de déterminer la valeur de la dérivée. ♢

Il n'est possible qu'avec beaucoup de difficultés de déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = \sin(e^x)$ à l'aide des règles précédentes. Il nous manque une méthode pour traiter des compositions de fonctions. Voilà un exemple approprié.

7–18 Exemple : Soit $f(x) = \sin(2x)$. Afin de déterminer la dérivée il nous faut calculer la limite suivante.

$$\begin{aligned}
\lim\nolimits_{h\to 0} \frac{\sin(2x+2h) - \sin(2x)}{h} &= 2\,\lim_{h\to 0} \frac{\sin(2x+2h) - \sin(2x)}{2h} \\
&= 2\,\lim_{d\to 0} \frac{\sin(2x+d) - \sin(2x)}{d} \\
&= 2\,\cos(2x)
\end{aligned}$$

Notez que 2 est la dérivée de $2x$ par rapport à x. ♢

Cet exemple nous amène au résultat fondamental:

7–19 Théorème : *(Dérivée d'une fonction composée)*
Soit f et g deux fonctions dérivables. Alors: la composition

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

est aussi dérivable et on a

$$\frac{d}{dx}\,h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Démonstration : Il nous faut déterminer la limite

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

Nous posons $\Delta y = g(x+\Delta x) - g(x)$. On a

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) - g(x) = 0$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x)+\Delta y) - f(g(x))}{\Delta y} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(g(x)+\Delta y) - f(g(x))}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Le calcul n'est que juste si $\Delta y \neq 0$. Ce problème technique peut être contourné. □

7–20 Exemple : Les calculatrices HP de la série 48 peuvent illustrer les règles de dérivation d'une très bonne façon. Assurez-vous de n'avoir pas défini une variable X et que le mode `SYM` est activé. En pressant la touche `EVAL` sans cesse, la fonction $\sin(X \cdot X)$ peut être dérivée. On obtient la série suivante de résultats:

$$\begin{aligned} &\partial X(SIN(X*X)) \\ &COS(X*X)*\partial X(X*X) \\ &COS(X*X)*(\partial X(X)*X+X*\partial X(X)) \\ &COS(X*X)*(X+X) \end{aligned}$$

Toutes les étapes intermédiaires sont affichées. Le résultat final est identique avec le résultat $\frac{d}{dx}\sin(x^2) = \cos(x^2)\,2x$. Si l'on entre les deux expressions $SIN(X*X)$ et X dans la calculatrice HP et presse la touche ∂ , le résultat est calculé directement. ♢

7–21 Exemple : Déterminer les dérivées des fonctions ci-dessous à l'aide de la règle de la dérivée d'une fonction composée.

(a) $f(x) = \sinh(e^{-x})$

(b) $f(x) = 1/\cos x$

(c) $g(x) = (\cos x)^3$

(d) $g(x) = \cos(x^3)$

♢

7–22 Résultat : *Par une application successive de la règle de la dérivée d'une fonction composée on peut aussi calculer la dérivée d'une composition de plus de deux fonctions. Pour*

$$h(x) = (f \circ g \circ k)(x) = f(g(k(x)))$$

on a, par exemple,

$$\frac{d}{dx}\, h(x) = f'(g(k(x))) \cdot g'(k(x)) \cdot k'(x)$$

7–23 Exemple : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes à l'aide de la règle de la dérivée d'une fonction composée.

(a) $f(x) = \sinh(e^{-2x})$

(b) $f(x) = \cos(\cos(\cos x))$

(c) $f(x) = \cosh(\sinh(\cos x))$

(d) $g(x) = (\sin x^2)^3$

(e) $g(x) = (\sin(x^3))^2$

$\diamondsuit$

Dans cette section nous avons appris les règles de dérivation les plus importantes. Le tableau ci-dessous contient les dérivées des fonctions élémentaires. Après quelques exercices vous ne devriez plus avoir besoin des tableaux et des formulaires pour ces dérivées et les règles de dérivation.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Tableau 7.1: Tableau de dérivées des fonctions élémentaires

7.6 Dérivées supérieures

Si la fonction $y = f(x)$ est dérivable, la dérivée $f'(x)$ peut aussi être interpreſée comme une fonction. On peut examiner si cette ≪nouvelle≫ fonction est aussi dérivable. Si c'est le cas on appelle la dérivée de $f'(x)$ la **dérivée seconde** de $f(x)$. On écrit:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\, f'(x) = \frac{d^2}{dx^2}\, f(x) = D_x^2\, f(x)$$

On peut déterminer des **dérivées supérieures** de la même manière. Nous n'avons pas besoin de nouvelles règles de dérivation. Il suffit d'appliquer les règles habituelles plusieurs fois.

7–24 Exemple : Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes:

(a) $f(x) = x^3$ et $n = 2$.

(b) $f(x) = \sin(1+x)$ et $n = 2$.

(c) $f(x) = (1+5x)^8$ et $n = 2$.

(d) $f(x) = (1+5x^2)^8$ et $n = 2$.

(e) $f(x) = \sin(2x)$ et $n = 3$.

(f) $f(x) = x\sin(x)$ et $n = 2$.

(g) $f(x) = e^x \sin(2x)$ et $n = 2$.

(h) $f(x) = 1/(1+x)$ et $n = 3$.

$\diamondsuit$

7–25 Définition : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ s'appelle n **fois continûment dérivable**, si elle est n fois dérivable et si la dérivée n-ième est encore continue sur l'intervalle I. On écrit

$$f \in C^n\left(I, \mathbb{R}\right) \quad .$$

7.7 Quelques résultats concernant les dérivées

7.7.1 Théorème de Rolle

7–26 Résultat : *Théorème de Rolle*[1]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable pour $a < x < b$ et pour laquelle $f(a) = f(b)$. Alors, il y a une valeur $\xi \in (a, b)$ telle que $f'(\xi) = 0$.

Démonstration : Il faut absolument illustrer ce résultat par des graphes appropriés. La fonction f possède une des trois propriétés:

1. $f(x)$ est constante. Dans ce cas la dérivée est égale à zéro pour tout $x \in (a, b)$.
2. Il y a un $x \in (a, b)$ tel que $f(x) > f(a)$. A cause du théorème du maximum il y a un $\xi \in (a, b)$ tel que $f(\xi) \geq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et on a $f'(\xi) = 0$.
3. Il y a un $x \in (a, b)$ tel que $f(x) < f(a)$. On procède d'une façon similaire comme dans le deuxième cas.

□

7.7.2 Théorème des accroissements finis et applications

7–27 Théorème : *Théorème des accroissement finis*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable pour $a < x < b$. Alors, il y a un $\xi \in (a, b)$ tel que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou

$$f'(\xi)\,(b - a) = f(b) - f(a)$$

Démonstration : Nous considérons la nouvelle fonction

$$g(x) = f(x) - \frac{x - a}{b - a}\,(f(b) - f(a)) \quad .$$

On a

$$g(a) = f(a) \quad \text{et} \quad g(b) = f(a)$$
$$g'(x) = f'(x) - \tfrac{1}{b-a}\,(f(b) - f(a))$$

Il découle du théorème de Rolle appliqué à la fonction g que

$$g'(\xi) = 0$$

pour une valeur appropriée ξ. Cela correspond exactement à l'assertion. □

[1]Michel Rolle (1652–1719), mathématicien français

7–28 Résultat : *On a pour $x > 0$*

$$\sin x \leq x$$

Démonstration : Nous appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction sin avec $a = 0, b = x$ et obtenons ainsi

$$(x - 0) \cos \xi = \sin x - \sin 0$$

A cause de $|\cos \xi| \leq 1$ l'assertion en résulte. Notez qu'il n'est pas nécessaire de déterminer la position de ξ . □

7–29 Exemple : Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ satisfait les conditions du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[-1, 4]$ et trouver le ξ correspondant. Représenter le résultat graphiquement. ♢

7–30 Exemple : Montrer que le théorème des accroissements finis est faux pour la fonction $f(x) = \sin|x|$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Représenter le résultat graphiquement. ♢

7–31 Résultat : *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable pour tout $a < x < b$ et pour laquelle il y a un nombre M tel que*

$$|f'(x)| \leq M \quad \textit{pour tout } x\,, \quad a < x < b \quad .$$

Alors on a

$$|f(b) - f(a)| \leq M\,(b - a)$$

7–32 Résultat : *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable pour $a < x < b$.*

- *Si*

  $$0 < f'(x) \quad \textit{pour tout } x\,, \quad a < x < b$$

  alors on a

  $$f(a) < f(b)$$

- *Si*

  $$0 \leq f'(x) \quad \textit{pour tout } x\,, \quad a < x < b$$

  alors on a

  $$f(a) \leq f(b)$$

Comme appliquation importante du théorème des accroissements finis nous pouvons maintenant déterminer la précision de l'approximation d'une fonction par sa tangente. C'est le premier d'une série de résultats donnés par Taylor[2].

[2]Brook Taylor (1685–1731), mathématicien anglais

7–33 Théorème : ***(Approximation de Taylor du premier ordre)***
Soit I un intervalle et x_0 , $x_0 + h \in I$ avec une fonction

$$f \in \ C^2 (I, \mathbb{R})$$

Alors, on a

$$f (x_0 + h) = f (x_0) + f' (x_0) h + R$$

avec

$$R = \frac{1}{2} \, f'' (\xi) \, h^2 \quad \text{pour un } \xi \text{ entre } x_0 \text{ et } x_0 + h$$

Démonstration : Soit x_0 et x fixés ($x - x_0 = h$). La constante c est définie par la relation

$$f (x) = f (x_0) + f' (x_0) (x - x_0) + c \, (x - x_0)^2$$

Nous devons donc trouver une formule pour c . Pour ce choix fixé de x_0 et x nous considérons la fonction g avec la nouvelle variable indépendante z

$$g (z) = f (z) + f' (z) \, (x - z) + c \, (x - z)^2$$

On a les relations $g (x_0) = f (x)$ et $g (x) = f (x)$ où la dérivée est calculée par rapport à la variable z :

$$g' (z) = f' (z) + f'' (z) \, (x - z) - f'(z) - 2c(x - z)$$

Le théorème de Rolle implique l'existence d'un ξ entre x_0 et $x_0 + h$ tel que $g'(\xi) = 0$. Il s'en suit que

$$0 = g' (\xi) = f'' (\xi) \, (x - \xi) - 2c(x - \xi)$$

En résolvant cette équation par rapport à c nous obtenons

$$c = \frac{1}{2} \, f'' (\xi)$$

□

7–34 Exemple : L'approximation de $f (x) = \sin \, x$ par la tangente passant par l'origine est donnée par

$$\sin \, x \approx x$$

Selon le théorème ci-dessus l'erreur R est de la forme

$$R = \frac{1}{2} \, f'' (\xi) \, x^2$$

pour un ξ approprié avec $|\xi| \leq |x|$. On a pour cet exemple $f'' (x) = - \sin \, x$ et ainsi

$$R = -\frac{1}{2} \, \sin (\xi) \, x^2$$

A cause de $| \sin \, \xi| \leq 1$ on a

$$|R| \leq \frac{1}{2} \, x^2$$

On a dans cet exemple particulier

$$| \sin \, \xi| \leq |\xi| \leq |x|$$

et ainsi on a même

$$|R| \leq \frac{1}{2} \, x^3$$

Nous **n'essayons pas** de calculer l'erreur exactement. Il suffit de trouver une borne supérieure. ♢

7–35 Exemple : Une approximation de $f(x) = \sqrt{x}$ pour x proche de 1 est donnée par

$$\sqrt{x} \approx f(1) + f'(1)\,(x-1) = 1 + \frac{1}{2}\,(x-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x$$

car $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ et par conséquent $f'(1) = 1/2$. Le théorème ci-dessus montre que l'erreur R possède la forme

$$R = \frac{1}{2}\,f''(\xi)\,(x-1)^2$$

pour un ξ approprié. On obtient pour cet exemple

$$f''(x) = (\frac{1}{2\,x^{1/2}})' = \frac{-1}{4\,x^{3/2}}$$

Si $x > 1$ on a $x^{3/2} > 1$ et ainsi

$$|R| < \frac{1}{8}\,(x-1)^2 \quad \text{pour} \quad x > 1$$

Si $1/2 < x < 1$ nous utilisons $\xi > 1/2$ et par conséquent

$$f''(\xi) \leq \frac{1\sqrt{8}}{4} \leq \frac{3}{4}$$

On obtient ainsi

$$|R| < \frac{3}{8}\,(x-1)^2 \quad \text{pour} \quad 1/2 < x < 1$$

Dans cet exemple nous avons trouvé différentes bornes pour les erreurs. De nouveau nous n'avons pas calculé l'erreur exactement, mais nous avons uniquement cherché une borne supérieure. ♢

7–36 Exemple : Trouver une approximation de $f(x) = \tan x$ pour des petites valeurs de $|x|$. Trouver une borne pour la valeur maximale possible, si $-1 \leq x \leq 1$. ♢

7–37 Théorème : *Généralisation du théorème des accroissements finis*
Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues qui sont dérivables pour $a < x < b$ et soit $g(a) \neq g(b)$. Alors il y a un $\xi \in (a,b)$ tel que

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Démonstration : Soit

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,g(x)$$

Alors $h(b) - h(a) = 0$. Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $h(x)$ implique l'existence d'un ξ tel que

$$0 = h'(\xi) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,g'(x) \quad ,$$

d'où suit l'assertion. □

7.8 Règle de l'Hospital pour calculer des limites

7–38 Exemple : La limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

ne peut pas être déterminée en substituant $x = 0$ car nous obtenons une forme indéterminée $0/0$. En utilisant pourtant l'approximation

$$\sin x = x - \frac{1}{2} \sin(\xi)\, x^2$$

et en divisant le numérateur et le dénominateur par x, on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 + \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} (\sin(\xi)\, x) = 1 + 0$$

$\diamondsuit$

Le calcul ci-dessus utilise l'idée suivante:
Soit $f(0) = g(0)$. Afin de déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

on utilise les approximations

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(0)\, x + \tfrac{1}{2} f''(\xi)\, x^2 = x\ \ (f'(0)\, x + O(x)) \\ g(x) &= g'(0)\, x + \tfrac{1}{2} g''(\nu)\, x^2 = x\ \ (g'(0)\, x + O(x)) \end{aligned}$$

et divise le numérateur et le dénominateur par x . On obtient ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(0)}{g'(0) + O(x)} + \lim_{x\to 0} \frac{O(x)}{g'(x) + O(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

La base de la règle **de l'Hospital** [3] est le théorème suivant.

7–39 Théorème : *Soit f et g deux fonctions continûment dérivable avec*

$$f(a) = g(a) = 0$$

et soit $g'(x) \neq 0$ pour x proche de a. Si la limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

existe, alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

[3] Le marquis de l'Hospital (1661–1704) acheta les règles qui portent son nom de Johann Bernoulli! Les règles, démonstrations et exemples lui furent communiqué de Bernoulli. De l'Hospital paya Bernoulli pour pouvoir publier les résultats. Il écriva le premier traité sur le calcul différentiel.

Démonstration : Source : [Apos92b, p196]
Sans restriction de la généralité nous pouvons supposer que $g'(a) > 0$, sinon nous multiplions f et g avec -1. Pour un $0 < \varepsilon$ fixé (typiquement petit) on a

$$L - \varepsilon \leq \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon$$

si x est suffisamment proche de a. Par conséquent

$$(L - \varepsilon)\, g'(x) \leq f'(x) \leq (L + \varepsilon)\, g'(x)$$

- A cause de $f(a) = g(a) = 0$ on a pour $x > a$ (théorème de la valeur intermédiaire)

$$(L - \varepsilon)\, g(x) \leq f(x) \leq (L + \varepsilon)\, g(x)$$

  Puisque $g(x) > 0$ on a aussi

$$(L - \varepsilon) \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq (L + \varepsilon) \quad \text{pour} \quad x > a$$

- Nous obtenons également pour $x < a$

$$(L - \varepsilon)\, g(x) \geq f(x) \geq (L + \varepsilon)\, g(x)$$

  Puisque $g(x) < 0$ on a aussi

$$(L - \varepsilon) \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq (L + \varepsilon) \quad \text{pour} \quad x < a$$

Par conséquent nous avons démontré que l'expression $f(x)/g(x)$ diffère de L par moins que ε si seulement nous choisissons x suffisamment proche de a . □

7–40 Théorème : *(Règles de l'Hospital)*
Soit f et g des fonctions dérivables pour lesquelles

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ou

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

En outre soit $g'(x) \neq 0$ pour tout x proche de a. Alors on a

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

si la limite à gauche existe. Ici $a = \pm\infty$ est admis.

Démonstration : Le cas $a \neq \pm\infty$ avec des limites finies a été démontré dans le théorème précédent. Si $a = \infty$ nous utilisons la substitution $z = 1/x$ et l'astuce

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z\to 0+} \frac{f(1/z)}{g(1/z)} = \lim_{z\to 0+} \frac{f'(1/z)/z^2}{g'(1/z)/z^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nous renonçons à la démonstration du cas

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty\,.$$

□

Afin de déterminer des limites de la forme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

on peut utiliser la marche à suivre:

1. Vérifier si les fonctions sont suffisamment souvent dérivables.
2. Après avoir substitué $x = a$, examiner si vous obtenez une forme indéterminée. ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$). Sinon le problème est très facile à résoudre!
3. Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$ et examiner la nouvelle limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4. Si nécessaire répéter le procédé pour la nouvelle limite.

7–41 Exemple : Calculer les limites suivantes

(a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{10x^{12} - 11x^{11} + x}{(1-x)^2}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$$

(c)

$$\lim_{x\to 8} \frac{3-\sqrt{x+1}}{x^2-64}$$

(d)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$$

(e)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$$

♢

7–42 Exemple : Afin de pouvoir déterminer la limite

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$$

il nous faut mettre la fonction sous une autre forme.

$$x^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right)$$

Nous examinons d'abord la limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Puisque la limite à gauche existe et puisque la fonction exponentielle est continue, on a

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \exp 0 = 1$$

♢

7–43 Exemple : Calculer les limites suivantes

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{21}}{e^x}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0+} (\sin x)^x$$

(c)

$$\lim_{x\to 1+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$$

(d)

$$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x$$

♢

L'exemple ci-dessus montre que la condition $g'(x) \neq 0$ pour x proche de a est importante. Heureusement, de telles fonctions apparaissent très rarement dans les applications.

7–44 Exemple : (contre-exemple) Source : [Apos92b, p192]
Soit

$$f(x) = 2x + \sin(2x) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) \cdot e^{\sin x}$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\,, \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

et nous pouvons essayer d'appliquer la règle de l'Hospital pour déterminer

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + 2\cos(2x) = 4\cos^2 x \\ g'(x) &= e^{\sin x}\,(f'(x) + \cos\,x \cdot f(x)) \\ &= e^{\sin x}\,(4\cos^2 x + \cos\,x\,(2x - \sin(2x))) \\ &= e^{\sin x}\cos x\,(4\cos x + 2x - \sin(2x))) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = e^{-\sin x}\,\frac{\cos x}{4\cos x + 2x - \sin(2x)}$$

Donc

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

mais la limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} e^{\sin x}$$

n'existe pas. ♢

7.9 Polynômes de Taylor, approximations d'ordre supérieur

7.9.1 Polynômes et schéma de Horner

Dans le chapitre sur les polynômes nous avons établi le **grand schéma de Horner.** Nous allons constater qu'on peut bien approcher le comportement d'un polynôme donné $f(x)$ pour x proche de x_0 à l'aide de cette méthode.

Nous considérons comme exemple le polynôme

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12 \; .$$

Le grand schéma de Horner est donné par

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & 3 & -2 & 5 & -7 & -12 \\
x_0 = -2 & & -6 & 16 & -42 & 98 \\
\hline
 & 3 & -8 & 21 & -49 & \underline{86} \\
x_0 = -2 & & -6 & 28 & -98 & \\
\hline
 & 3 & -14 & 49 & \underline{-147} & \\
x_0 = -2 & & -6 & 40 & & \\
\hline
 & 3 & -20 & \underline{89} & & \\
x_0 = -2 & & -6 & & & \\
\hline
 & 3 & \underline{-26} & & & \\
x_0 = -2 & & & & & \\
\hline
 & \underline{3} & & & &
\end{array}$$

Le bloque le plus supérieur du schéma nous donne le résultat de la division polynomiale de $f(x)$ par le facteur linéaire $(x+2)$

$$f(x) = 86 + (x+2)\,(3x^3 - 8x^2 + 21x - 49)$$

En répétant la division par $(x+2)$ on obtient finalement

$$f(x) = 86 - 147\,(x+2) + 89\,(x+2)^2 - 26\,(x+2)^3 + 3\,(x+2)^4$$

Pour des valeurs de x proche de -2 le graphe du polynôme ressemble à une parabole qui est tournée vers le haut

$$p(x) = 86 - 147\,(x+2) + 89\,(x+2)^2$$

On a

$$f(-2+h) = p(-2+h) + o(h^2) \; ,$$

c'est-à-dire, l'erreur est d'un plus petit ordre que $h^2 = (x+2)^2$. Ce résultat peut aussi être mis sous la forme

$$f(-2+x) = 86 - 147\,x + 89\,x^2 + o(x^2)$$

7–45 Définition : Le nouveau polynôme $p(x)$ s'appelle **polynôme de Taylor d'ordre 2** de la fonction $f(x)$, **développé au point** $x_0 = -2$.

Nous essayons d'établir un rapport entre les coefficients 86, -147 et 89 et les dérivées de la fonction initiale $f(x)$. A cet effet nous considérons la représentation suivante de la fonction et leurs dérivées

$$\begin{array}{rccccc}
f(x) = & 86 & -147\,(x+2) & +89\,(x+2)^2 & -26\,(x+2)^3 & +3\,(x+2)^4 \\
f'(x) = & & -147 & +89\cdot 2\,(x+2) & -26\cdot 3\,(x+2)^2 & +3\cdot 4\,(x+2)^3 \\
f''(x) = & & & +89\cdot 2 & -26\cdot 3\cdot 2\,(x+2) & +3\cdot 4\cdot 3\,(x+2)^2 \\
f'''(x) = & & & & -26\cdot 3\cdot 2 & +3\cdot 4\cdot 3\cdot 2\,(x+2) \\
f^{(4)}(x) = & & & & & +3\cdot 4\cdot 3\cdot 2
\end{array}$$

Par conséquent, on a pour $x = x_0 = -2$

$$f\,(-2) = 86\;, \quad f'(-2) = -147\;, \quad f''(-2) = 2!\cdot 89\;, \quad f'''(-2) = -3!\cdot 26\;, \quad f^{(4)}(-2) = 4!\cdot 3$$

Nous avons retrouvé les nombres le long de l'arête droite du grand schéma de Horner comme dérivées du polynôme $f\,(x)$ en x_0, seul les factorielles viennent s'ajouter. Le polynôme de Taylor d'ordre 2 peut donc également être écrit comme

$$\begin{array}{rccccc} f\,(-2+x) = & 86 & -147\,x & +89\,x^2 & +o(x^2) \\ = & f\,(-2) & +f'(-2)\,x & +\frac{1}{2!}\,f''(-2)\,x^2 & +o(x^2) \end{array}$$

Le polynôme de Taylor d'ordre 3 développé en $x_0 = -2$ peut être déterminé de la même manière. On trouve

$$\begin{array}{rcccccc} f\,(-2+x) = & 86 & -147\,x & +89\,x^2 & -26\,x^3 & +o(x^3) \\ = & f\,(-2) & +f'(-2)\,x & +\frac{1}{2!}\,f''(-2)\,x^2 & +\frac{1}{3!}\,f'''(-2)\,x^3 & +o(x^3) \end{array}$$

A l'aide du symbole ≪somme≫ le dernier résultat peut être écrit sous la forme

$$f\,(-2+x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!}\,f^{(n)}\,(-2)\,x^n \quad + o(x^3).$$

ou

$$f\,(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!}\,f^{(n)}\,(-2)\,(x+2)^n + o((x+2)^3)$$

7.9.2 Fonctions générales

Malheureusement le schéma de Horner n'est appliquable que pour des polynômes et non pas pour des fonctions plus générales. Des dérivées peuvent pourtant être calculées pour des fonctions ≪quelconques≫ et c'est la raison pour laquelle on peut aussi déterminer des polynômes de Taylor pour ces fonctions.

7–46 Définition : Soit $f\,(x)$ une fonction qui est n fois dérivable en $x = x_0$. On appelle

$$T_n\,(\Delta x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,f^{(k)}\,(x_0)\,\Delta x^k$$

le **polynôme de Taylor d'ordre** n de la fonction $f\,(x)$, **développée en** x_0 .

Sans utiliser le symbole somme la formule est donnée par

$$T_n\,(\Delta x) = f\,(x_0) + f'\,(x_0)\,\Delta x + \frac{1}{2!}\,f^{(2)}\,(x_0)\,\Delta x^2 + \frac{1}{3!}\,f^{(3)}\,(x_0)\,\Delta x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\,f^{(n)}\,(x_0)\,\Delta x^n$$

Les observations faites ci-dessus des polynômes f peuvent être formulées de la manière suivante

$$f\,(x_0 + \Delta x) = T_n(\Delta x) + O\,(\Delta x^{n+1})$$

Le théorème fondamental qui suit veut dire que le polynôme de Taylor est une bonne approximation de la fonction initiale si x est proche de x_0.

7–47 Théorème : ***(Formule d'approximation de Taylor)***
Soit I un intervalle et x_0 , $x_0 + h \in I$ avec une fonction

$$f \in \; C^{n+1}\,(I, \mathbb{R})$$

Alors on a

$$f\,(x_0 + h) = T_n(h) + R_n$$

où

$$T_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\,(x_0)}{k!}\,h^k$$

et le reste est donné par

$$R_n = \frac{1}{(n+1)\,!}\;f^{(n+1)}(\xi)\;h^{n+1} \quad \text{pour un } \xi \text{ situé entre } x_0 \text{ et } x_0 + h$$

Dans le cas $n = 1$ ce théorème fournit la ≪vieille≫ proposition sur l'approximation de Taylor du premier ordre (tangente). La démonstration du théorème est une copie de la vieille démonstration avec quelques modifications minimes. Comparez les deux démonstrations.

Démonstration : Soit x_0 et x fixés ($x - x_0 = h$). La constante c est définie par la relation

$$f\,(x) = T_n(x - x_0) + c\;(x - x_0)^{n+1}$$

Il nous faut donc trouver une formule pour c . Pour ce choix fixé de x_0 et x nous considérons la fonction g avec la nouvelle variable indépendante z

$$g\,(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\;f^{(k)}(z)\;(x - z)^k + c\;(x - z)^{n+1}$$

On a pour cette fonction $g\,(x_0) = T_n(x - x_0) = f(x)$ et $g\,(x) = f(x)$ avec la dérivée (par rapport à z)

$$\begin{aligned} g'(z) = &\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\;\left(f^{(k+1)}(z)\;(x-z)^k - k\;f^{(k)}(z)\;(x-z)^{k-1}\right) - (n+1)\;c\;(x_0 - z)^n \\ = &\; \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(z)\;(x-z)^n - (n+1)\;c\;(x_0 - z)^n \end{aligned}$$

Le théorème de Rolle implique l'existence d'un nombre ξ situé entre x_0 et $x_0 + h$ tel que $g'(\xi) = 0$. Il s'ensuit que

$$0 = g'(\xi) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\;(x - \xi)^n - (n+1)\;c\;(x_0 - \xi)^n$$

En résolvant cette équation par c nous obtenons

$$c = \frac{1}{(n+1)\,!}\;f^{(n+1)}(\xi)$$

□

Voici une deuxième démonstration possible du même théorème:

Démonstration : Source : [Apos92a, p.247] Soit

$$g(x) = T_n(x - x_0) + c\,(x - x_0)^{n+1} - f(x)$$

où c doit être déterminé d'une telle manière que

$$g(x_0 + h) = 0 \quad .$$

Par conséquent on a

$$g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1,\, 2,\, 3, \ldots n$$

A cause de $g(x_0) = g(x_0 + h) = 0$ il y a un nombre x_1 situé entre x_0 et $x_0 + h$ tel que $g'(x_1) = 0$. A cause de $g'(x_0) = g'(x_1) = 0$ il y a un nombre x_2 situé entre x_0 et x_1 tel que $g'(x_2) = 0$. En continuant de la même façon avec toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n il découle de $g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_n) = 0$ l'existence d'un x_{n+1} situé entre x_0 et x_n avec $g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$. En résolvant l'équation

$$g^{(n+1)}(x_{n+1}) = c\, n! - f^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$$

par rapport à c on obtient l'assertion où x_{n+1} correspond à ξ dans la formule de Taylor avec reste. □

7–48 Exemple : Déterminer l'approximation de Taylor d'ordre 3 de la fonction $f(x) = \sin(x)$ en $x_0 = 0$. Estimer l'erreur.

Solution: On obtient pour les dérivées de $f(x)$ en $x_0 = 0$ le tableau suivant.

n	0	1	2	3	4	5	6	...
$f^{(n)}(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	...
$f^{(n)}(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	...

Par conséquent le polynôme de Taylor d'ordre 3 est donné par

$$T_3(x) = x - \frac{1}{6}\, x^3$$

où

$$\sin(x) = T_3(x) + R_3 = x - \frac{1}{6}\, x^3 + R_3$$

avec

$$R_3 = \frac{1}{24}\, \sin(\xi)\, x^4$$

pour un $|\xi| \leq |x|$. Puisque $|\sin(\xi)| \leq 1$ on a

$$R_3 \leq \frac{1}{24}\, x^4 \; .$$

Sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$ on a $x^4 \leq 1/16$ et par conséquent

$$|R_3| \leq \frac{1}{24 \cdot 16} < 0.003 \quad \text{si} \quad \frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \; .$$

Sur l'intervalle $[-0.1, 0.1]$ on a $x^4 \leq 0.0001$ et par conséquent

$$|R_3| \leq \frac{0.0001}{24} < 0.000005 \quad \text{si} \quad -0.1 \leq x \leq 0.1 \quad .$$

Nous constatons que plus petit est l'intervalle en question autour de 0, plus petite est l'erreur d'approximation.

A l'aide de *Mathematica* on peut calculer l'approximation de Taylor mécaniquement et ensuite comparer les graphes de $\sin(x)$ et $T_3(x)$.

Mathematica

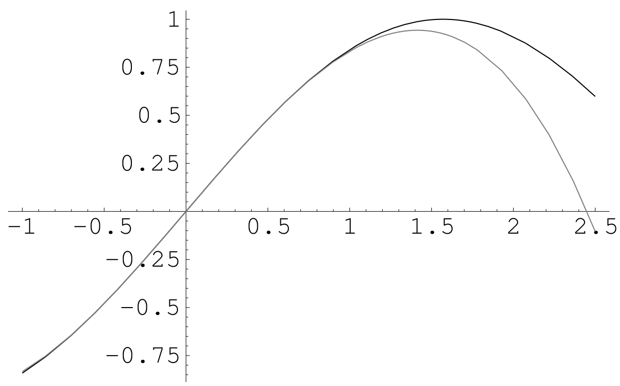


Figure 7.5: $\sin(x)$ et l'approximation d'ordre 3

```
ser[x_] = Normal[Series[Sin[x],{x,0,3}]]
Plot[{Sin[x],ser[x]},{x,-1,2.5},PlotStyle ->{GrayLevel[0],GrayLevel[0.5]}]
```

♢

Il faut absolument tenir compte du fait que l'approximation n'est bonne que si la valeur absolue de x est petite. Si la valeur absolue de x est grande, le mot approximation n'est pas indiqué. Dans quelques cas le comportement d'approximation peut être amélioré en prenant en considération plus de termes. Cette idée est reprise plus tard avec le mot-clé **séries de Taylor.**

En règle générale les polynômes de Taylor donnent des **approximations locales**. Si l'on cherche dans une application une **approximation globale** d'une fonction, c'est-à-dire, la fonction doit être bien approchée uniformément sur un intervalle entier, il nous faut appliquer d'autres méthodes. Des mots-clés possibles sont: **interpolation de Lagrange**, **polynômes de Legendre**, **polynômes de Tchebychev**, **approximation de Fourier**,...

Pour illustrer ces faits nous donnons ici l'approximation de Taylor d'ordre 10 de la fonction $f(x) = \sin(x)$ en $x_0 = 0$. Nous constatons de nouveau que l'approximation est excellente pour de petites valeurs de $|x|$ mais elle est misérable pour de grandes valeurs de $|x|$.

Mathematica

```
ser[x_] = Normal[Series[Sin[x],{x,0,10}]]
Plot[{Sin[x],ser[x]},{x,-1,2 Pi},
        PlotRange ->{-1,1},
        PlotStyle ->{GrayLevel[0],GrayLevel[0.5]}]
```

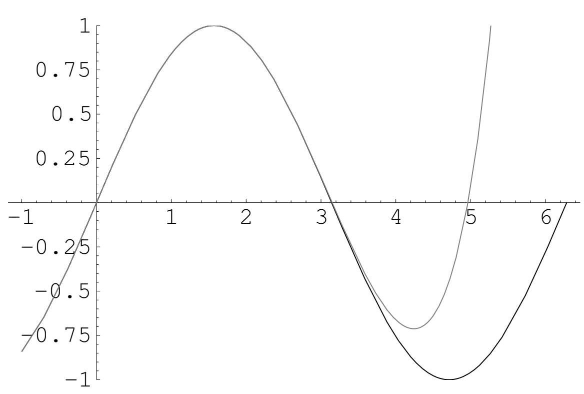


Figure 7.6: $\sin(x)$ et l'approximation d'ordre 10

7–49 Exemple : Chercher une bonne approximation de la fonction $f(x) = \cos(x - x^2)$ pour des valeurs x dont la valeur absolue est petite. Estimer l'erreur, si nous considérons des valeurs de x avec $|x| \leq 0.1$. Nous utilisons des polynômes de Taylor. On a

$$\begin{array}{rlrl} f(x) & = \cos(x - x^2) & f(0) & = 1 \\ f'(x) & = -\sin(x - x^2)\,(1 - 2x) & f'(0) & = 0 \\ f''(x) & = -\cos(x - x^2)\,(1 - 2x)^2 + 2\,\sin(x - x^2) & f''(0) & = -1 \end{array}$$

et

$$f'''(x) = \sin(x - x^2)\,(1 - 2x)^3 + 4\,\cos(x - x^2)\,(1 - 2x) + 2\,\cos(x - x^2)\,(1 - 2x)$$

Par conséquent on a pour $|x| \leq 0.1$

$$|f'''(x)| \leq 2 + 6 + 4 = 12$$

et

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + R_2(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + R_2(x)$$

avec

$$|R_2(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6}\,|x|^3 \leq \frac{12}{6}\,0.1^3 = 0.002$$

$\diamondsuit$

Les polynômes de Taylor donnent de bonnes approximations locales pour des fonctions générales. En général la fonction initiale n'est pourtant **pas représentée exactement**. La situation est différente pour des polynômes.

7–50 Résultat : *Si $f(x)$ est un polynôme de degré n, x_0 un point arbitraire et $T_n(x)$ un polynôme de Taylor d'ordre n, développé en x_0, on a*

$$f(x) = T_n(x - x_0) \quad .$$

Les coefficients du polynôme $T_n(x)$ peuvent être calculés exactement par le schéma de Horner.

Démonstration : Pour un polynôme de degré n on a

$$f^{(n+1)}(\xi) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathbb{R} \quad .$$

Par conséquent le reste dans la formule d'approximation de Taylor s'annule et nous avons vérifié l'assertion. $\square$

7.9.3 Formule du binôme

Comme application de ce résultat nous pouvons établir la **formule du binôme**. La variante la plus simple (et la plus connue) est donnée par

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En portant l'expression $x = b/a$ dans cette formule nous obtenons

$$a^2\,(1 + x)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2\,(1 + 2x + x^2)$$

Il en résulte la formule simple du binôme

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \,.$$

Nous voulons maintenant établir la formule appropriée pour

$$(1 + x)^n = \ldots$$

où $n = 2,\,3,\,4\ldots$

A cet effet nous examinons la fonction $f(x) = (1 + x)^n$ et ses dérivées en $x_0 = 0$.

m	$f^{(m)}(x)$	$f^{(m)}(0)$
0	$(1+x)^n$	1
1	$n\,(1+x)^{n-1}$	n
2	$n\,(n-1)\,(1+x)^{n-2}$	n (n-1)
3	$n\,(n-1)\,(n-2)\,(1+x)^{n-3}$	n (n-1) (n-2)
.	$\ldots$	$\ldots$
k	$n\,(n-1)\ldots(n-k+1)\,(1+x)^{n-k}$	n (n-1)... (n-k+1)
k	$\frac{n!}{(n-k)!}\,(1+x)^{n-k}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
.	$\ldots$	$\ldots$
n	$n!\,(1+x)^0$	$n!$

Puisque $f(x) = (1+x)^n$ est un polynôme de degré n on a

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, f^{(k)}\, 0\, x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, \frac{n!}{(n-k)!}\, x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, x^k\end{aligned}$$

Où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$$

sont les **coefficients binomiaux**.

En portant l'expression $x = b/a$ dans l'équation ci-dessus et en multipliant par a^n, nous obtenons le

7–51 Résultat : ***(formule du binôme)***
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, a^{n-k} b^k$$

Quelques valeurs des coefficients binomiaux suivent directement de la définition (prenez garde que $0! = 1$).

$$\binom{n}{0} = 1\,, \quad \binom{n}{1} = n\,, \quad \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}\,, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Pour quelques petites valeurs de n nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2\,a^1b^1 + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3\,a^2b^1 + 3\,a^1b^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4\,a^3b^1 + 6\,a^2b^2 + 4\,a^1b^3 + b^4\end{aligned}$$

Le calcul des coefficients binomiaux peut être effectué par la définition ci-dessus en évaluant les factorielles ou par le **triangle de Pascal**.

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0: & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1: & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2: & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3: & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4: & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5: & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6: & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Dans la $n^{\text{ème}}$ ligne on trouve les coefficients $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ pour $k = 0,\, 1,\, 2 \ldots n$. A partir de la deuxième ligne on a: chaque nombre d'une ligne est la somme des deux nombres adjacents de la ligne précédente. Cette proposition peut aussi être écrite comme formule.

7–52 Résultat : *Pour* $k = 2,\, 3,\, \ldots n$ *on a*

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

Démonstration : Ce résultat peut être démontré par un raisonnement par récurrence sur k . La formule du binôme permet pourtant un accès plus facile. On a

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} x^k$$

On peut aussi considérer la même expression sous un autre angle.

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)\,(1+x)^n \\
&= (1+x)\,\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k + \sum_{j=1}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ j-1 \end{pmatrix} x^j \\
&= 1 + x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} \right) x^k
\end{aligned}$$

A cause du théorème d'identité pour des polynômes les coefficients de x^k dans les expressions ci-dessus doivent être égaux et nous obtenons l'assertion. $\square$

7–53 Résultat : *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$$

Démonstration : Ce résultat peut être démontré par un raisonnement par récurrence sur n . La formule du binôme permet pourtant un accès **beaucoup** plus facile. Indication: $1+1=2$. □

7.9.4 Approximation par des fractions rationnelles

Nous nous sommes initié aux approximations de Taylor dans cette section. Il faut pourtant souligner qu'il y a d'autres genres d'approximations de fonctions données. Dans le chapitre sur des polynômes nous avons utilisé la méthode de l'**interpolation.** On utilise aussi l'**interpolation de splines** et des **polynômes de Tchebychev.** Ici nous allons ilustrer l'**approximation par une fraction rationnelle** à l'aide d'un exemple simple. Nous cherchons des coefficients a_0, a_1 et b_1 tels que l'approximation

$$e^x \approx \frac{a_0 + a_1\, x}{1 + b_1\, x}$$

est la meilleure possible pour de petites valeurs de x. A cet effet nous utilisons la série

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}\, x^2 + \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{4!}\, x^4 + \ldots$$

et exigeons que

$$(1 + b_1\, x)\ \left(1 + x + \frac{1}{2!}\, x^2 + \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{4!}\, x^4 + \ldots\right) \approx a_0 + a_1\, x$$

Nous ordonnons les termes par ordre croissant des puissances de la variable x et obtenons ainsi

$$1 - a_0 + x\,(1 - a_1 + b_1) + x^2\,(\frac{1}{2} + b_1) + x^3\,(\frac{1}{6} + b_1 \frac{1}{2}) + \ldots \approx 0$$

Cette approximation est bonne pour de petites valeurs de $|x|$ si les trois premiers coefficients sont zéros. Cela mène au système d'équations linéaires

$$1 - a_0 = 0 \quad , \quad 1 - a_1 + b_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + b_1 = 0$$

avec les solutions

$$b_1 = -\frac{1}{2} \quad , a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

Par conséquent on a

$$e^x \approx \frac{1 + x/2}{1 - x/2} = \frac{2 + x}{2 - x}$$

La figure 7.7 montre que l'approximation est assez bonne entre -1 et 1 . Pour des valeurs plus grandes (par exemple $x \approx 2$) l'approximation devient inutilisable.

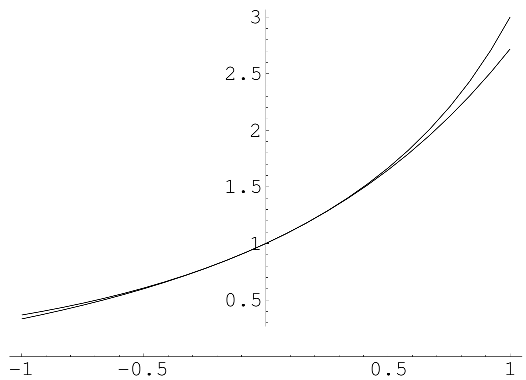


Figure 7.7: Approximation de e^x par une fraction rationnelle

7.10 Exercices

7.10.1 Exercices de base

• **Problème 7–1:**
Considérer la fonction $f(x) = x^3$ et utiliser la définition de la dérivée par une limite pour déterminer les dérivées suivantes

(a) $f'(1)$

(b) $f'(7.2)$

(c) $D_x f(x)$

• **Problème 7–2:**
Considérer la fonction $f(x) = 1/x$ et utiliser la définition par les limites pour déterminer les dérivées suivantes

(a) $f'(2)$

(b) $f'(7)$

(c) $\frac{d}{dx} f(x)$

• **Problème 7–3:**
Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = 1/x^2$ au moyen de la définition de la dérivée.

• **Problème 7–4:**
Pour la fonction $f(x) = e^x$ on sait que $f'(0) = 1$.

(a) Utiliser la définition de la dérivée pour transformer $f'(0) = 1$ dans une limite.

(b) Utiliser la limite ci–dessus, la définition de la dérivée et des propriétés de la fonction exponentielle pour déterminer la dérive de la fonction $g(x) = e^{3\,x}$ au point $x = x_0$.

Montrer tout calcul intermédiaire.

• **Problème 7–5:**
Pour la fonction logarithme $f(x) = \ln(x)$ on sait que $f'(1) = 1$.

(a) Utiliser la définition de la dérivée pour transformer $f'(1) = 1$ dans une limite.

(b) Utiliser la limite ci–dessus, la définition de la dérivée et des propriétés de la fonction logarithme pour déterminer la dérivé de la fonction $f(x) = \ln(x)$ au point $x = x_0$.

Montrer tout calcul intermédiaire.

• Problème 7–6:
Utiliser la définition de la dérivée, des propriétés de la fonction $f(x) = e^{2x}$ et la limite ci–dessous pour trouver la dérivée de la fonction $f(x)$ pour $x = x_0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

• Problème 7–7:
Utiliser

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

et des identités pour les fonctions trigonométriques pour vérifier les résultats suivants.

(a) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

(b) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

(c) $\frac{d}{dx} \cos(2x) = -2\sin(2x)$

(d) $\frac{d}{dx} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$

• Problème 7–8:
Utiliser les théorèmes d'addition et le fait donné que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sinh h}{h} = 1$$

pour déterminer la dérivée de la fonction $y(x) = \cosh x$ au moyen de la définition de la dérivée.

• Problème 7–9:
Soit $y = g(t)$ une fonction dérivable en $t = t_0$. Donc

$$\frac{g(t_0 + h) - g(t_0) - g'(t_0)h}{h} \to 0 \quad \text{si } h \to 0 \qquad .$$

Montrer que la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t_0 + h) - g(t_0) - A\,h}{h}$$

n'est pas égale à 0, si $A \neq g'(t_0)$.

• Problème 7–10:
Soit f, g, h trois fonctions dérivables. Montrer que la fonction $(f \cdot g \cdot h)(x)$ est dérivable et déterminer sa dérivée.

• Problème 7–11:

(a) Considérer la fonction $f(x) = 1/x$ et utiliser la définition par les limites pour déterminer la dérivée $f'(x)$.

(b) Utiliser le résultat ci–dessus et la règle du produit pour déterminer la dérivée de $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

• Problème 7–12:
Soit f et g deux fonctions dérivables.

(a) Démontrer à l'aide de la définition de la dérivée (rapport d'accroissement)

$$\left(f^2\,(x)\right)' = 2\,f\,(x)\,f'\,(x)$$

(b) Utiliser l'identité

$$f\,(x)\;g\,(x) = \frac{1}{2}\;\Big(\;(f\,(x)+g\,(x))^2 - f^2\,(x) - g^2\,(x)\;\Big)$$

et le résultat de la première partie pour vérifier la formule de la dérivée d'un produit.

(c) Utiliser $h = f/g$ ou $h\,(x)\cdot g\,(x) = f\,(x)$ et la formule de la dérivée d'un produit pour vérifier la formule de la dérivée d'un quotient.

• Problème 7–13:
Utiliser les règles de dérivation pour déterminer les dérivées suivantes.

(a) $f\,(x) = \tan x$

(b) $f\,(x) = 1/\sin x$

(c) $f\,(x) = 1/\cos x$

(d) $f\,(x) = \sin x/\cos x$

(e) $f\,(x) = \sin x \cos x$

(f) $f\,(x) = \cos^2 x$

(g) $f\,(x) = \sin^3 x$

(h) $f\,(x) = \tan^2 x$

(i) $f\,(x) = 1/\sin^2 x$

(j) $f\,(x) = 1/\cos^2 x$

(k) $f\,(x) = \cos x/\sin x$

• Problème 7–14:
Calculer les expressions suivantes

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{d}{dx}\;\left(x - 3\,x^3 + \sin(2\,x)\right) & c(x) &= \frac{d^2}{dx^2}\;(e^x)^x \\ b(x) &= \frac{d}{dx}\;\frac{e^{2x}}{1+x^2} & d(x) &= \frac{d}{dx}\;\left(x^2\;\tan(\frac{x}{2})\right) \end{aligned}$$

• Problème 7–15:
Calculer les expressions suivantes. Montrer les résultats intermédiaires.

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dx}\;\sin\left(2\,x + e^{(x^2)}\right) & d &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{2\,x} - 2\,x} \\ b &= \frac{d}{dz}\;\frac{x^2 - x\,z}{z^2 + 4\,x} & f &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2\,x} - 1 - 2\,x}{x^2} \\ c &= \frac{d}{dx}\;\left(\sqrt[3]{2\,x} + x^x\right) \end{aligned}$$

• Problème 7–16:
Calculer les expressions suivantes

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{d}{dx}\;\tfrac{\cos x}{\sin x} & d &= \tfrac{d}{dy}\;x^y \\ b &= \tfrac{d}{dx}\;\sin(x^2)\cdot e^{-3x} & e &= \tfrac{d}{da}\;\log_a x \\ c &= \tfrac{d}{dx}\;x^y \end{aligned}$$

• Problème 7–17:
Utiliser les règles de dérivation pour démontrer que si f est dérivable, f^n $(n \in \mathbb{N})$ est aussi dérivable et que

$$\frac{d}{dx}\, f^n\,(x) = n f^{n-1}\,(x)\,\frac{d}{dx}\,f\,(x) \qquad .$$

• Problème 7–18:
Calculer les dérivées suivantes:

(a) $f\,(z) = (z-3)^3$

(b) $g\,(z) = (z+2)^{17}$

(c) $h\,(x) = \sin^2(x)$

(d) $k\,(x) = \cos\,(3\,x)$ Le résultat doit contenir les fonctions $\sin x$ et $\cos x$. Indication: utiliser des formules trigonométriques.

• Problème 7–19:
Examiner les expressions suivantes:

(a) Calculer $\dfrac{d\,f}{dx}$, où

$$f\,(x) = e^{\sin\,(x^2+1)}$$

(b) Calculer $\dfrac{d\,h}{dt}$, où

$$h\,(t) = \frac{\cosh^2 t}{t^4+1}$$

(c) Calculer $\dot{x}$, où

$$x\,(t) = \cos^2\left(\ln\left(t^4+t^2+8\right)\right) + \sin^2\left(\ln\left(t^4+t^2+8\right)\right)$$

(d) Calculer $\dfrac{d^2\,g}{dz^2}$, où

$$g\,(z) = \sqrt[3]{1+z^2}$$

• Problème 7–20:
Calculer les expressions suivantes

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2 - 3\,x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\,(2\,x) - 2\,x}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin\,(2\,x) - 2\,x}{x^3}$

(d) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin(\sinh(3\,x^3))}{1+x^2}\right)$

(e) $\dfrac{d^2}{dx^2}\,e^{\cos x}$

• Problème 7–21:
Calculer les expressions suivantes. Montrer les résultats intermédiaires, veut-dire sans calculatrice.

(a) $a = f'(0)$, avec $f(x) = e^{2\,x}\,\sin(x^2)$

(b) $b = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)-1}{x^2}$

(c) $c = g^{(101)}(x)$ wobei/avec $g(x) = \sin(2\,x)$

(d) $d = f'''(x)$ avec $f(x) = e^{x/2} + x^3 - 17\,x$

(e) $e = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)+1}{x^2}$

• Problème 7–22:
Les zéros de la fonction

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

doivent être examinés, où nous admettons que $b < 0$ et $c > 0$ sont des nombres fixés. Le paramètre a varie.

(a) Pour quelles valeurs de $a > 0$ cette fonction a-t-elle deux zéros réels différents?

(b) Calculer pour les zéros x_1 et x_2 déterminés ci-dessus les limites

$$A = \lim_{a\to 0+} x_1 \quad \text{et} \quad B = \lim_{a\to 0+} x_2$$

• Problème 7–23:
Calculer les expressions suivantes. Montrer les résultats intermédiaires.

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dx}\cos(x^2) \\ b &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\sin(x)\right) \\ c &= \frac{d}{dx}\,\frac{1+2\,x+3\,x^3}{1+\sin^2 x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sin(n^3)}{3\,n^2-n+1/n} \\ e &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\,x)}{x} \\ f &= 6+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81} \end{aligned}$$

• Problème 7–24:
Calculer les expressions suivantes. Montrer les résultats intermédiaires.

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dx}\sin\left(2\,x+e^{(x^2)}\right) \\ b &= \frac{d}{dz}\,\frac{x^2-x\,z}{z^2+4\,x} \\ c &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{2\,x}+x^x\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{2\,x}-2\,x} \\ f &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2\,x}-1-2\,x}{x^2} \end{aligned}$$

• Problème 7–25:
Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes.

(a) $u(x) = \sqrt{1-x}$ mit/avec $n = 1$.

(b) $f(x) = (2x-1)^5$ mit/avec $n = 2$.

(c) $g(x) = \sin(\cos(3x))$ mit/avec $n = 1$.

(d) $h(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x^2-1}$ mit/avec $n = 1$.

(e) $r(x) = 2x^{3x}$ mit/avec $n = 1$.

• Problème 7–26:
Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les fonctions suivantes sont dérivables. Puis calculer la dérivée.

(a) $y = (2x^2-1)^{10}$

(b) $y = (x^3-2x)\,(1-x^3)^5$

(c) $y = (6x - 2\sqrt[3]{x^2})^8$

(d) $y = \sqrt{1-x}$

(e) $y = \sin(2t)$

(f) $y = 1/\tan(1-2x)$

• Problème 7–27:
Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les fonctions suivantes sont dérivables. Puis calculer la dérivée.

(a) $y = (3 - 2\sqrt{2x})^5$

(b) $y = (1 - \sqrt{1 + x^2})^6$

(c) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

(d) $y = \cos \frac{1}{1-x}$

(e) $y = \sqrt{\tan x}$

(f) $y = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

• Problème 7–28:
Utiliser la relation $(e^x)' = e^x$ et la formule d'Euler

$$e^{i\,x} = \cos x + i \sin x$$

pour déterminer les dérivées des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

• Problème 7–29:
Déterminer pour $a > 0$ la dérivée de la fonction $f\,(x) = a^x$

• Problème 7–30:
Déterminer pour $a > 0$ la dérivée de la fonction $f\,(x) = \log_a\, x$

• Problème 7–31:
Déterminer pour $a > 0$ la dérivée de la fonction $f\,(x) = a^{g\,(x)}$.

• Problème 7–32:
Déterminer pour $a > 0$ la dérivée de la fonction $f\,(x) = \log_a g\,(x)$.

• Problème 7–33:
Déterminer la dérivée de la fonction $(f\,(x))^{g\,(x)}$.

• Problème 7–34:
Déterminer la dérivée de la fonction $\log_{f\,(x)} g\,(x)$.

• Problème 7–35:
Une fonction ≪inconnue≫ $f\,(x)$ satisfait à la relation

$$\sin\left(f\,(x)\right) = x$$

Déterminer $f'\,(x)$ en dérivant la relation ci-dessus par rapport à x .

• Problème 7–36:
On sait de deux fonctions dérivables $f\,(x)$ et $g\,(x)$ que

$$f\,(0) = 1 \quad , \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f\,(h) - 1}{h} = 2 \quad , \qquad f^2\,(x) - g\,(x) = -3\,x$$

Trouver $g'\,(0)$ en utilisant la définition de la dérivée, les opérations fondamentales $(+\,-\,*/)$ et les règles de calcul pour les limites.

7.10.2 Exercices supplémentaires

• Problème 7–37:
Chercher une méthode pour résoudre les problèmes suivants.

(a) Trouver une bonne approximation pour $\tan 46°$ avec des calculs simples. Indication: $46 = 45 + 1$

(b) Trouver l'erreur maximale de cette approximation.

• Problème 7–38:
Calculer la dérivée 99999-ième de $g\,(t) = t \sin\,(t)$

• Problème 7–39:
On sait d'une fonction dérivable $f(x)$ que pour tous les $a, b \in \mathbb{R}$

$$f\,(a+b) = f\,(a) \cdot f(b) \quad , \quad f\,(b) \neq 0 \quad \text{et} \quad f'\,(0) = 2$$

(a) Trouver $f(0)$.

(b) Utiliser la définition de la dérivée pour trouver une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$.

• Problème 7–40:
Calculer la dérivée 9999-ième de $g\,(t) = \sin^2(t/2)$.
Indication: simplifier d'abord avant de calculer.

• Problème 7–41:
Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes:

(a) $f\,(x) = 1/(1+x)$ und/et $n = 5$.

(b) $f\,(x) = \sqrt{1+x}$ und/et $n = 5$.

(c) $f\,(x) = (1+5x)^8$ und/et $n = 3$.

(d) $f\,(x) = \sin\,(x)$ und/et $n = 3$.

(e) $f\,(x) = x \sin\,(x)$ und/et $n = 3$.

(f) $f\,(x) = x^2 \sin\,(x)$ und/et $n = 3$.

(g) $f\,(x) = x^2 \sin\,(x)$ und/et $n = 40$. Antwort/réponse: $x^2 \sin x - 80x \cos x - 1560 \sin x$

(h) $f\,(x) = x \cos\,(x)$ und/et $n = 39$. Antwort/réponse: $-39 \cos x + x \sin x$

(i) $f\,(x) = x^7 - 0.5x^3 + 23x - 37$ und/et $n = 7$.

• Problème 7–42:
Déterminer la valeur de l'expression

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

• Problème 7–43:
Déterminer la valeur de l'expression

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

• Problème 7–44:
Une variable y dépend de x

$$y(x) = u(x)\ v(x)\ w(x)$$

où $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ sont trois fonctions auxiliaires données. Considérer maintenant

$$F(x) = \ln\ y(x)$$

(a) Déterminer $\frac{dF}{dx}$ à l'aide des règles de calcul des logarithmes et les dérivées des fonctions auxiliaires u, v et w.

(b) Déterminer $\frac{dF}{dx}$ dépendant de y et de y'.

(c) Egaler les résultats des deux parties (a) et (b) et résoudre par rapport à $y'(x)$.

7.10.3 Règle de l'Hospital

• Problème 7–45:
Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\,x) - 2\,x}{x^3}$$

• Problème 7–46:
Trouver trois limites différentes qui nécessitent une, deux respectivement trois applications de la règle de Hospital.

• Problème 7–47:
Calculer les limites suivantes:

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\cos x)}{\tan(2x)}$$

(c)

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{1-x} - \frac{\cos(1-x)}{\sin(1-x)}\right)$$

(d)

$$\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{2x^2-2\pi}$$

• Problème 7–48:
Calculer les limites au–dessous:

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 - x^5}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\tan^2(x/2)}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

(d)

$$\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{(2x-2\pi)^2}$$

• Problème 7–49:
Trouver les limites suivantes avec la règle de l'Hospital

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x/2)}{3x}$$

(b)
$$\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{(\pi-x)^3}$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(2x)} - \frac{1}{2x}\right)$$

(d)
$$\lim_{x\to 0+} (\sin x)^x$$

7.10.4 Approximations

• Problème 7–50:
Trouver le développement de Taylor du polynôme $f(z) = 2z^4 - 3z^2 + 1$ en $z = -2$.

• Problème 7–51:
Déterminer le développement de Taylor du polynôme $f(x) = 2\,x^3 - 12\,x^2 + 23.5\,x - 18$ aux endroits x_0 donnés.

(a) en $x_0 = 2$.

(b) en $x_0 = -2$.

(c) en $x_0 = 0$.

(d) en $x_0 = 1$.

• Problème 7–52:
Déterminer le développement de Taylor du polynôme $f(x) = x^7$ aux endroits x_0 donnés.

(a) en $x_0 = 0$.

(b) en $x_0 = 1$.

(c) en $x_0 = -1$.

(d) en $x_0 = 2$.

• Problème 7–53:
Déterminer le développement de Taylor d'ordre n de la fonction $f(x)$ en $x = x_0$.

(a) $f(x) = \cos x$ en $x_0 = 0$ avec $n = 3$.

(b) $f(x) = \tan(2x)$ en $x_0 = 0$ avec $n = 4$.

(c) $f(x) = \cos x$ en $x_0 = 0$ avec $n = 6$.

(d) $f(x) = \sin x$ en $x_0 = \pi/3$ avec $n = 3$.

(e) $f(x) = 1/(1+x)$ en $x_0 = 0$ avec $n = 6$.

(f) $f(x) = 1/(1-x)$ en $x_0 = 0$ avec $n = 6$.

Pour tous les exercice l'erreur d'approximation peut être estimée d'une façon fiable.

• Problème 7–54:
Calculer $z = \sqrt{1 + \sin(\pi\, 0.99)}$ sans calculatrice le plus précisément possible avec peu d'effort.

• Problème 7–55:
Trouver $\cos(32°)$ á l'aide des approximations de Taylor et la valeur connue de $\cos 30°$.

(a) Avec une approximation de Talor de l'ordre 1.

(b) Avec une approximation de Talor de l'ordre 2.

(c) Pour les deux approximations ci–dessus trouver le valeur maximal R_1 (resp. R_2).

• Problème 7–56:
Utiliser une approximation de Taylor de l'ordre 1 pour résoudre le problème.

(a) Trouver une bonne approximation pour $\tan 28°$ avec des calculs simples. Indication: $28 = 30 - 2$

(b) Trouver l'erreur maximale de cette approximation.

• Problème 7–57:
Trouver l'erreur maximale possible de l'approximation

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

si $|x| \leq 0.5$.

• Problème 7–58:
Regarder la fonction $f(x)$ sur l'intervalle I.

$$f(x) = e^{\sin(x)} \quad \text{avec} \quad x \in I = [\pi - 0.2,\, \pi + 0.2]$$

(a) Trouver le polynôme de Taylor de degré deux pour $x_0 = \pi$.

(b) Trouver une borne pour l'erreur dans l'approximation de $f(x)$ au–dessus.

• Problème 7–59:
Déterminer les trois premiers termes du développement de Taylor de la fonction $f(x) = \cos(2\sin(3x))$ pour de petites valeurs de $|x|$. Quelle est l'erreur maximale possible pour $-1 < x < 1$?

• Problème 7–60:
Regarder la fonction $f(x) = \sin(e^x)$ sur l'intervalle $[0.8\,,\ 1.2]$.

(a) Trouver le polynôme de Taylor de degrée deux pour $x_0 = 1.0$.

(b) Trouver une borne pour l'erreur dans l'approximation de $f(x)$ au–dessus.

• Problème 7–61:
Examiner la fonction $f(x) = e^{2\,x}$ proche du point $x_0 = 1$.

(a) Déterminer l'approximation de Taylor $T_2(x)$ de l'ordre 2 de cette fonction. Esquisser les fonctions $f(x)$ et $T_2(x)$ sur l'intervalle $0 < x < 2$.

(b) Déterminer l'approximation de Taylor $T_4(x)$ de l'ordre 4 de cette fonction et trouver l'erreur maximale sur l'intervalle $0.5 < x < 1.5$.

• Problème 7–62:
Pour un polynôme f de degrée 3 on sait que

$$f(1) = -2 \qquad f'(1) = 0 \qquad f''(1) = 0 \qquad f^{(3)}(1) = 3$$

Trouver la représentation de Taylor de ce polynôme pour $x_0 = 2$.

• Problème 7–63:
La fonction tangente hyperbolique est donnée par

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

(a) Exprimer $\tanh x$ à l'aide de la fonction exponentielle.

(b) Montrer que, à cause de $e^x > 0$, on a toujours $-1 < \tanh x < 1$.

(c) Montrer que la fonction est strictement croissante.
Indication: dérivée et partie (b).

(d) Trouver une bonne approximation de $\tanh x$ par un polynôme de degré 2 pour de petites valeurs de $|x|$.

(e) Soit z donné. **Déduire une formule** pour calculer la valeur de x qui satisfait à l'équation $z = \tanh x$. Utiliser seulement des fonctions exponentielles et logarithmiques.
Indication: résoudre par rapport à x.

• **Problème 7–64:**
Considérer le fonction $y(x) = \cos(x)$.

(a) Trouver quelques termes de la série de Taylor en $x_0 = \pi/2$.

(b) Combien de termes doit–on considérer au minimum, pour que l'erreur d'approximation soit plus petite que 10^{-8} sur l'intervalle $[0, \pi]$?

(c) Combien de multiplications sont nécessaires pour obtenir une valeur de $\cos x$ avec l'approximation trouvée sous (b)?

• **Problème 7–65:**
Considérer la fonction $f(x) = \ln x$ au voisinage de $x_0 = e$.

(a) Déterminer l'approximation de Taylor d'ordre 5 en $x_0 = e$.

(b) Quelle est l'erreur maximale d'approximation pour $2 \leq x \leq 3$?

(c) Sur quel intervalle autour de $x_0 = e$ l'erreur d'approximation est-elle plus petite que 10^{-3} ?

• **Problème 7–66:**
La fonction $\sin(x)$ doit être évaluée avec une erreur inférieure à 10^{-8} en utilisant un processeur qui ne sait que multiplier et additionner. Par symétrie il suffit de considérer l'intervalle $[0, \pi/2]$.

(a) Trouver un polynôme de Taylor d'un ordre minimal avec les propriétés exigées.

(b) Combien d'additions et de multiplications sont nécessaires pour déterminer une valeur de la fonction?

(c) Ecrire un programme (MODULA, C, Assembler,. . .) afin d'évaluer cette fonction.

• **Problème 7–67:**
Le processeur Intel 80486 met à disposition la commande ≪floatingpoint≫ $2^x - 1$ où seulement les valeurs x avec $-1 \leq x \leq 1$ sont admises. Développer un algorithme pour évaluer cette fonction qu'avec les quatre opérations fondamentales. L'erreur doit être plus petite que 10^{-8} .

• **Problème 7–68:**
Examiner la fonction suivante pour de petites valeurs de $|x|$. Résoudre sans calculatrice.

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

(a) Trouver les trois premiers termes (non zéro) de l'approximation de Taylor.

(b) Calculer $\ln 1.2$ avec l'approximation ci–dessus.

(c) **Estimer** l'erreur de l'approximation ci–dessus pour $\ln 1.2$.

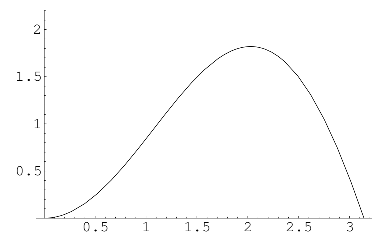
• Problème 7–69:
Examiner la fonction

$$f\,(x) = x - \cos\, x$$

(a) Trouver l'équation de la tangente à cette courbe au point $x = \frac{\pi}{4}$.

(b) Trouver le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des x. Quelle est la relation de ce point avec la fonction originale $f\,(x)$? Indiquation: graphique

• Problème 7–70:
La figure à droite montre le graphe de la fonction $f(x) = x\ \sin x$. Il existe un seul point $0 < x_0 < \pi$ tel que la tangente au graphe de $f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$ coupe l'axe des y à la hauteur 1. Esquisser cette situation et trouver une **équation** pour la valeur de x_0.



• Problème 7–71:
Examiner la fonction $f\,(x) = \sin\, x$

(a) Trouver l'équation de la tangente à cette courbe au point $x = x_0$.

(b) Le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des y a une hauteur de 2. Trouver **l'équation** pour x_0 .

7.10.5 Solutions de quelques exercices

Solution pour problème 7–3 :

$$\begin{aligned} f'\,(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2-(x+h)^2}{h\,(x+h)^2\,x^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh-h^2}{h\,(x+h)^2\,x^2} = \frac{-2}{x^3} \end{aligned}$$

Solution pour problème 7–4 :

(a) Da die Ableitung an der Stelle $x = 0$ gegeben ist als Wert und durch die Definition der Ableitung gilt

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{0+h}-e^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$$

(b) Aus der Definition der Ableitung, angewandt auf die Funktion $g(x) = e^{3\,x}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,g\,(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{3\,(x_0+h)}-e^{3\,x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{3\,x_0}\left(e^{3\,h}-1\right)}{h} \\ &= e^{3\,x_0}\ \lim_{h\to 0} \frac{3\ \left(e^{3\,h}-1\right)}{3\,h} = e^{3\,x_0}\ 3\ \lim_{3h\to 0} \frac{\left(e^{3\,h}-1\right)}{3\,h} = e^{3\,x_0}\ 3 \end{aligned}$$

Solution pour problème 7–5 :

(a) Da die Ableitung an der Stelle $x = 1$ gegeben ist als Wert und durch die Definition der Ableitung gilt

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

(b) Aus der Definition der Ableitung, angewandt auf die Funktion $f(x) = \ln(x)$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\, f(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\frac{x_0+h}{x_0})}{h} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{x_0\, \frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \lim_{h=\frac{\Delta x}{x_0}\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{1}{x_0}\, 1 = \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

Solution pour problème 7–6 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\, f(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{2\,(x_0+h)} - e^{2\,x_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{2\,x_0}\,\left(e^{2\,h} - 1\right)}{h} \\ &= e^{2\,x_0} \lim_{h\to 0} \frac{2\,\left(e^{2\,h} - 1\right)}{2\,h} \\ &= e^{2\,x_0}\; 2 \end{aligned}$$

Solution pour problème 7–8 : A cause de la définition de la dérivée il faut calculer la limite suivante.

$$\frac{d}{dx}\, \cosh x = \lim_{h\to 0} \frac{\cosh(x+h) - \cosh x}{h}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cosh(x+h) - \cosh x}{h} &= \frac{\sinh x \sinh h + \cosh x \cosh h - \cosh x}{h} \\ &= \frac{\sinh x \sinh h}{h} + \frac{\cosh x \cosh h - \cosh x}{h} \\ &= \sinh x\, \frac{\sinh h}{h} + \cosh x\, \frac{\cosh h - 1}{h} \\ &= \sinh x\, \frac{\sinh h}{h} + \cosh x\, \frac{(\cosh h - 1)\,(\cosh h + 1)}{h\,(\cosh h + 1)} \\ &= \sinh x\, \frac{\sinh h}{h} + \cosh x\, \frac{\cosh^2 h - 1}{h\,(\cosh h + 1)} \\ &= \sinh x\, \frac{\sinh h}{h} + \cosh x\, \frac{\sinh^2 h}{h\,(\cosh h + 1)} \\ &= \sinh x\, \frac{\sinh h}{h} + \cosh x\, \frac{\sinh h}{h}\, \frac{\sinh h}{\cosh h + 1} \\ &\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \sinh x + \cosh x \cdot 1 \cdot 0 = \sinh x \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\frac{d}{dx}\, \cosh x = \sinh x$$

Solution pour problème 7–10 : La fonction $f \cdot g \cdot h = (f \cdot g) \cdot h$ doit être examinée. Puisque f et g sont dérivables, la fonction $f \cdot g$ est aussi dérivable et on a

$$\frac{d}{dx}\, (f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Une nouvelle application de la règle concernant la dérivée d'un produit implique la dérivabilité de $(f \cdot g) \cdot h$ et la formule

$$\frac{d}{dx}\ ((f \cdot g) \cdot h) = (f \cdot g)' \cdot h + (f \cdot g) \cdot h' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

Solution pour problème 7–11 :

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{(x+h)\,x\,h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)\,x} = \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

(b)

$$\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-2}{x^3}$$

Solution pour problème 7–12 :

(a)

$$\begin{aligned} \left(f^2(x)\right)' &= \lim_{h \to 0} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) + f(x))\,(f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (f(x+h) + f(x)) \ \cdot\ \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= 2\, f(x)\, f'(x) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (f(x)\ g(x))' &= \frac{1}{2}\ \Big(\ (f(x) + g(x))^2 - f^2(x) - g^2(x)\ \Big)' \\ &= (f(x) + g(x))\ \big(f'(x) + g'(x)\big) - f(x)\, f'(x) - g(x)\, g'(x) \\ &= f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} h(x)\ g(x) &= f(x) \\ h'(x)\ g(x) + h(x)\ g'(x) &= f'(x) \\ h'(x) &= \frac{1}{g(x)}\ \big(f'(x) - h(x)\ g'(x)\big) \\ &= \frac{1}{g(x)}\ \left(f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}\ g'(x)\right) \\ &= \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

Solution pour problème 7–14 :

$$\begin{aligned}
(a) &\;:\; \frac{d}{dx}\,\big(x-3\,x^3+\sin(2\,x)\big)=1-9\,x^2+2\,\cos(2\,x)\\
(b) &\;:\; \frac{d}{dx}\,\frac{e^{2x}}{1+x^2}=\frac{2\,e^{2x}(1+x^2)-e^{2x}2\,x}{(1+x^2)^2}\\
(c) &\;:\; \frac{d^2}{dx^2}\,(e^x)^x=\frac{d^2}{dx^2}\,e^{x\cdot x}=\frac{d}{dx}\,2\,x\,e^{x\cdot x}=2\,e^{x\cdot x}+4\,x^2\,e^{x\cdot x}\\
(d) &\;:\; \frac{d}{dx}\,\left(x^2\,\tan(\frac{x}{2})\right)=2\,x\,\tan(\frac{x}{2})+\frac{x^2}{2}\,(1+\tan^2(\frac{x}{2}))
\end{aligned}$$

Solution pour problème 7–15 :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{d}{dx}\,\sin\left(2\,x+e^{(x^2)}\right) \;=\; \cos\left(2\,x+e^{(x^2)}\right)\cdot\left(2+2\,x\,e^{(x^2)}\right)\\
b &= \frac{d}{dz}\,\frac{x^2-x\,z}{z^2+4\,x} \;=\; \frac{-x\,(z^2+4\,x)-2\,z\,(x^2-x\,z)}{(z^2+4\,x)^2} \;=\; \frac{x\,z^2-2\,x^2\,z-4\,x^2}{(z^2+4\,x)^2}\\
c &= \frac{d}{dx}\,\left(\sqrt[3]{2\,x}+x^x\right) \;=\; \frac{d}{dx}\,\left((2\,x)^{1/3}+e^{x\,\ln x}\right) \;=\; \frac{2}{3}\,(2\,x)^{-2/3}+e^{x\,\ln x}(\ln x+1)\\
d &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{2\,x}-2\,x} \;=\; \frac{0}{1-0} \;=\; 0\\
f &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2\,x}-1-2\,x}{x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{2\,e^{2\,x}-2}{2\,x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{4\,e^{2\,x}}{2} \;=\; 2
\end{aligned}$$

Solution pour problème 7–16 :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{d}{dx}\,\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}\\
b &= \frac{d}{dx}\,\sin(x^2)\cdot e^{-3x}=2\,x\,\cos(x^2)\cdot e^{-3x}-\sin(x^2)\cdot 3\,e^{-3x}\\
c &= \frac{d}{dx}\,x^y=\frac{d}{dx}\,e^{y\,\ln x}=e^{y\,\ln x}\,\frac{y}{x}=y\,x^{y-1}\\
d &= \frac{d}{dy}\,x^y=\frac{d}{dy}\,e^{y\,\ln x}=e^{y\,\ln x}\,\ln x=x^y\,\ln x\\
e &= \frac{d}{da}\,\log_a x=\frac{d}{da}\,\frac{\ln x}{\ln a}=-\frac{\ln x}{(\ln a)^2}\,\frac{1}{a}=\frac{-\ln x}{a\,(\ln a)^2}
\end{aligned}$$

Solution pour problème 7–19 :

$$\begin{aligned}
\frac{d\,f}{dx} &= e^{\sin\,(x^2+1)}\,\cos\,(x^2+1)\;2x\\
\frac{d\,h}{dt} &= \frac{2\,\cosh t\,\sinh\,t\,(t^4+1)-\cosh^2\,t\;4\,t^3}{(t^4+1)^2}\\
x\,(t) &= \cos^2\,(\ln\,(t^4+t^2+8))+\sin^2\,(\ln\,(t^4+t^2+8))=1 \qquad \dot{x}\,(t)=0\\
g\,(z) &= \sqrt[3]{1+z^2}=(1+z^2)^{1/3}\\
g'\,(z) &= \frac{1}{3}\,(1+z^2)^{-2/3}\;2\,z\\
g''\,(z) &= \frac{-2}{9}\,(1+z^2)^{-5/3}\;4\,z^2+\frac{1}{3}\,(1+z^2)^{-2/3}\;2
\end{aligned}$$

Solution pour problème 7–20 :

(a)

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - 3\,x^3 - \frac{1}{x^2}\right) = 2\,x - 9\,x^2 + \frac{2}{x^3}$$

(b) Règle de l'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\,x) - 2\,x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\,\cos(2\,x) - 2}{3\,x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-4\,\sin(2\,x)}{6\,x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-8\,\cos(2\,x)}{6} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(2\,x) - 2\,x}{x^3} = \frac{\sin(2\,\pi) - 2\,\pi}{\pi^3} = \frac{-2\,\pi}{\pi^3} = \frac{-2}{\pi^2}$$

(d)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(\sinh(3\,x^3))}{1+x^2}\right) = \frac{\cos(\sinh(3\,x^3))\;\cosh(3\,x^3)\;9\,x^2\cdot(1+x^2) - \sin(\sinh(3\,x^3))\cdot 2\,x}{(1+x^2)^2}$$

(e)

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\,e^{\cos x} &= \frac{d}{dx}\,(-e^{\cos x}\;\sin x)\\ &= +e^{\cos x}\;\sin^2 x - e^{\cos x}\;\cos x\end{aligned}$$

Solution pour problème 7–21 :

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{2\,x}\,2\,\sin(x^2) + e^{2\,x}\,\cos(x^2)\,2\,x\\ a &= f'(0) = 0\\ b &= \lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x) - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x)}{2\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x)}{2} = \frac{1}{2}\\ c &= 2^{101}\;\cos(2\,x) \approx 2.5\cdot 10^{30}\;\cos(2\,x)\\ d &= \frac{1}{8}\,e^{x/2} + 6\\ e &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x) + 1}{x^2}\quad \text{existiert nicht, wegen}\quad \frac{2}{0}\end{aligned}$$

Solution pour problème 7–22 :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

(a)

$$b^2 - 4\,a\,c > 0 \qquad\Longrightarrow\qquad a < \frac{b^2}{4\,c}$$

(b) A cause de $b<0$ on a $\sqrt{b^2}=-b>0$ et on obtient

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{a\to 0+} x_1 = \lim_{a\to 0+} \frac{-b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a} = +\infty \\
B &= \lim_{a\to 0+} x_2 = \lim_{a\to 0+} \frac{-b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a} \\
&= \lim_{a\to 0+} \frac{\frac{4\,c}{2\,\sqrt{b^2-4\,a\,c}}}{2} = \lim_{a\to 0+} \frac{c}{\sqrt{b^2-4\,a\,c}} = \frac{c}{\sqrt{b^2}} = \frac{c}{-b} > 0
\end{aligned}$$

Pour la deuxième limite on a utilisé la règle de l'Hospital.

Il est aussi possible de déterminer la limite graphiquement:

- Une parabole $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ coupe l'axe des y en $y=c$ avec une pente de b.
- La valeur de a indique le degré de courbature de la parabole. Lorsque $a\to 0$ le graphe de f s'approche de plus en plus d'une droite.
- La droite dont l'ordonnée à l'origine est égale à c et dont la pente est égale à b coupe l'axe des x en $x=-c/b$.

Solution pour problème 7–23 :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{d}{dx}\,\cos(x^2) = -\sin(x^2)\cdot 2\,x \\
b &= \frac{d}{dx}\,\left(\sqrt{x}\,\sin(x)\right) = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\,\sin x + \sqrt{x}\,\cos(x) \\
c &= \frac{d}{dx}\,\frac{1+2\,x+3\,x^3}{1+\sin^2 x} = \frac{(0+2+9\,x^2)(1+\sin^2 x)-(1+2\,x+3\,x^3)(0+2\,\sin x\,\cos x)}{(1+\sin^2 x)^2} \\
&= \frac{(2+9\,x^2)(1+\sin^2 x)-(1+2\,x+3\,x^3)(2\,\sin x\,\cos x)}{(1+\sin^2 x)^2} \\
d &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\sin(n^3)}{3\,n^2-n+1/n} = \frac{1}{3} \\
e &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\,x)}{x} = \pi\,\lim_{\pi\,x\to 0} \frac{\sin(\pi\,x)}{\pi\,x} = \pi \\
f &= 6+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81} = 6\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{3^k} = 6\,\frac{1-\frac{1}{3^6}}{1-\frac{1}{3}} = 6\,\frac{3-\frac{1}{3^5}}{2} = 9-\frac{1}{81} = \frac{728}{81}
\end{aligned}$$

Solution pour problème 7–24 :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{d}{dx}\,\sin\left(2\,x+e^{(x^2)}\right) = \cos\left(2\,x+e^{(x^2)}\right)\cdot\left(2+2\,x\,e^{(x^2)}\right) \\
b &= \frac{d}{dz}\,\frac{x^2-x\,z}{z^2+4\,x} = \frac{-x\,(z^2+4\,x)-2\,z\,(x^2-x\,z)}{(z^2+4\,x)^2} \\
c &= \frac{d}{dx}\,\left(\sqrt[3]{2\,x}+x^x\right) = \frac{d}{dx}\,\left((2\,x)^{1/3}+e^{x\,\ln x}\right) = \frac{2}{3}\,(2\,x)^{-2/3}+e^{x\,\ln x}(\ln x+1) \\
d &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{2\,x}-2\,x} = \frac{0}{1-0} = 0 \\
f &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{2\,x}-1-2\,x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,e^{2\,x}-2}{2\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\,e^{2\,x}}{2} = 2
\end{aligned}$$

Solution pour problème 7–38 : $g^{(9999)}(t)=-9999\,\sin(t)-t\,\cos(t)$

Solution pour problème 7–39 :

(a) On a

$$f(b) = f(0+b) = f(0) \cdot f(b)$$

et ainsi

$$f(0) = \frac{f(b)}{f(b)} = 1$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\,(f(h) - f(0)}{h} \\ &= f(x)\,\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= f(x)\,f'(0) = 2f(x) \end{aligned}$$

Plus tard (chapitre sur les équations différentielles) nous pourrons montrer que cette fonction doit être égale à $f(x) = 1e^{2x}$.

Solution pour problème 7–40 : Utiliser la formule $\sin^2(t/2) = \frac{1}{2}\,(1 - \cos\, t)$ pour trouver le résultat $g^{(9999)}(t) = -\dfrac{\sin\, t}{2}$.

Solution pour problème 7–42 : La formule du binôme implique

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$$

Solution pour problème 7–43 : La formule du binôme implique

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$$

Solution pour problème 7–44 :

(a)

$$\begin{aligned} F(x) = \ln y(x) &= \ln\left(u(x)\,v(x)\,w(x)\right) \\ &= \ln\,u(x) + \ln\,v(x) + \ln\,w(x) \\ \frac{d}{dx}\,F(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)} \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\,F(x) = \frac{d}{dx}\,\ln\left(y(x)\right) = \frac{y'(x)}{y(x)}$$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{y(x)} &= \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)} \\ y'(x) &= y(x)\,\left(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)}\right) \\ &= u'(x)\,v(x)\,w(x) + u(x)\,v'(x)\,w(x) + u(x)\,v(x)\,w'(x) \end{aligned}$$

C'est la formule bien connue pour la dérivée d'un produit.

Solution pour problème 7–45 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\,x)-2\,x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\,\cos(2\,x)-2}{3\,x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-4\,\sin(2\,x)}{6\,x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-8\,\cos(2\,x)}{6} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Solution pour problème 7–47 :

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2} = 2$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\cos x)}{\tan(2x)}\frac{1}{2}$$

(c)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x}-\frac{\cos(1-x)}{\sin(1-x)}\right) \quad \text{n'existe pas}$$

(d)

$$\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos(x)}{2x^2-2\pi} = 0$$

On peut trouver ces limites à l'aide de *Mathematica*:

Mathematica

```
{Limit[(1-Cos[2x])/x^2, x -> 0],
Limit[Sin[x Cos[x]]/Tan[2x], x -> 0],
Limit[2/(1-x)- Cos[1-x]/Sin[1-x], x -> 1],
Limit[(1+Cos[x])/(2 x^2 - 2 Pi), x -> Pi]}
.
                  1
         {2,  -, -Infinity , 0}
                  2
```

Solution pour problème 7–48 :

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^2-x^5} = 0$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{\tan^2(x/2)} = 4$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{6}$$

(d)

$$\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos(x)}{(2x-2\pi)^2} = \frac{1}{8}$$

On peut trouver ces limites à l'aide de *Mathematica*:

Mathematica

```
{Limit[(Sin[x]-x)/(x^2-x^5),x-> 0],
 Limit[Sin[x^2]/Tan[x/2]^2,x-> 0],
 Limit[1/(1-Cos[x])-2/x^2, x -> 0],
 Limit[(1+Cos[x])/(2x - 2 Pi)^2,x -> Pi]}
.
          1   1
{0, 4, -, -}
          6   8
```

Solution pour problème 7–50 :

$$f(z) = f(-2+(z+2)) = 21 - 52\ (2+z) + 45\,(2+z)^2 - 16\,(2+z)^3 + 2\,(2+z)^4$$

Solution pour problème 7–51 :

(a) En $x_0 = 2$ $f(x) = -3. - 0.5\ (-2+x) + 2\,(-2+x)^3$

(b) En $x_0 = -2$ $f(x) = -129. + 95.5\ (2+x) - 24\,(2+x)^2 + 2\,(2+x)^3$

(c) En $x_0 = 0$ $f(x) = 2\,x^3 - 12\,x^2 + 23.5\,x - 18$

(d) En $x_0 = 1$ $f(x) - 4.5 + 5.5\ (-1+x) - 6\,(-1+x)^2 + 2\,(-1+x)^3$

Solution pour problème 7–52 :

(a)

$$f(x) = x^7$$

(b)

$$\begin{gathered}1 + 7\ (-1+x) + 21\,(-1+x)^2 + 35\,(-1+x)^3 \\ +35\,(-1+x)^4 + 21\,(-1+x)^5 + 7\,(-1+x)^6 + (-1+x)^7\end{gathered}$$

(c)

$$\begin{gathered}-1 + 7\ (1+x) - 21\,(1+x)^2 + 35\,(1+x)^3 \\ -35\,(1+x)^4 + 21\,(1+x)^5 - 7\,(1+x)^6 + (1+x)^7\end{gathered}$$

(d)

$$\begin{gathered}128 + 448\ (-2+x) + 672\,(-2+x)^2 + 560\,(-2+x)^3 \\ +280\,(-2+x)^4 + 84\,(-2+x)^5 + 14\,(-2+x)^6 + (-2+x)^7\end{gathered}$$

Solution pour problème 7–53 :

(a) $1 - \frac{x^2}{2}$

(b) $2\,x + \frac{8\,x^3}{3}$

(c)

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

(d)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(x-\pi/3)}{2}-\frac{\sqrt{3}\,(x-\pi/3)^2}{4}-\frac{(x-\pi/3)^3}{12}$$

(e) $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6$

(f) $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$

Solution pour problème 7–55 : Mit Hilfe von $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ erhält man $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ und $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Als Vergleich kann der 'exakte' Wert von $\cos 32^\circ \approx 0.848048$ herangezogen werden.

(a)

$$\cos(32^\circ) = \cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{90}) \approx \cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{6})\,\frac{\pi}{90} = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{180} \qquad (\approx 0.848572)$$

(b)

$$\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{90}) \approx \cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{6})\,\frac{\pi}{90} - \frac{1}{2}\,\cos(\frac{\pi}{6})\,(\frac{\pi}{90})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{180}-\frac{\sqrt{3}\,\pi^2}{4\cdot 90^2} \qquad (\approx 0.848044)$$

(c) Für den Fehler der linearen Approximation gilt

$$R_1 = -\frac{1}{2}\,\cos\xi\cdot(\frac{\pi}{90})^2 \quad \text{und somit} \quad |R_1| \le \frac{1}{2}\,1\,(\frac{\pi}{90})^2 \approx 0.0006$$

Für den Fehler der quadratischen Approximation gilt

$$R_2 = -\frac{1}{6}\,\sin\xi\cdot(\frac{\pi}{90})^3 \quad \text{und somit} \quad |R_2| \le \frac{1}{6}\,1\,(\frac{\pi}{90})^3 \approx 7\cdot 10^{-6}$$

In beiden Fällen ist der effektive Fehler kleiner als die gefundene Schranke.

Solution pour problème 7–56 : Utiliser radian et ne pas degré pour les angles

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0)+f'(x_0)\cdot h + R \quad \text{wobei} \quad R=\frac{1}{2}\,f''(\xi)\cdot h^2 \\ f(x) &= \tan x \\ f'(x) &= 1+\tan^2 x \\ f''(x) &= 2\,\tan x\,(1+\tan^2 x) \end{aligned}$$

(a) $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $h = -2^\circ = \frac{-\pi}{90}$, $f(x_0) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(x_0) = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$$\tan(28^\circ) \approx \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\,\frac{-\pi}{90} \qquad (\approx 0.530808)$$

(b) A cause de $28^\circ < \xi < 30^\circ$ on a $f''(\xi) \le f''(30^\circ) = \frac{8}{3\sqrt{3}} < 2$ et donc

$$|\,R\,| = \frac{1}{2}\,|\,f''(\xi)\,|\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \le \left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \approx 0.0012$$

Solution pour problème 7–57 : $|\text{erreur}\,| \le \frac{0.5^7}{7!} < 1.6\cdot 10^{-6}$.

Solution pour problème 7–58 :

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\pi)$
0	$e^{\sin(x)}$	1
1	$e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)$	-1
2	$e^{\sin(x)}\cdot\cos^2(x) - e^{\sin(x)}\cdot\sin(x)$	$+1$
3	$e^{\sin(x)}\cdot\cos^3(x) - 3\,e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)\,\sin(x) - e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)$	

(a) Setze $x_0 = \pi$ und verwende

$$\begin{aligned} f(x) \approx T_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}\, f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + R \\ &= 1-(x-\pi) + \frac{1}{2}\,(x-\pi)^2 + R \end{aligned}$$

oder auch

$$f(\pi+\delta x) = e^{\sin(\pi+\Delta x)} \approx 1 - \Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^2$$

(b) Für den Rest R gilt

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{3!}\, f'''(\xi)\cdot(x-\pi)^3 \\ |R| &\leq \frac{1}{6}\left|e^{\sin(\xi)}\cdot\cos^3(\xi) - 3\,e^{\sin(\xi)}\cdot\cos(\xi)\,\sin(\xi) - e^{\sin(\xi)}\cdot\cos(\xi)\right|\cdot 0.2^3 \\ &\leq \frac{1}{6}\,|e+3\,e+e|\cdot 0.2^3 = \frac{5\,e}{6}\cdot 0.008 \approx 0.018 \end{aligned}$$

Verwendet man statt $|\sin(\xi)| \leq 1$ die bessere Abschätzung $|\sin(\xi)| \leq 0.2$, so erhält man

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{3!}\, f'''(\xi)\cdot(x-\pi)^3 \\ |R| &\leq \frac{1}{6}\left|e^{\sin(\xi)}\cdot\cos^3(\xi) - 3\,e^{\sin(\xi)}\cdot\cos(\xi)\,\sin(\xi) - e^{\sin(\xi)}\cdot\cos(\xi)\right|\cdot 0.2^3 \\ &\leq \frac{1}{6}\,e^{0.2}\,|1+3\cdot 0.2+1|\cdot 0.2^3 = \frac{2.6\,e^{0.2}}{6}\cdot 0.008 \approx 0.00423 \end{aligned}$$

Der effektive Fehler ist sogar kleiner als 0.00023 .

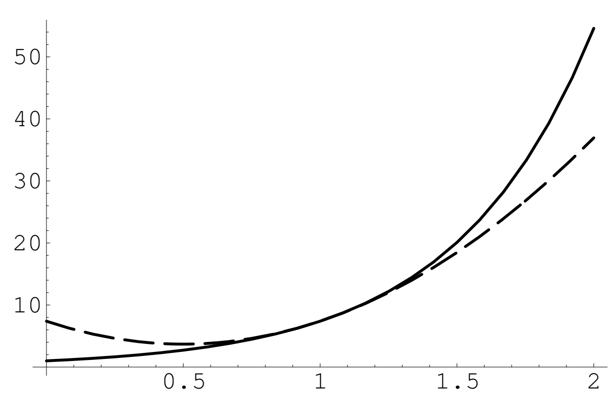
Solution pour problème 7–61 : Les dérivées de $f(x) = e^{2\,x}$ sont données par $f^{(n)}(x) = 2^n\,e^{2\,x}$.

(a)

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{1}{2}\,f''(1)\cdot(x-1)^2 = e^2 + 2\,e^2\cdot(x-1) + \frac{4}{2}\,e^2\cdot(x-1)^2$$

Mathematica

```
T2[x_] = Normal[Series[Exp[2x], {x, 1, 2}]]
Plot[{Exp[2x], T2[x]}, {x, 0, 2},
     PlotStyle -> {Thickness[0.005],
                  {Thickness[0.005],Dashing[{0.05, 0.02}]}}];02}]}}];
```



(b) L'approximation de Taylor est donnée par

$$T_4(x) = e^2 + 2\,e^2 \cdot (x-1) + \frac{4}{2}\,e^2 \cdot (x-1)^2 + \frac{8}{6}\,e^2 \cdot (x-1)^3 + \frac{16}{24}\,e^2 \cdot (x-1)^4$$

et l'erreur d'approximation par

$$|\text{ erreur }| = |\frac{32}{120}\,e^{2\,\xi} \cdot (x-1)^5| \leq \frac{32}{120}\,e^{2\cdot 1.5}\frac{1}{2^5} = \frac{e^3}{120} \approx 0.167$$

La vraie erreur maximale dans l'intervalle $(0.5\,,\,1.5)$ est environ égale à 0.08 .

Solution pour problème 7–62 : A partir des valeurs des dérivées en $x=1$ on obtient

$$f\,(x) = -2 + \frac{3}{3!}\,(x-1)^3 = \frac{-4 + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{2}$$

On peut maintenant appliquer le grand schéma de Horner. Il est avantageux d'utiliser la nouvelle fonction qui a été légèrement modifiée:

$$g\,(x) = 2\,f\,(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 3 & -5 \\
x_0 = 2 & & 2 & -2 & 2 \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & \underline{-3} \\
x_0 = 2 & & 2 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 1 & \underline{3} & \\
x_0 = 2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \underline{3} & & \\
x_0 = 2 & & & & \\
\hline
 & \underline{1} & & &
\end{array}$$

On a donc

$$g\,(x) = -3 + 3\,(x-2) + 3\,(x-2)^2 + (x-2)^3$$

ou

$$f\,(x) = \frac{-3}{2} + \frac{3}{2}\,(x-2) + \frac{3}{2}\,(x-2)^2 + \frac{1}{2}\,(x-2)^3$$

La solution peut être vérifiée à l'aide de *Mathematica*.

Mathematica

```
Clear[f,x];
f[x_] = -2 + 1/2(x-1)^3;
{Expand[f[x],x],Normal[Series[f[x],{x,2,3}]]}
.
                      2     3
   5      3 x     3 x      x
{-(-) + ----- - ------ + --,
   2      2       2       2

                                        2                3
    3      3 (-2 + x)     3 (-2 + x)        (-2 + x)
  -(-) + ----------- + ------------- + -----------}
    2          2              2              2
```

Solution pour problème 7–63 :

(a)

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(b) A cause de $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ on a les inéquations suivantes:

$$-1 = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}} < \frac{-e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh\, x < \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

(c) On a

$$f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x > 0$$

Par conséquent la dérivée est strictement positive et la fonction strictement croissante.

(d) Approximation de Taylor pour $f(x) = \tanh x$. On a

$$f''(x) = -2\,\tanh\,x\,\left(1 - \tanh^2 x\right) = -2\,\tanh\,x + 2\,\tanh^3 x$$

et ainsi

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2}\,f''(0)\,x^2 = 0 + x + 0\,x^2 = x$$

(e) Il nous faut trouver une formule pour la fonction $\operatorname{arctanh} z$.

$$\begin{aligned}
z &= \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
z\left(e^x + e^{-x}\right) &= e^x - e^{-x} \\
z\left(e^{2x} + 1\right) &= e^{2x} - 1 \\
e^{2x}\,(z - 1) &= -1 - z \\
e^{2x} &= \frac{1+z}{1-z} \\
x &= \frac{1}{2}\,\ln\frac{1+z}{1-z} = \operatorname{arctanh} z
\end{aligned}$$

Solution pour problème 7–64 :

(a) Le tableau

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$f^{(n)}(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	...
$f^{(n)}(\frac{\pi}{2})$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	...

fournit le développement de Taylor en $x_0 = \pi/2$:

$$\cos(\pi/2 + x) = -x + \frac{1}{3!}\,x^3 - \frac{1}{5!}\,x^5 + \frac{1}{7!}\,x^7 - \ldots$$

(b) L'erreur après $n-1$ termes est de la forme

$$\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(\xi)x^n$$

Puisque, dans notre cas, $|x| \leq \pi/2$ et $|f^{(n)}(\xi)| \leq 1$ la condition

$$\frac{1}{n!}\,\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \leq 10^{-8}$$

doit être satisfaite. Quelques tests montrent que cette condition est satisfaite pour $n = 14$ mais non pas pour $n = 13$. Par conséquent, les termes jusqu'à x^{13} doivent être pris en considération.

(c) Avec la substitution $z = x^2$ l'expression

$$x\left(-1+\frac{1}{3!}\,z^1-\frac{1}{5!}\,z^2+\frac{1}{7!}\,z^3-\frac{1}{9!}\,z^4+\frac{1}{11!}\,z^5-\frac{1}{13!}\,z^6\right)$$

doit être évaluée. Afin d'évaluer ce polynôme de degré 6 (en z) il nous faut effectuer 6 multiplications (schéma de Horner), en outre un multiplication pour déterminer $z = x{*}x$ et une dernière pour multiplier le résultat par x. Il suffit donc d'effectuer 8 multiplications. Les termes $\frac{1}{k!}$ peuvent être substitués comme constantes.

Solution pour problème 7–65 :

n	0	1	2	3	4	5	6	...
$f^{(n)}(x)$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{2}{x^3}$	$\frac{-6}{x^4}$	$\frac{24}{x^5}$	$\frac{-120}{x^6}$	...
$f^{(n)}(e)$	1	$\frac{1}{e}$	$\frac{-1}{e^2}$	$\frac{2}{e^3}$	$\frac{-6}{e^4}$	$\frac{24}{e^5}$	$\frac{-120}{e^6}$	...

(a) Avec la notation $\Delta x = x - e$ on a l'approximation de Taylor:

$$\ln(e+\Delta x) \approx 1+\frac{1}{e}\,\Delta x-\frac{1}{2\,e^2}\,(\Delta x)^2+\frac{1}{3\,e^3}\,(\Delta x)^3-\frac{1}{4\,e^4}\,(\Delta x)^4+\frac{1}{5\,e^5}\,(\Delta x)^5$$

(b) On obtient pour l'erreur

$$R=\frac{1}{6!}\,f^{(6)}(\xi)\,(\Delta x)^6=\frac{1}{6\,\xi^6}\,(\Delta x)^6$$

Puisque $2 \le x \le 3$ on a $\Delta x \le e-2$ et $\frac{1}{\xi} \le \frac{1}{2}$. L'erreur peut ainsi être estimée par

$$|R| \le \frac{1}{6\cdot 2^6}\,(e-2)^6 \approx 3\cdot 10^{-4}$$

(c) La condition à satisfaire est donnée par

$$\frac{1}{6\cdot(e-\Delta x)^6}\,(\Delta x)^6 \le 10^{-3}$$

Cette condition est satisfaite pour $\Delta x < 0.8$.

Solution pour problème 7–66 : Il y a plusieurs manières de résoudre ce problème. Nous en présentons trois. Nous utilisons le tableau:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$f^{(n)}(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	...
$f^{(n)}(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	...
$f^{(n)}(\frac{\pi}{4})$	$/1\sqrt{2}$	$/1\sqrt{2}$	$-/1\sqrt{2}$	$-/1\sqrt{2}$	$/1\sqrt{2}$	$/1\sqrt{2}$	$-/1\sqrt{2}$	$-/1\sqrt{2}$	...

(a) **Développement de Taylor en** $x_0 = 0$.
La valeur la plus grande de $h = x$ est donnée par $|x| = \pi/2$. On obtient la série

$$\sin(x) = x-\frac{1}{3!}\,x^3+\frac{1}{5!}\,x^5-\frac{1}{7!}\,x^7-\ldots$$

L'erreur après $n-1$ termes est de la forme

$$\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(\xi)\,x^n$$

Puisque, dans notre cas, $|x| \le \pi/2$ et $|f^{(n)}(\xi)| \le 1$, la condition

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \le 10^{-8}$$

doit être satisfaite. Quelques tests montrent que cette condition est satisfaite pour $n = 14$ mais non pas pour $n = 13$. Par conséquent, les termes jusqu'à x^{13} doivent être pris en considération. Avec la substitution $z = x^2$ l'expression

$$x\left(1 - \frac{1}{3!}\,z^1 + \frac{1}{5!}\,z^2 - \frac{1}{7!}\,z^3 + \frac{1}{9!}\,z^4 - \frac{1}{11!}\,z^5 + \frac{1}{13!}\,z^6\right)$$

doit être évaluée. Afin d'évaluer ce polynôme de degré 6 (en z) il nous faut effectuer 6 multiplications (schéma de Horner), en outre un multiplication pour déterminer $z = x{*}x$ et une dernière pour multiplier le résultat par x . Il suffit donc d'effectuer 8 multiplications. Les termes $\frac{1}{k!}$ peuvent être substitués comme constantes.

(b) **Développement de Taylor en** $x_0 = \pi/4$.
La valeur la plus grande possible de $h = x - x_0$ est $|h| = \pi/4$. On obtient la série:

$$\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{4} + h) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + h - \frac{1}{2!}\,h^2 - \frac{1}{3!}\,h^3 + \frac{1}{4!}\,h^4 + \frac{1}{5!}\,h^5 - \frac{1}{6!}\,h^6 - \frac{1}{7!}\,h^7 + \ldots\right)$$

L'erreur après $n-1$ termes est de la forme

$$\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(\xi)\,h^n$$

Puisque, dans notre cas, $|h| \le \pi/4$ et $|f^{(n)}(\xi)| \le 1$, la condition

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n \le 10^{-8}$$

doit être satisfaite. Quelques tests montrent que cette condition est satisfaite pour $n = 11$ mais non pas pour $n = 10$. Par conséquent, les termes jusqu'à h^{10} doivent être pris en considération. Par conséquent, nous avons l'approximation

$$\sin(\frac{\pi}{4} + h) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + h - \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^6}{6!} - \frac{h^7}{7!} + \frac{h^8}{8!} + \frac{h^9}{9!} - \frac{h^{10}}{10!}\right)$$

Afin de déterminer la valeur $\sin x$ pour un x $(0 \le x \le \pi/2)$, il nous faut effectuer 11 multiplications avec le schéma de Horner. Les termes $\frac{1}{k!}$ peuvent être substitués comme constantes.

(c) **Développement de Taylor en** $x_0 = 0$ **et en** $x_0 = \pi/2$.
Nous pouvons aussi distinguer les cas

$$\sin\,x = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \le x \le \pi/4 \\ \sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) & \text{si } \pi/4 \le x \le \pi/2 \end{cases}$$

et utiliser les approximations

$$\sin(x) \approx x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 - \frac{1}{7!}\,x^7 + \frac{1}{9!}\,x^9$$

pour $0 \le x \le \pi/4$ et

$$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) \approx 1 - \frac{1}{2!}\,(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}\,(x - \frac{\pi}{2})^4 - \frac{1}{6!}\,(x - \frac{\pi}{2})^6 + \frac{1}{8!}\,(x - \frac{\pi}{2})^8 - \frac{1}{10!}\,(x - \frac{\pi}{2})^{10}$$

pour $\pi/4 \le x \le \pi/2$. Dans les deux cas l'erreur est inférieure à 10^{-8} et seulement 6 multiplications sont nécessaires. Comparé aux deux premières solutions nous avons une distinction des cas qui n'a pourtant guère d'importance pour le coût de calcul.

Solution pour problème 7–67 : A cause de $2^x = e^{x \ln 2}$ et

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

on a

$$\begin{aligned} 2^x - 1 = e^{x \ln 2} - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^k}{k!} \\ &= x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2} + \frac{(x \ln 2)^3}{6} + \frac{(x \ln 2)^4}{24} + \ldots + \frac{(x \ln 2)^k}{k!} + R_k \end{aligned}$$

où l'erreur est donnée par

$$|R_k| \leq \frac{(\ln 2)^{k+1}}{(k+1)!}$$

On peut montrer que pour $k = 9$ l'erreur est plus petite que 10^{-9} (vérifier avec une calculatrice). Nous pouvons donc calculer $z = x \ln 2$ à partir de x avec une multiplication. Ensuite nous utilisons le schéma de Horner:

$$\begin{aligned} 2^x - 1 &\approx z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \ldots + \frac{z^9}{9!} \\ &= z \left(1 + \frac{z}{2} \left(1 + \frac{z}{3} \left(1 + \frac{z}{4} \left(\ldots \left(1 + \frac{z}{9}\right)\right)\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Au total 9 multiplications, 8 additions et encore 8 divisions par de petits nombres sont nécessaires afin de calculer $2^x - 1$ avec la précision exigée.

Intel n'utilise probablement pas une simple approximation de ce type. Avec un effort théorique qui est considérablement plus grand (autres méthodes d'approximation) le coût de calcul peut être baissé encore plus.

Solution pour problème 7–68 : Utiliser l'approximation de Taylor

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0)\,\Delta x^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\,\Delta x^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi)\,\Delta x^4$$

avec $x_0 = 0$, $\Delta x = x$ et $f(x) = \ln(1 + x)$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\ln(1+x)$	0
1	$(1+x)^{-1}$	1
2	$-(1+x)^{-2}$	-1
3	$2\,(1+x)^{-3}$	2
4	$-6\,(1+x)^{-4}$	

(a)

$$\ln(1+x) \approx 0 + 1\,x - \frac{x^2}{2} + \frac{2\,x^3}{6}$$

(b)

$$\ln(1.2) = \ln(1 + 0.2) \approx 0 + 0.2 - \frac{0.04}{2} + \frac{0.008}{3} = 0.1826666\ldots$$

(c) L'erreur est de la forme (pour un $0 < \xi < 0.2$)

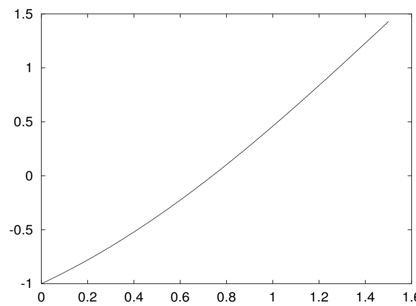
$$|\text{erreur}\,| = \left|\frac{1}{4!}\,f^{(4)}\,(\xi)\,x^4\right| = \frac{1}{24}\,\frac{6}{(1+\xi)^4}\,0.2^4 \leq \frac{6}{24}\;\;0.0016 = 0.0004$$

La vraie erreur est environ égale à 0.00034 (avec une calculatrice).

Solution pour problème 7–69 : Si l'on se contente d'une approximation numérique, les calculs deviennent considérablement plus courts et plus simples.

(a) Nous déterminons d'abord la pente de la tangente et établissons l'équation de la droite.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= x - \cos\,(x) \\
f'\,(x) &= 1 + \sin\,(x) \\
f'\,(\frac{\pi}{4}) &= 1 + \sin\,(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
y\,(x) &= f\,(\frac{\pi}{4}) + f'\,(\frac{\pi}{4})\cdot(x - \frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})\cdot(x - \frac{\pi}{4})
\end{aligned}$$



(b) Dans l'équation de la tangente ci-dessus il faut poser $y = 0$ et ensuite résoudre par rapport à x .

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})\cdot(x - \frac{\pi}{4}) \\
(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})\cdot x &= -\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{2\,\sqrt{2} - \pi}{4} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{\pi}{4} \\
x &= \frac{2}{2 + \sqrt{2}}\;\frac{2\,\sqrt{2} - \pi}{4} + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi - 2\,\sqrt{2}}{2\,(2 + \sqrt{2})} \\
&\approx 0.739536
\end{aligned}$$

Puisque la tangente est une bonne approximation de la courbe, le zéro de la tangente devrait être proche du zéro de la fonction $f\,(x) = x - \cos x$. Cela se confirme par le résultat donné par *Mathematica*.

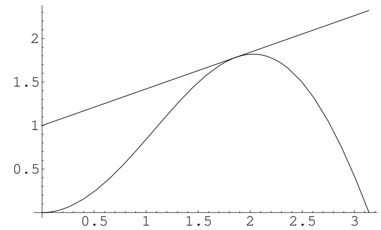
Mathematica

```
FindRoot[f[x]==0,{x,1}]
.
{x -> 0.739085}
```

Solution pour problème 7–70 :

L'équation de la tangente au point $(x_0\,,\,f(x_0))$ est donnée par

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) \\ &= x_0\,\sin x_0 + (\sin x_0 + x_0\cos x_0)\cdot(x-x_0) \end{aligned}$$



Afin que la tangente coupe l'axe des y en $y=1$ il faut que $g(0)=1$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 1 &= x_0\,\sin x_0 + (\sin x_0 + x_0\cos x_0)\cdot(0-x_0) \\ 0 &= x_0^2\cos x_0 + 1 \end{aligned}$$

A l'aide d'une méthode numérique (par exemple la méthode de Newton) nous trouvons $x_0 \approx 1.863$.

Solution pour problème 7–71 :

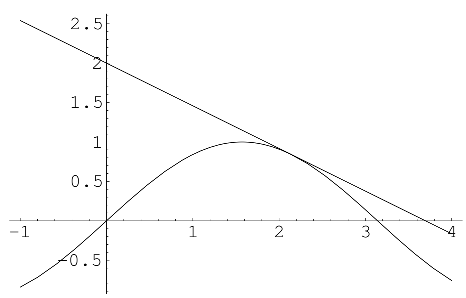
(a) Die allgemeine Gleichung einer Tangente ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) \\ y(x) &= \sin(x_0) + \cos(x_0)\cdot(x-x_0) \end{aligned}$$

(b) Die Bedingung ist beschrieben durch $y(0)=2$ und somit

$$\begin{aligned} 2 &= f(x_0) + f'(x_0)\,(-x_0) \\ 2 &= \sin(x_0) - x_0\,\cos(x_0) \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nicht elementar lösbar. Die Graphik zeigt, dass eine der Lösungen in der Nähe von 2 liegt. Diese Information ist nützlich als Startwert für das Verfahren von Newton.



7.11 Résumé

Après avoir étudié à fond ce chapitre vous devriez

- **très bien connaître** la définition de la dérivée et son interprétation comme pente de la tangente.
- être capable de déterminer rapidement et consciencieusement des dérivées.
- être capable de déterminer des approximations linéaires.
- être capable de déterminer des polynômes de Taylor de fonctions dérivables et d'estimer l'erreur dans des situations simples.
- être capable de déterminer des limites à l'aide de la règle de l'Hospital.
- être capable de formuler et de comprendre le théorème des accroissements finis.

Chapitre 8

Applications de la dérivée

Dans ce chapitre on examine plusieurs applications de la dérivée.

8.1 Problèmes d'optimisation

8.1.1 Théorie

8–1 Définition : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. f admet un **maximum global** en $x = x_0$ si
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{pour tout} \quad x \in [a,b]$$
2. f admet un **maximum local** en $x = x_0$ s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que
$$f(x_0 + h) \leq f(x_0) \quad \text{pour tout } h \text{ tel que} \quad |h| < \varepsilon \quad \text{et} \quad x_0 + h \in [a,b]$$
3. On définit de façon similaire les **minimaux globaux (locaux)**.
4. La fonction admet un **extremum** global (local) si elle possède un maximum ou minimum global (local).

Il est évident qu'un extremum global est aussi un extremum local mais la réciproque est fausse.

8–2 Exemple : Vérifier que la fonction de la figure 8.1 possède, sur l'intervalle $[0,6]$, un maximum global, un minimum global, ainsi qu'un maximum local et deux minima locaux.

Mathematica

```
Clear[f,x,fig];
f[x_] = -(x-0.5)(x-2)(x-3)(x-5.5);
fig=Plot[f[x],{x,0,6},AxesLabel -> {"x","y"}];
```

$\diamondsuit$

8–3 Théorème : *Condition nécessaire pour un extremum*
Soit $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui admet un extremum local en $x = x_0 \in (a,b)$. Alors on a
$$f'(x_0) = 0 \qquad .$$

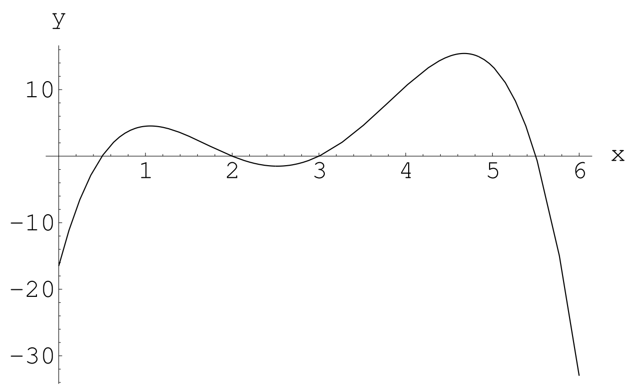


Figure 8.1: Extrema locaux et globaux

Démonstration : Nous considérons le cas d'un maximum local. On a $f(x_0+h) \leq f(x_0)$ pour tout $|h|$ suffisamment petit. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &\leq 0 \\ \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &\geq 0 \end{aligned}$$

Il en découle que $f'(x_0) = 0$. □

Le résultat ci-dessus montre qu'une fonction dérivable ne peut admettre des extrema qu'au point où la dérivée s'annule. Il est toutefois possible qu'une fonction ne soit pas dérivable en certains points isolés et qu'elle admette un extremum en un de ces points. Mentionnons par exemple la fonction $g(x) = |x|$ qui admet un minimum local en $x = 0$.

8–4 Définition : Soit $f(x)$ une fonction continue. Le point x_0 s'appelle **point critique**, si $f'(x_0) = 0$ ou si $f'(x_0)$ n'existe pas.

Par conséquent, le résultat ci-dessus peut être formulé comme suit:

Si une fonction continue admet un extremum local en x_0, alors x_0 est un point critique.

Ce fait est très utile et mène à la procédure suivante pour trouver des extrema des fonctions d'une seule variable.

8–5 Résultat : Marche à suivre pour trouver des extremums
Afin de trouver un maximum (minimum) d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[a, b]$, on peut procéder de la façon suivante:

1. *Vérifier que la fonction est continue. Si tel est le cas, elle admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$ selon le théorème du maximum.*
2. *Trouver tous les points critiques de $f(x)$ pour $a < x < b$.*
3. *Evaluer la fonction pour les valeurs x trouvées ci–dessus.*
4. *Evaluer $f(a)$ et $f(b)$.*
5. *Trouver la valeur maximale (minimale) parmi les valeurs calculées ci-dessus..*

Il est absolument nécessaire de prendre en considération les extrémités a et b de l'intervalle.

8–6 Exemple : Déterminer le minimum et le maximum de la fonction $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ sur l'intervalle $[-5, 5]$.

Mathematica

```
Clear[f,x,fig];
f[x_] = x^3 − 2x^2 + x − 5 ;
fig=Plot[f[x],{x,−5,5},AxesLabel −> {"x","y"},PlotRange−>{−10,15}];
```

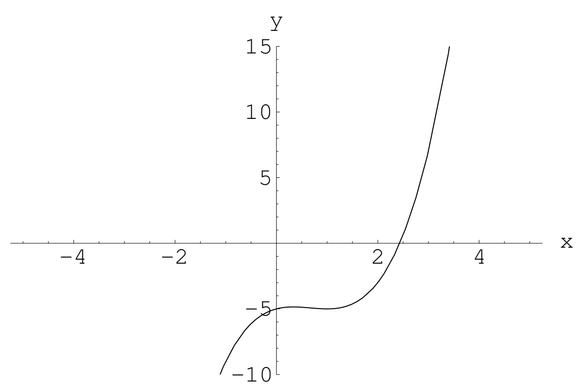


Figure 8.2: Extremum correspondant à une extrémité de l'intervalle

1. La fonction est partout dérivable. Ainsi seulement les zéros de la dérivée entre en ligne de compte comme points critiques.
2. Nous cherchons maintenant tous les points critiques. Dans ce but nous devons calculer la dérivée et ensuite nous devons trouver les zéros.

   $$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

   Cette équation quadratique a les solutions $x = \frac{1}{6}(4 \pm \sqrt{16 - 12})$, c'est-à-dire pour $x = 1$ et $x = 1/3$. On calcule facilement $f(1) = -5$ et $f(1/3) = -4.851\ldots$.
3. On a pour les deux extrémités $f(-5) = -185$ et $f(5) = 75$.

4. Donc le maximum de 75 est admis en $x = 5$ et le minimum de -185 en $x = -5$. Les deux zéros de la dérivée donnent des extrema locaux.

Ce résultat est confirmé par la figure 8.2. ♢

Le résultat suivant est parfois utile pour simplifier des calculs.

8–7 Théorème : *Soit f une fonction continue et g une fonction continue qui est strictement croissante. La fonction $f(x)$ admet un extremum en $x = x_0$ si, et seulement si, la fonction $g(f(x))$ possède un extremum en $x = x_0$.*

Démonstration : Nous n'étudions que le cas où g est une fonction strictement croissante et f une fonction admettant un maximum en $x = x_0$. Les autres cas doivent être traités de façon similaire.

A cause de
$$f(x) \leq f(x_0)$$
et de la croissance de g on a
$$g(f(x)) \leq g(f(x_0)) \qquad .$$
Donc $g(f(x))$ admet aussi un maximum en x_0. On montre de façon analogue que
$$g(f(x)) \leq g(f(x_0)) \quad \Longleftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$$
□

Même si l' on sait que x_0 est un point critique ($f'(x_0) = 0$) on ne sait pas s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Nous voulons maintenant trouver une méthode qui nous permette de distinguer les différents types de points critiques. Si $f \in C^3$ l'approximation de Taylor pour $|h| \ll 1$ donne
$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)\, h + \frac{1}{2}\, f''(x_0)\, h^2 + o(h^2) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2}\, f''(x_0)\, h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$
Si on néglige le terme $o(h^2)$ le graphe de la fonction (avec la variable indépendante) est une parabole qui peut être ouverte vers le haut ou vers le bas. Il dépend du signe de $f''(x_0)$ si l'on a un maximum ou un minimum local.

8–8 Résultat : *Soit $x_0 \in I = (a, b)$ et $f \in C^3(I, \mathbb{R})$ avec $f'(x_0) = 0$.*

1. *Si $f''(x_0) > 0$, alors f admet un minimum local en x_0 .*
2. *Si $f''(x_0) < 0$, alors f admet un maximum local en x_0 .*
3. *Si $f''(x_0) = 0$, alors on peut avoir un maximum, un minimum ou un point de selle.*

Normalement, il suffit d'appliquer le résultat dans la forme ci-dessus. Si toutefois $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, le test de la dérivée seconde ne fonctionne pas. Dans ce cas il faut prendre en considération des termes supplémentaires dans le développement de Taylor. Soit $1 < m \in \mathbb{N}$ le plus petit nombre tel que $f^{(m)}(x_0) \neq 0$. Le développement de Taylor centré sur x_0 est ensuite donné par
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{m!}\, f^{(m)}(x_0)\, h^m + o(h^{m+1})$$
En raison du comportement quantitatif du graphe de x^m on obtient le résultat suivant.

8–9 Théorème : *Soit $x_0 \in I = (a, b)$ et $f \in C^{m+1}(I, \mathbb{R})$ avec $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots, m-1$ et $f^{(m)}(x_0) \neq 0$.*

1. *Si m est impair, alors f possède un point de selle en x_0 .*
2. *Si m est pair et $f^{(m)}(x_0) > 0$, alors f admet un minimum local en x_0 .*
3. *Si m est pair et $f^{(m)}(x_0) < 0$, alors f admet un maximum local en x_0 .*

Le résultat ci-dessus est un cas particulier de ce théorème ($m = 2$).

8.1.2 Quelques exemples simples

8–10 Exemple : Montrer que la fonction $y = (1-x)^2 \sin x$ admet un extremum local en $x_0 = 1$. Décider s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

Solution: On voit facilement que

$$f'(x) = -2(1-x)\sin x + (1-x)^2 \cos x = (1-x)(-2\sin x + (1-x)\cos x)$$

et

$$f''(x) = -4(1-x)\cos x + 2\sin x - (1-x)^2 \sin x$$

Par conséquent, on a

$$f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad f''(1) = 2\sin 1 > 0\,,$$

et la fonction admet un minimum local en $x = 1$. Cela est confirmé par la figure 8.3. ♢

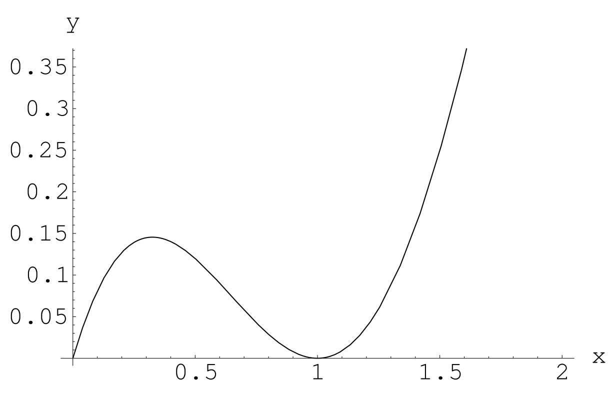


Figure 8.3: Graphe de $f(x) = (1-x)^2 \sin x$

8–11 Exemple : Examiner la fonction $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ en $x_0 = -1$. ♢

8–12 Exemple : Examiner la fonction $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x$ en $x_0 = 1$. ♢

8–13 Exemple : Quel est le point de la droite $y = 5 - 3x$ le plus proche du point $P = (-2, 3)$?

La distance d entre un point quelconque sur la droite et le point P est donnée par

$$d = \sqrt{(x+2)^2 + (5 - 3\,x - 3)^2} = \sqrt{10\,x^2 - 8\,x + 8}.$$

Il n'y a pas d'extrémités de l'intervalle dans cet exemple. Il est clair que la distance devient grande si $|x|$ est grande et par conséquent elle n'est pas minimale.

A cause du théorème sur des fonctions croissantes respectivement décroissantes nous pouvons examiner la fonction plus simple

$$f\,(x) = 10\,x^2 - 8\,x + 8$$

au lieu de la fonction d . On trouve facilement que

$$f'\,(x) = 20\,x - 8 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{8}{20} = 0.4$$

Par conséquent, le point $(0.4, 3.8)$ est le plus proche du point $(-2, 3)$. La figure 8.4 confirme ce résultat. $\diamondsuit$

Mathematica

```
Clear[f,x,fig,fig1];
f[x_] = 5−3x ;
fig1=Plot[f[x],{x,−3,4},AxesLabel −> {"x","y"},AspectRatio −>Automatic,
                    PlotRange −> {−1,6},DisplayFunction −> Identity];
fig  = Show[{fig1, Graphics[ Line[{ {−2,3},{0.4,f[0.4]} }]]},
     DisplayFunction −>$DisplayFunction];
```

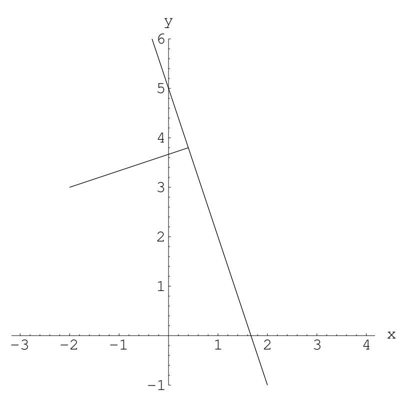


Figure 8.4: Distance minimale entre un point et une droite

On peut toujours procéder d'après le même schéma.

1. Lire l'exercice plusieurs fois avec soin.
2. Faire un dessin dans lequel les grandeurs utilisées sont notées. Introduire des notations appropriées.
3. Etablir des relations entre les grandeurs.
4. Trouver la grandeur à optimiser ainsi qu'une variable favorable indépendante. Cela mène à une fonction (avec un domaine de définition) dont l'extremum doit être trouvé.
5. Utiliser la méthode présentée ci-dessus pour trouver l'endroit et la valeur de l'extremum.
6. Interpréter le résultat obtenu.

8–14 Exemple : Jet d'eau sortant d'un cylindre

Un réservoir d'eau est rempli jusqu'à la hauteur H. Dans une profondeur h il y a un trou latéral par lequel l'eau sort avec une vitesse horizontale $v_0 = \sqrt{2gh}$. A quelle hauteur doit-on percer ce trou afin que le jet d'eau s'échappant latéralement touche le sol à une distance maximale du réservoir?

Le mouvement du jet d'eau peut être considéré approximativement comme un lancement horizontal dans le vide.

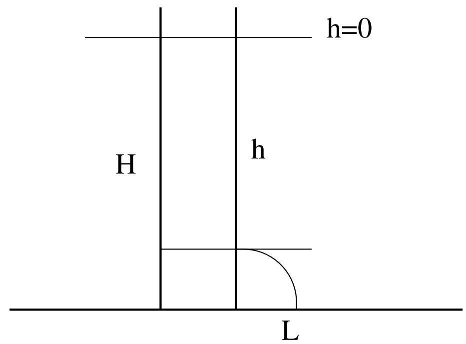


Figure 8.5: Jet d'eau sortant d'un cylindre

Solution: Nous choisissons l'origine du repère là où l'eau sort avec l'axe des x dans la direction du jet d'eau et l'axe des y vers le bas. Les coordonnées d'une particule d'eau à l'instant $t \geq 0$ sont ensuite données par

$$x\,(t) = v_0 t \qquad y\,(t) = \frac{g}{2}\,t^2 \qquad .$$

En éliminant le paramètre t on obtient

$$y = \frac{g}{2}\,t^2 = \frac{g}{2v_0^2}\,x^2 = \frac{g}{2 \cdot 2gh}\,x^2 = \frac{x^2}{4h}$$

Le jet d'eau touche le sol en $y = H - h$ et nous avons donc

$$H - h = \frac{L^2}{4h} \quad \text{ou} \quad L^2 = 4h\,(H - h) \qquad .$$

Au lieu d'examiner L nous cherchons le maximum de L^2.

$$\frac{d\,L^2}{dh} = 4H - 8h = 0 \quad \text{donc} \quad h = \frac{H}{2}$$

Par conséquent, le trou doit être percé à mi-hauteur du cylindre. ♢

8–15 Exemple : Adaption de la puissance d'une résistance thermique.

La figure montre un circuit électrique avec une source de tension U_0, une résistance intérieure R_i de la source de tension et une résistance R_a. Comment doit-on choisir R_a afin que la puissance dégagée P soit maximale?

Solution: La résistance totale est $R = R_i + R_a$ et l'intensité du courant est donc

$$I = \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{R_a + R_i} \qquad .$$

Cela donne une puissance de

$$P = U\,I = R_a\,I\,I = R_a\,\frac{U_0^2}{(R_a + R_i)^2} \qquad .$$

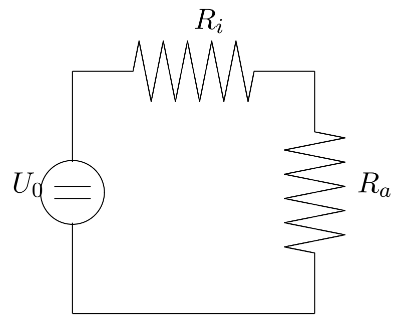


Figure 8.6: Adaption de la puissance d'une résistance

On connaît donc la puissance P comme fonction de la résistance R_a et l'on peut ainsi chercher le maximum de cette fonction. Après un bref calcul on trouve la solution

$$\begin{aligned}\frac{d\,P}{dR_a} &= U_0^2\,\frac{(R_a+R_i)^2 - R_a\,2\,(R_a+R_i)}{(R_a+R_i)^4} = 0\\ (R_a+R_i)^2 &= R_a\,2\,(R_a+R_i)\\ R_a+R_i &= 2\,R_a\\ R_a &= R_i\end{aligned}$$

c'est-à-dire le degré d'efficacité n'est que 50% pour la puissance maximale. ♢

8–16 Exemple : Afin de trouver le minimum de la fonction

$$(x-1)^2 + y^2$$

sous la contrainte

$$y^2 = 4x$$

on peut substituer $4\,x$ à y^2 et chercher le minimum de la fonction

$$f\,(x) = (x-1)^2 + 4\,x\;.$$

Evidemment cette fonction est partout infiniment dérivable et le seul zéro de la dérivée $x = -1$ donne la solution. Malheureusement ce point ne se trouve certainement pas sur la parabole $y^2 = 4\,x$. Pour quelles raisons le résultat final de ce calcul n'est-il pas juste? ♢

8–17 Exemple : Source: [Apos92b, p. 255]
La distance entre deux arbres est égale à D . On tend une ficelle sur la même hauteur entre ces deux arbres auquel on fixe un récipient avec des graines pour les oiseaux. Il y a trois constructions possibles pour la ficelle. Elles ressemblent aux lettres T, V et Y. Les deux premières formes sont des cas particuliers de la troisième. Le récipient doit se trouver d unités en-dessous des deux points de fixation aux arbres. Trouver la construction qui nécessite le moins possible de ficelle.

Considérer la longueur h du bout vertical de la ficelle dans la forme Y comme variable indépendante. Donc $h = 0$ correspond à la forme V et $h = d$ à la forme T.

Solution: Si $D > 2\sqrt{3}\;d$, la forme V doit être utilisée, si $D < 2\sqrt{3}\;d$ la forme Y.

Observation: Il y a un lien étroit entre cet exercice et le **Problème de Steiner**[1]. Considérons les trois extrémités des ficelles comme étant données; il s'agit de trouver le raccordement le plus court entre ces

[1]Jakob Steiner (1796–1863), mathématicien originaire de l'Oberland bernois, a montré avec des moyens simples et clairs qu'aucune courbe fermée différente du cercle ne peut résoudre le problème isopérimétrique (aire maximale pour un périmètre donné). Weierstrass a démontré plus tard que ce problème a vraiment une solution.

trois points. Le ≪point intérieur de connection≫ peut être choisi librement. On peut interpréter ce problème comme un problème d'optimisation avec deux variables indépendantes. On peut montrer que les angles entre les ficelles sont de 120° pour la configuration optimale. ♢

8–18 Exemple : Source: [Apos92a, p.290]
Trouver le point sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$ qui est le plus proche du point $(2, 0)$.

Solution: Nous choisissons x comme variable indépendante. On a sur le cercle $y^2 = 1 - x^2$. La distance L entre les points (x, y) et $(2, 0)$ est donnée par

$$L^2 = (2-x)^2 + y^2 = (2-x)^2 + 1 - x^2 = 5 - 4\,x \;.$$

Si nous égalons cette dérivée à 0, nous obtenons la relation

$$0 = -4 \;.$$

Qu'est-ce qui est faux dans ce calcul? ♢

8.1.3 Réfraction et réflexion

Un rayon de lumière va d'un point A, situé dans un milieu 1, à un point B situé dans un milieu 2. Les deux milieux sont séparés par un plan. La vitesse de la lumière dans les deux milieux est c_1 respectivement c_2. Le chemin du rayon de lumière est déterminé par le **principe de Fermat**[2].

> La lumière se propage d'un point à un autre en suivant le chemin qui demande un temps extrémal (minimum ou maximum).

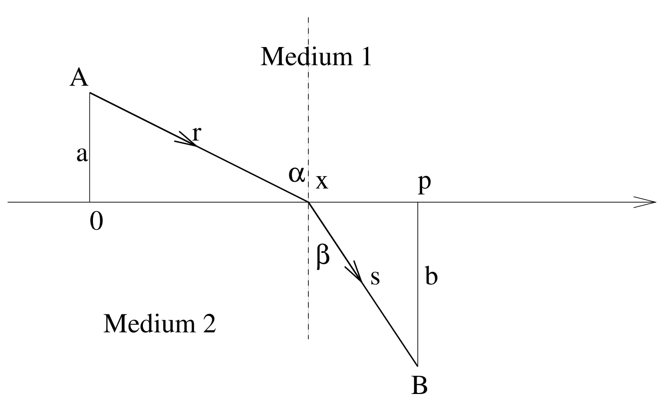


Figure 8.7: Réfraction

Dans notre cas il s'agit de la durée la plus courte, puisque un chemin qui demande un temps maximal n'existe pas. Il est donc ≪clair≫ que le rayon est rectiligne dans les deux milieux. Le rayon est brisé là où il passe par le plan de séparation. Il est également ≪clair≫ que le rayon se propage dans un plan qui est perpendiculaire au plan de séparation et qui passe par A et B.

Avec les notations de la figure nous obtenons pour la durée totale de temps

$$T(x) = \frac{r}{c_1} + \frac{s}{c_2} = \frac{1}{c_1}\,\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{c_2}\,\sqrt{(p-x)^2 + b^2}$$

[2]Pierre Fermat (1601–1655), mathématicien français

La dérivée par rapport à la variable indépendante x est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{d\,T(x)}{dx} &= \frac{1}{c_1}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{c_2}\,\frac{p-x}{\sqrt{(p-x)^2+b^2}} \\ &= \frac{\sin\alpha}{c_1} - \frac{\sin\beta}{c_2} = 0\end{aligned}$$

et nous avons établi la **loi de réfraction de Snellius**

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2}$$

Si c est la vitesse de la lumière dans le vide, le coefficient

$$n_1 = \frac{c}{c_1}$$

s'appelle **indice de réfraction** du milieu 1. Il y a des tableaux détaillés des indices de réfraction pour des matériaux divers. La loi de Snellius peut aussi être mise sous la forme

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \qquad .$$

On trouve par un calcul analogue la loi de réflexion (angle d'incidence = angle de réflexion).

8.2 Etude d'une fonction

Le but de ce paragraphe est de tracer le graphe d'une fonction $y = f(x)$ avec un nombre minimum de valeurs de la fonction. Le moins possible de calculs devraient être effectués. Souvent le comportement qualitatif du graphe peut être déduit du signe de la fonction et de ses dérivées. Les notions **symétrie, monotonie** et **extrema** jouent un rôle décisif.

8–19 Exemple : La fonction $f(x) = \sin x$ est une fonction impaire. En examinant la symétrie de ses dérivées on trouve:

n	$f^{(n)}(x)$	symétrie
0	$\sin x$	impair
1	$\cos x$	pair
2	$-\sin x$	impair
3	$-\cos x$	pair
4	$\sin x$	impair
5	$\cos x$	pair

Dans cet exemple la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire et vice versa. On peut facilement démontrer que ce résultat est valable pour des fonctions symétriques quelconques. Le résultat est le suivant:
$\diamondsuit$

8–20 Résultat : *Soit $f(x)$ une fonction qui est infiniment dérivable. On a:*

Si f est une fonction paire, alors $f^{(n)}$ est $\left\{\begin{array}{c}\textit{paire}\\ \textit{impaire}\end{array}\right\}$ *si $n \in \mathbb{N}$ est* $\left\{\begin{array}{c}\textit{paire}\\ \textit{impaire}\end{array}\right\}$.

Si f est une fonction impaire, alors $f^{(n)}$ est $\left\{\begin{array}{c}\textit{impaire}\\ \textit{paire}\end{array}\right\}$ *si $n \in \mathbb{N}$ est* $\left\{\begin{array}{c}\textit{paire}\\ \textit{impaire}\end{array}\right\}$.

Nous voulons maintenant examiner de plus près l'assertion informelle ≪fonction croissante = dérivée positive≫. Il devrait être facile d'illustrer ce fait à l'aide de quelques exemples.

8–21 Exemple : La dérivée de la fonction $f(x) = x - 2x^2 + 2x^3$ est donnée par $f'(x) = 1 - 4x + 6x^2$. En examinant les zéros de f' on trouve que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. A cause du théorème des valeurs intermédiaires on a donc pour $x_1 < x_2$ que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\,(x_2 - x_1) > 0\ ,$$

ce qui signifie que la fonction est strictement croissante car la tangente a toujours une pente positive. ♢

8–22 Théorème : *Soit $f(x)$ une fonction dérivable. Alors on a:*
Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors la fonction est strictement croissante sur cet intervalle.
Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle.

Démonstration : La démonstration repose sur le théorème des accroissements finis. □

Ce théorème peut aussi être appliqué à la nouvelle fonction $f'(x)$. Nous obtenons ainsi du signe de la dérivée seconde, des informations sur le comportement de $f'(x)$.

8–23 Définition : Une fonction dont la dérivée est croissante s'appelle **convexe**. Une fonction dont la dérivée est décroissante est **concave**.

8–24 Résultat : *Soit $f(x)$ une fonction qui est deux fois dérivable. On a:*
Si $f''(x) > 0$ sur un intervalle, alors la fonction $f'(x)$ est strictement croissante sur cet intervalle et le graphe est donc convexe.
Si $f''(x) < 0$ sur un intervalle, alors la dérivée $f'(x)$ est strictement décroissante sur cet intervalle et le graphe est donc concave.

8–25 Définition : Un point x_0 s'appelle un **point d'inflexion** de la courbe $y = f(x)$ si la dérivée seconde change de signe en x_0, c'est-à-dire si le comportement du graphe change de convexe à concave ou vice versa.

Les résultats ci-dessus sur le comportement qualitatif de courbes $y = f(x)$ peuvent être résumés dans le tableau ci-dessous.

Comportement aux points critiques

Si $f'(x_0) = 0$, on ne peut rien déduire du tableau ci-dessus. Nous avons pourtant vu des résultats correspondants dans la section sur les problèmes d'optimisation. Le signe de la dérivée seconde montre si il y a un maximum ou un minimum local. Il faut soigneusement distinguer entre des conditions **nécessaires** et **suffisantes.**

Prenez garde que le graphe de $f(x)$ puisse aussi posséder un **point d'inflexion** en x_0 si $f'(x_0) \neq 0$ et si la dérivée seconde change de signe. Si $f(x)$ possède un point de selle en x_0 il faut que $f'(x_0) = 0$.

Afin d'esquisser le graphe de la fonction $y = f(x)$ on peut procéder selon la marche à suivre ci-dessous.

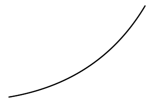
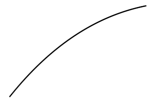
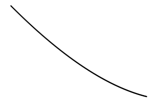
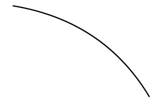
graphe				
dérivée première f est	$f' > 0$ croissante	$f' > 0$ croissante	$f' < 0$ décroissante	$f' < 0$ décroissante
dérivée seconde f' est f est	$f'' > 0$ croissante convexe	$f'' < 0$ décroissante concave	$f'' > 0$ croissante convexe	$f'' < 0$ décroissante concave

Tableau 8.1: Comportement qualitatif des courbes

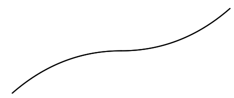
graphe	 minimum	 maximum	 point de selle
dérivée première condition est	$f'(x_0) = 0$ nécessaire	$f'(x_0) = 0$ nécessaire	$f'(x_0) = 0$ nécessaire
dérivée seconde condition est	$f''(x_0) > 0$ suffisante	$f''(x_0) < 0$ suffisante	$f''(x_0) = 0$ nécessaire

Tableau 8.2: Comportement qualitatif en des points critiques

1. Déterminer le domaine de définition (a, b).
2. Déterminer $\lim_{x\to a} f(x)$ rt $\lim_{x\to b} f(x)$.
3. Chercher des symétries.
4. Déterminer les points d'intersection avec l'axe des x .
5. Déterminer des points critiques.
6. Chercher des extrema possibles.
7. Chercher des points d'inflexion.
8. Etablir un tableau de valeurs (si nécessaire).

Attention: La plupart du temps il n'est pas nécessaire d'effectuer toutes les étapes. Parfois quelques-unes des questions sont pratiquement insolubles (par exemple pour trouver les zéros). Il est important de trouver pour la fonction donnée les étapes appropriées afin de pouvoir tracer le graphe avec le moins possible de calculs. Il faut être en mesure de déterminer les dérivées de la fonction avec rapidité et soin pour pouvoir répondre aux questions ci-dessus.

8.2.1 Exemples

Il y a deux types de problèmes d'étude d'une fonction. Ou bien la courbe est donnée par une fonction $y = f(x)$ et on cherche le comportement qualitatif, c'est-à-dire la courbe doit être tracée, ou bien le comportement qualitatif est donné et on doit trouver une fonction correspondante.

8–26 Exemple : Tracer le graphe de

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Solution:

1. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$.
2. Lorsque $x \to \pm\infty$ la valeur $f(x)$ converge vers 0.
3. La fonction est impaire; il suffit donc d'examiner avec soin la fonction pour $x > 0$. La ≪partie gauche≫ du graphe résulte d'une symétrie par rapport à l'origine.
4. On a $f(0) = 0$ et c'est le seul zéro. L'origine est donc le seul point d'intersection du graphe avec l'axe des x.
5. Un bref calcul montre que
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$
et
$$f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^4}\left(-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)\,2(1+x^2)\,2x\right) = \frac{2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}(x^2-3)$$
6. Les points critiques se trouvent donc en $x = \pm 1$ et on a

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	
1	$1/2$	0	< 0	maximum
-1	$-1/2$	0	> 0	minimum

7. Les zéros de f'' se trouvent en $x = 0, \pm\sqrt{3}$; la dérivée seconde change de signe
$$f(\pm\sqrt{3}) = \frac{\pm\sqrt{3}}{4} \approx \pm 0.43$$
8. Il n'est plus nécessaire d'établir un tableau de valeurs supplémentaires afin de pouvoir tracer le graphe.

♢

8–27 Exemple : Trouver une fonction rationnelle dont le graphe ressemble au graphe dans la Figure 8.9.

Solution: La fonction est paire puisque le graphe est symétrique par rapport à l'axe des y. Lorsque $x \to \pm\infty$ la valeur $f(x)$ tend vers 0. Donc le degré du polynôme au dénominateur est plus élevé que le degré du polynôme au numérateur. Il s'agit donc d'une fraction rationnelle propre. Le graphe n'a pas de pôles et par conséquent le dénominateur n'a pas de zéros. $x = 0$ est le seul zéro de $f(x)$ et donc aussi du numérateur. Puisque la fonction f est partout positive, numérateur et dénominateur ont toujours le même signe. Le graphe a un maximum de 1 en $x = \pm 1$. Après quelques essais on peut trouver une solution possible:

$$f(x) = \frac{2x^2}{1+x^4}$$

♢

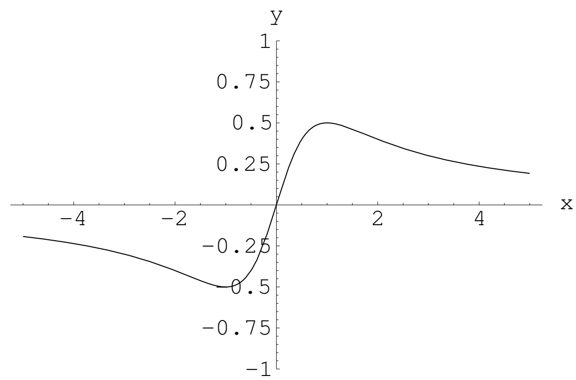


Figure 8.8: Graphe de $f(x) = x/(1 + x^2)$

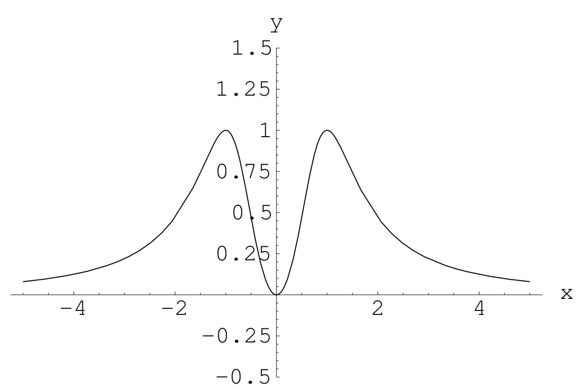


Figure 8.9: Graphe d'une fonction rationnelle

8–28 Exemple :

(a) Trouver une courbe qui admet un minimum local en $x = 0$ et en $x = 3$.

(b) Trouver une courbe qui admet un minimum local en $x = 0$ et un maximum local en $x = 2$.

(c) Trouver une courbe qui a un point d'inflexion en $x = 0.5$ qui est aussi un point critique.

(d) Trouver une courbe qui a un point d'inflexion en $x = 0.5$ qui n'est pas un point critique.

Il existe beaucoup de solutions différentes pour ces exemples. ♢

8–29 Exemple : Tracer le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

♢

8.3 Dérivées implicites, fonctions réciproques

Nous considérons d'abord deux exemples typiques:

8–30 Exemple : Nous considérons la courbe donnée par l'équation

$$x \cdot y = 1 \quad .$$

Si y peut être décrit comme fonction de x , on a le long de la courbe

$$x \cdot y(x) = 1 \quad .$$

Cette relation peut être dérivée par rapport à x à l'aide de la règle concernant la dérivée d'une fonction. Nous obtenons:

$$1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x) = 0$$

et par conséquent

$$y'(x) = \frac{-y(x)}{x}$$

Si cette équation peut être résolue par rapport à y et si la fonction obtenue ainsi $y(x)$ est dérivable, la dérivée est donnée par la formule ci-dessus. Le point $(2\,,\,0.5)$, par exemple, se trouve sur la courbe. La pente en ce point est donnée par $-1/4$. ♢

8–31 Exemple : Soit $y = f(x)$ une fonction satisfaisant à la relation

$$x^2 + f^2(x) = 2\,.$$

On peut dériver les deux membres de l'équation et obtient ainsi

$$2\,x + 2\,f(x) \cdot f'(x) = 0$$

et par conséquent

$$f'(x) = \frac{-x}{f(x)}\,.$$

Vous pouvez facilement vérifier ce résultat en résolvant l'équation par rapport à $y = f(x)$

$$y = f(x) = \pm\sqrt{2 - x^2}$$

et en dérivant ensuite par rapport à x :

$$y' = f'(x) = \frac{-x}{\pm\sqrt{2-x^2}}.$$

Notez bien que la première méthode ne nécessite pas la connaissance de $f(x)$. Il suffit de connaître une équation avec $f(x)$. C'est le grand avantage de cette méthode. On parle de l'idée de la **dérivée implicite**.
♢

8–32 Exemple : Nous considérons l'équation

$$y^4 + 3\,y - 4\,x^3 = 5\,x + 1.$$

Le point $P = (x_0, y_0) = (1, -2)$ se trouve sur la courbe. Il nous faut déterminer la pente de la courbe en ce point. Nous utilisons ensuite l'idée de l'approximation linéaire pour estimer la valeur de y pour $x = 1.029$.

Solution: Voici le programme *Octave* qui a créé la Figure 8.10. En regardant la figure il devient évident qu'il s'agit d'une courbe compliquée.

Octave
```
1;
function h = f(x,y)
  h = y.^4+3*y -4*x.^3-5*x -1;
endfunction

[xx,yy] =  meshgrid(-2:0.2:4,-3:0.1:3);
h = f(xx,yy);

figure(1)
contour(xx,yy,h,[0,0])
xlabel('x'); ylabel('y')
axis([-2 4 -3 3])
```

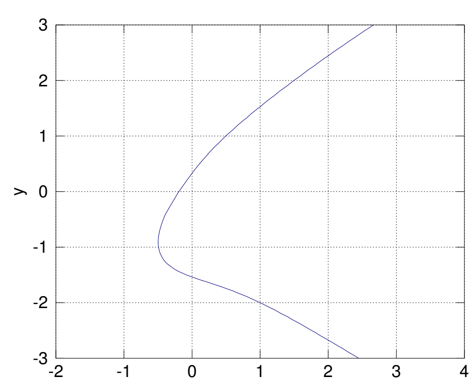


Figure 8.10: Solution de l'équation $y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0$

En admettant que $y(x)$ est une fonction dérivable nous pouvons dériver l'équation ci-dessus et obtenons ainsi

$$4\,y^3\,y' + 3\,y' - 12\,x^2 = 5\,.$$

En posant $x = 1$ et $y = -2$ nous obtenons:

$$\begin{aligned} -32y' + 3y' - 12 &= 5 \\ y' &= -\frac{17}{29} \end{aligned}$$

Afin d'estimer la valeur $y\,(1.029)$ nous utilisons

$$y\,(1+0.029) \approx y\,(1) + y'(1)\;0.029 = -2 - \frac{17}{29}\;0.029 = -2.017$$

Un calcul de comparaison avec la méthode de Newton donne $y\,(1.029) = -2.017107\ldots$. ♢

Une situation particulière est d'un grand intérêt. Il s'agit des **dérivées des fonctions réciproques**. Voici un exemple.

8–33 Exemple : Soit $f\,(x) = \arcsin x$. Alors on a

$$\sin\left(f\,(x)\right) = x$$

et on obtient en dérivant

$$\cos\left(f\,(x)\right)\cdot f'\,(x) = 1 \quad .$$

Par conséquent on a

$$f'\,(x) = \frac{1}{\cos\left(f\,(x)\right)}$$

Pour $-\pi/2 \leq z \leq \pi/2$ on a

$$\cos z = \sqrt{1-\sin^2 z}$$

et il en découle avec $z = f\,(x)$

$$f'\,(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(f\,(x)\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\,x\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Par conséquent, nous avons démontré que

$$\frac{d}{dx}\;\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

♢

8–34 Théorème : *(Dérivée d'une fonction réciproque)*
Soit I_1 et I_2 deux intervalles avec $y_0 \in I_1$, $x_0 \in I_2$ et soit $f\;:I_1 \to I_2$ une fonction continue et strictement croissante telle que $f\,(y_0) = x_0$. Si la fonction est dérivable en $y = y_0$ et si $f'\,(y_0) \neq 0$, alors la fonction réciproque $f^{-1}\,I_2 \to I_1$ est dérivable en $x = x_0$ et on a:

$$(f^{-1})'\,(x_0) = \frac{1}{f'\,(y_0)} = \frac{1}{f'\,(f^{-1}\,(x_0))}$$

Ce théorème peut être appliqué à l'exemple de la fonction $\arcsin$. Avec les notations du théorème on a:

$$f\,(x) = \sin x \quad \text{et} \quad f^{-1}\,(x) = \arcsin x$$

Par conséqent, on a:

$$(\arcsin x)' = (f^{-1})'\,(x) = \frac{1}{f'\,(f^{-1}\,(x))} = \frac{1}{\cos\left(\arcsin x\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

8–35 Exemple : Si l'on considère $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, alors $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ et on peut déterminer la dérivée de cette fonction. $\diamondsuit$

En combinant cet exemple avec la règle de dérivation pour des exposants entiers et avec la règle de la dérivée d'une fonction composée on obtient

8–36 Résultat : *Pour* $a \in \mathbb{Q}$ *et* $x > 0$ *on a*

$$\frac{d}{dx}\, x^a = a\, x^{a-1}$$

8.4 Estimation des déviations

L'idée fondamental se base sur la formule d'approximation

$$y(x) = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad .$$

Cette formule est valable pour de petites valeurs de $x - x_0$. On pose

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{et} \quad \Delta y = f(x) - f(x_0) \qquad .$$

Donc:

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$

8–37 Exemple : Le rayon d'un ballon sphérique est mesuré. On obtient le résultat $12cm$. L'erreur maximale de mesure est égale à $\pm 0.5cm$. Calculer approximativement l'erreur maximale possible pour le volume calculé du ballon.

Nous commençons par la formule pour la volume d'une sphère de rayon r

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

En raison de la mesure on sait que le vrai rayon satisfait à la relation

$$r = r_0 + \Delta r = 12cm + \Delta r \quad \text{où} \quad |\Delta r| \leq 0.5cm$$

On a pour le volume

$$V(r) \approx V(r_0) + \frac{dV}{dr}(r_0) \cdot \Delta r = \frac{4}{3}\pi(12cm)^3 + 4\pi(12cm)^2\Delta r \qquad .$$

Par conséquent, on a pour l'erreur de volume

$$\Delta V = V(r) - V(r_0) \approx V'(r_0)\Delta r = 4\pi 12^2 \Delta r \qquad .$$

En substituant les valeurs ci-dessus on obtient

$$|\Delta V| \leq 4\pi 144 \cdot 0.5cm^3 \approx 904.8cm^3$$

En comparant cette valeur avec la valeur $V(12) \approx 7238cm^3$ on obtient une erreur relative de $\pm 12.5\%$. L'erreur relative pour le rayon mesuré est donné par $\pm 4.17\%$, c'est-à-dire l'erreur relative s'est changée considérablement. $\diamondsuit$

8–38 Exemple : Du sable coule d'un tuyau sur une surface plane et s'empile en un cône dont le rayon est toujours égal à la hauteur. A un certain moment le rayon est égal à $10cm$. Calculer approximativement le changement au rayon donnant un volume supplémentaire égal à $2cm^3$.

Les calculs sont similaires aux ceux ci-dessus et ne sont donnés que brièvement ici.

$$\begin{aligned} V(r) = \frac{1}{3}\pi r^3 \qquad \frac{dV}{dr} &= \pi r^2 \qquad r_0 = 10 \text{ cm} \\ 2 \text{ cm}^3 = \Delta V &\approx \pi r_0^2 \Delta r \\ \Delta r &\approx \frac{2 \text{ cm}^3}{\pi (10 \text{ cm})^2} = \frac{1}{50\,\pi} cm \approx 0.006 \text{ cm} \end{aligned}$$

♢

8–39 Exemple : La résistance R d'un fil électrique est proportionnel à sa longueur et inversement proportionnel à la surface de son aire de la section. Nous supposons que la longueur est fixée. Avec quelle précision (en %) le diamètre doit-il être mesuré pour que l'erreur relative soit inférieure à 3% ?

D'après les données on sait que

$$R = k\frac{L}{x^2} \qquad \frac{dR}{dx} = -k\frac{2L}{x^3} \quad ,$$

où x est le diamètre et k la constante de proportionalité. Par conséquent on a en $x = x_0$

$$\Delta R \approx -k\frac{2L}{x_0^3}\Delta x$$

La condition exigée (erreur relative inférieure à 3%) se traduit au

$$0.03 \geq |\frac{\Delta R}{R}| = |\frac{x_0^2 \Delta R}{kL}| \approx |\frac{2x_0^2 kL}{kLx_0^3}\Delta x| = 2|\frac{\Delta x}{x_0}|$$

L'erreur relative du rayon doit donc être inférieur à 1.5%. ♢

8–40 Exemple : Le montage simple donné dans la figure 8.11 nous permet de mesurer la résistance inconnue Z . La résistance $R = 100\,\Omega$ est donnée et le fil en constantan entre A et B de longueur $l = 10\,cm$ a une résistivité de $\rho = 15\Omega/cm$. La tension entre les points A et B est tenu constante par une source extérieure de tension. Pour mesurer Z le point de jonction x est déplacé jusqu'à ce qu'aucun courant ne coule par l'ampèremètre. Par conséquent, on a dans ce cas

$$\frac{Z}{x} = \frac{R}{l-x}$$

et la résistance inconnue est donnée par

$$Z = \frac{x}{l-x}\,R$$

Maintenant quelques questions se posent:

(a) Esquisser Z comme fonction de x.

(b) Avec quelle précision la grandeur x doit-elle être lue afin que l'erreur de Z soit inférieure à $5\,\Omega$ pour $x = 0.5\,cm$ et $x = 9.5\,cm$?

(c) Soit $\pm\Delta x$ la précision des lectures. Pour quelles valeurs de x

- l'erreur absolue maximale $|\Delta Z|$ est-elle minimale?
- l'erreur relative maximale $|\Delta Z|/Z$ est-elle minimale?

Solution:

(a) Le graphe correspond à une fraction rationnelle avec un pôle en $x = 10$ et un seul zéro en $x = 0$. Il est donné dans la figure 8.12. Elle a été crée par

Octave

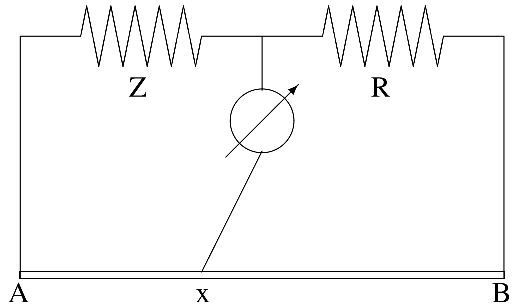


Figure 8.11: Pont de Wheatstone

```
x = 0:0.1:10;
plot(x,100*x./(10-x))
axis([0,10,0,500])
grid on
xlabel('position x');ylabel('resistance Z');
print ('wheatstone.eps','-depsc','-FTimes-Roman:20')
```

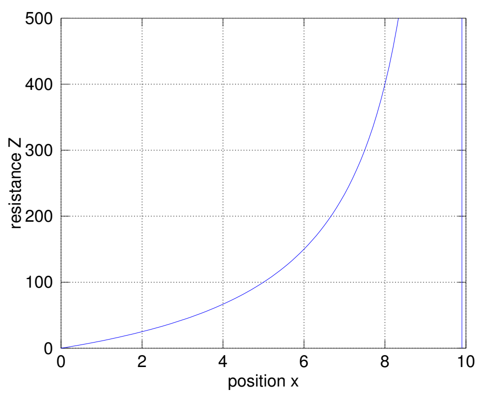


Figure 8.12: Pont de Wheatstone: résistance comme fonction de la position

(b) La dérivée de Z par rapport à x est donnée par

$$\frac{d\,Z}{dx} = \frac{l}{(l-x)^2}\,R$$

On a donc (approximation linéaire)

$$\Delta Z \approx \frac{l}{(l-x)^2}\,R\,\Delta x$$

En substituant les nombres donnés ci-dessus on obtient la condition

$$5 \geq \frac{10}{(10-x)^2}\,100\;\Delta x$$

où aussi

$$|\Delta x| \leq \frac{(10-x)^2}{200}$$

Par conséquent les conditions sont données par

$$|\Delta x| \leq 0.45 \quad \text{bei} \quad x = 0.5 \quad \text{et} \quad |\Delta x| \leq 0.00125 \quad \text{bei} \quad x = 9.5$$

(c) Pour un $|\Delta x|$ donné, l'erreur $|\Delta Z|$ est minimale pour $x = 0$. L'erreur relative

$$\frac{|\Delta Z|}{Z} \approx \frac{l\,R\,|\Delta x|}{(l-x)^2}\,\frac{l-x}{x\,R} = \frac{l\,|\Delta x|}{(l-x)\,x}$$

devient minimale là où la fonction $(x-l)\,x$ admet un maximum, c'est-à-dire en $x = l/2$. Pour que l'erreur relative puisse être tenue petite le pont de Wheatstone doit être actionner au milieu. Cela est le cas pour $R \approx Z$, c'est-à-dire la résistance à mesurer Z devrait être de la même grandeur que la résistance de référence R.

$\diamondsuit$

8.5 Taux liés

Nous considérons d'abord un exemple d'introduction qui est typique pour les taux liés.

8–41 Exemple : Du gaz s'échappe d'un ballon avec un débit de $54\ l/min$. A quelle vitesse la surface diminue-t-elle à l'instant où le rayon est égal à 3.6 m ?

Solution: Le volume V et la surface O sont donnés par

$$V = \frac{4\pi}{3}\,r^3 \quad , \quad O = 4\pi r^2$$

Toutes les trois grandeurs r, V et O dépendent du temps t . En dérivant les relations ci-dessus par rapport au temps t on obtient avec les lois de dérivation

$$\dot V = \frac{d\,V}{dt} = 4\pi\;r^2\dot r \quad , \quad \dot O = \frac{d\,O}{dt} = 8\pi r\dot r$$

Il en suit facilement que

$$\dot O = \frac{2}{r}\,\dot V$$

Au moment en question on a

$$r = 3.6\text{ m} \quad \text{et} \quad \dot V = -0.054\,\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$$

Il en découle que

$$\dot O = -0.03\,\frac{\text{m}^2}{\text{min}}$$

$\diamondsuit$

L'exemple ci-dessus montre une méthode universelle pour examiner les **taux liés**.

8–42 Définition : Soit x une fonction du temps t . Le **taux de changement** est donné par $\frac{d\,x}{dt} = \dot x$.

Si deux ou plusieurs variables qui toutes dépendent de t sont liées par une équation, on obtient une relation entre les taux en dérivant l'équation par rapport à t . On peut presque toujours utiliser la marche à suivre donnée ci-dessous:

1. Trouver les différentes grandeurs.
2. Etablir les équations qui lient les différentes grandeurs.
3. Dériver les équations par rapport au temps t .
4. Introduire les informations pour l'instant donné dans les équations.
5. Résoudre par rapport aux grandeurs cherchées.

8–43 Exemple : L'eau coule d'un entonnoir conique avec un débit de $8\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. Le rayon de l'ouverture supérieure est égal à $8\ \mathrm{cm}$ et la hauteur égale à $16\ \mathrm{cm}$. Déterminer la vitesse par laquelle le niveau d'eau descend à l'instant où le niveau se trouve $4\ \mathrm{cm}$ en-dessus de la pointe de l'entonnoir.

Solution: Soit r le rayon, h la hauteur du niveau d'eau et V la quantité d'eau à l'instant t . On a

$$r = \frac{h}{2} \quad , \quad V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h = \frac{\pi}{12}\,h^3$$

La dérivée par rapport à t est donnée par

$$\dot V = \frac{\pi}{4}\,h^2 \dot h$$

A l'instant en question on a

$$\dot V = -8\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s} \quad \text{et} \quad h = 4\ \mathrm{cm}$$

et par conséquent

$$-8\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s} = \frac{\pi}{4}\,(4\ \mathrm{cm})^2 \dot h$$

et

$$\dot h = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

$\diamondsuit$

8–44 Exemple : Dans l'exemple précédent on a négligé que la hauteur h ait une influence sur la vitesse d'écoulement. Nous supposons que le rayon du trou dans la pointe du cône est égal à 1 mm $= 0.1$ cm. Pour des raisons physiques la vitesse d'écoulement v est donnée par

$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$

On a donc

$$\dot V = \frac{dV}{dt} = -\pi (0.1\ \mathrm{cm})^2 \sqrt{2\,g\,h}$$

Par conséquent, on a la relation

$$-\pi (0.1\ \mathrm{cm})^2 \sqrt{2\,g\,h} = \frac{\pi}{4}\,h^2 \dot h$$

et donc

$$\dot h = -4\ (0.1\ \mathrm{cm})^2 \sqrt{2\,g}\ h^{-3/2}$$

Avec $g = 981\ \mathrm{cm/s}^2$ et $h = 4$ cm nous obtenons $\dot h \approx -0.22\ \mathrm{cm/s}$. Le niveau d'eau descend donc à environ 2 mm par seconde. $\diamondsuit$

8–45 Exemple : Pour l'entonnoir, dans les exercices précédents, on peut aussi exiger que le niveau d'eau descende à une vitesse constante k . Le rayon r , comme fonction de la hauteur h , doit être choisi convenablement. Cela mène à la condition

$$\frac{d}{dt}\,h = -k$$

Pour un diamètre R du trou on a

$$-\pi\,R^2 \sqrt{2\,g\,h} = \pi\,r^2 \dot h$$

et donc

$$\dot h = -\frac{R^2 \sqrt{2\,g\,h}}{\pi\,r^2} = -k$$

Cela mène à la condition

$$R^2 \sqrt{2\,g\,h} = k\,\pi\,r^2$$

et par conséquent

$$r = \frac{R}{\sqrt{k\,\pi}}\ (2\,g\,h)^{1/4}$$

Afin que le niveau d'eau descende à une vitesse constante, le rayon doit donc être proportionnel à la quatrième racine de la hauteur.

$\diamondsuit$

8–46 Exemple : Un promeneur (taille 1.8 m) s'éloigne à une vitesse de 2 m/s d'un lampadaire d'une hauteur 5 m . Son ombre devient de plus en plus grande. Déterminer de combien l'ombre s'allonge par seconde.

Solution: $\frac{1.8 \cdot 2}{5-1.8}\ \frac{m}{s}$ ♢

8–47 Exemple : Une échelle de 5 m est posée contre une paroi. Le pied de l'échelle se trouve à 3 m de la paroi et est ensuite retiré à une vitesse de 30 cm/s . Déterminer la vitesse avec laquelle l'extrémité supérieure de l'échelle glisse le long de la paroi vers le bas.

Solution: La relation entre la hauteur h et la distance x entre le pied et le paroi est donnée par

$$h^2 + x^2 = 5^2$$

et par conséquent

$$2\,h\,\dot{h} + 2\,x\,\dot{x} = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{h} = -\frac{x}{h}\,\dot{x}$$

A l'instant en question on a $x = 3$ m et $\dot{x} = 0.3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ et donc $h = \sqrt{25-9}$ m $= 4$ m et

$$\dot{h} = -\frac{3}{4}\,0.3\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = -0.225\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

♢

8.6 Méthode de Newton pour résoudre une équation

8.6.1 Introduction

Nous considérons le problème à déterminer un zéro d'une fonction d'une seule variable; en d'autres termes, nous voulons résoudre l'équation

$$f(x) = 0$$

Supposons qu'on a une approximation raisonable x_0 d'un zéro. Nous remplaçons la fonction $f\,(x)$ par la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ à la courbe et déterminons l'abscisse x_1 du point d'intersection avec l'axe des x :

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \qquad .$$

Nous espérons que la solution x_1 donnée par

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad .$$

sera une meilleure approximation de la vraie solution. Par itération nous arrivons à la formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad .$$

Ce calcul crée une suite de nombres x_n et nous espérons que $x_n \to z$ avec $f(z) = 0$.

8–48 Exemple : Nous considérons l'équation

$$f(x) = x^2 - 7 = 0$$

Nous voulons donc déterminer $\sqrt{7}$. Nous utilisons la valeur initiale $x_0 = 7.0$. Avec la dérivée $f'(x) = 2\,x$ nous obtenons la formule d'itération suivante

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 7}{2x_n} = \frac{1}{2}\,(x_n + \frac{7}{x_n}) \qquad .$$

Mathematica

```
Clear[x,f,df,newton];
f[x_] = x*x -7;
df[x_] = D[f[x],x];
newton[x_] = x- f[x]/df[x];
Print[newton[x]]
.
              2
      -7 + x
x - --------
        2 x
```

La figure 8.13 montre le graphe pour une itération, avec $x_0 = 7$ comme valeur initiale.

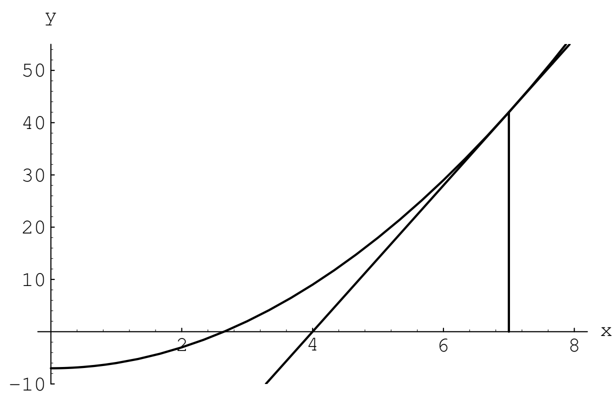


Figure 8.13: Idée de la méthode de Newton

Voici les résultats des 7 premières itérations de cette méthode; le calcul a été effectué par *Mathematica*.

Mathematica

```
xi = 7.0 ;
Print[{0,N[xi,20]}] ;
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],20]}],{i,7}]
.
{0, 7.}
{1, 4.}
{2, 2.875}
{3, 2.654891304347826}
{4, 2.645767044190289}
{5, 2.645751311111369}
{6, 2.645751311064591}
{7, 2.645751311064591}
```

◊

8.6.2 Résultats

8–49 Théorème : *Soit f une fonction dont les dérivées supérieures existent et qui satisfait $f(z) = 0$. Si $f'(x) \neq 0$ pour x proche de z et si x_0 est suffisamment proche de z, alors la suite x_n définie par la formule de récurrence*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

tend vers le vrai zéro z.
Si la fonction $f(x)$ est deux fois dérivable (la dérivée de la dérivée existe), alors la convergence est quadratique. Avec chaque itération le nombre de décimales ≪exactes≫ double.

Démonstration : La preuve que nous allons donner n'est pas complète. Nous voulons vérifier la convergence quadratique par un calcul formel. Afin de simplifier le calcul nous supposons que le zéro est égal à 0, donc $f(0) = 0$. Nous remplaçons la fonction par une approximation de Taylor

$$f(x) = 0 + f_1\,x + \frac{1}{2}\,f_2\,x^2 + \frac{1}{6}\,f_3\,x^3 + o(x^3)$$

où $f_1 = f'(0) \neq 0$. Dans cette situation simplifiée la valeur x_n est égale à l'erreur. On a

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= x_n - \frac{f_1\,x_n + \frac{1}{2}\,f_2\,x_n^2 + \frac{1}{6}\,f_3\,x_n^3 + o(x_n^3)}{f_1 + f_2\,x_n + \frac{1}{2}\,f_3\,x_n^2 + o(x_n^2)} \\
&= \frac{x_n\left(f_1 + f_2\,x_n + \frac{1}{2}\,f_3\,x_n^2 + o(x_n^2)\right) - \left(f_1\,x_n + \frac{1}{2}\,f_2\,x_n^2 + \frac{1}{6}\,f_3\,x_n^3 + o(x^3)\right)}{f_1 + f_2\,x_n + \frac{1}{2}\,f_3\,x_n^2 + o(x_n^2)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\,f_2\,x_n^2 + \frac{1}{3}\,f_3\,x_n^3 + o(x_n^3)}{f_1 + f_2\,x_n + \frac{1}{2}\,f_3\,x_n^2 + o(x_n^2)} \\
&= \frac{f_2}{2\,f_1}\,x_n^2 + O(x_n^3)
\end{aligned}$$

La nouvelle erreur est environ égale au carrée de l'ancienne erreur multipliée par une constante.

Le calcul révèle que la convergence est même plus rapide si $f_2 = f''(0) = 0$. On voit aussi qu'il y a des problèmes de convergence si $f_1 = 0$. □

L'exemple 8–48 confirme le résultat ci–dessus. Voilà un autre exemple.

8–50 Exemple : Soit $f(x) = x^5 - 3\,x + 1$. Trouver $f(2) = 2^5 - 3\cdot 2 + 1 = 27$ et $f(-2) = -2^5 + 3\cdot 2 + 1 = -25$. Donc il y a (au moins) un zéro de f entre -2 et 2. L'itération de Newton donne

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - 3x_n + 1}{5x_n^4 - 3}$$

Nous supposons que le zéro soit relativement proche de 0 et choisissons $x_0 = 0$. Nous obtenons

$$x_1 = x_0 + \frac{x_0^5 - 3x_0 + 1}{5x_0^4 - 3} = 0 - \frac{0 - 0 + 1}{0 - 3} = \frac{1}{3}$$

Les valeurs de la fonction et sa dérivée en $x = 1/3$ sont données par

$$f(x_1) = f(1/3) = 1/243 \quad \text{et} \quad f'(1/3) = -\frac{238}{81}$$

et donc

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^5 - 3\,x_1 + 1}{5\,x_1^4 - 3} = \frac{1}{3} - \frac{1/243}{-238/81} = \frac{1}{3} + \frac{1}{714} = \frac{239}{714} \approx 0.3347$$

L'itération peut être continuée. En générale, on ne calcule pas avec des fractions exactes, mais avec des fractions décimales. Le but est de trouver une approximation du vrai zéro.

Avec *Mathematica* on cherche le zéro de cette fonction par les commandes

Mathematica

```
f[x_] := x^5 -3 x +1 ;
FindRoot[f[x]==0,{x,0.0}]
.
{x -> 0.334734}
```

Mathematica utilise la méthode de Newton, donc on doit donner une première estimation du zéro. Les commandes ci–dessous de *Mathematica* donnent la figure 8.14.

Mathematica

```
Plot[f[x],{x,-2,2}];
```

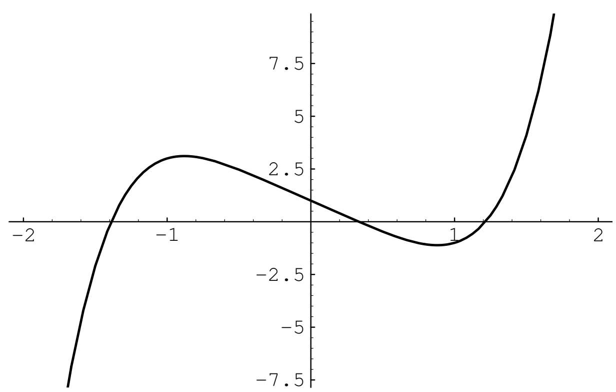


Figure 8.14: graphe de $f(x) = x^5 - 3\,x + 1$

Avec des valeurs initiales différentes, on peut trouver de zéros differents. Examiner les exemples ci–dessous.

Mathematica

```
x1 = FindRoot[f[x]==0,{x,-1.5}]
.
{x -> -1.38879}
```

Mathematica

```
x1 = FindRoot[f[x]==0,{x,1.2}]
.
{x -> 1.21465}
```

♢

8–51 Exemple : Considérer la fonction

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$$

Faire les calculs suivants:

1. Trouver $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Evaluer $f(x)$ pour quelques petites valeurs entières de x.

3. Effectuer une intération avec la méthode de Newton pour estimer la position du zéro de cette fonction.

4. Produire un graphique pour illustrer les calculs ci–dessus.

◇

8.6.3 Désavantages et problèmes de la méthode de Newton

Le grand désavantage du théorème 8–49 est la condition que x_0 doit être „suffisamment proche“ du vrai zéro z. Pour que la convergence soit quadratique il faut $f'(z) \neq 0$. Les exemples suivants montrent que ces restrictions peuvent causer des problèmes.

8–52 Exemple : (Convergence non–quadratique)

Nous considérons la fonction $f(x) = x^2$ avec le seul zéro $x = 0$, mais $f'(0) = 0$. Donc une des conditions du théorème 8–49 n' est pas satisfaite. Pour cet exemple, la suite x_n converge vers 0, mais pas d'une façon quadratique. La convergence n'est que linéaire. Avec une itération supplémentaire on gagne un nombre fixe de décimales exactes de plus (ici: $\frac{\ln 2}{\ln 10} \approx 0.3$ par itération).

Pour $x_0 = 1.0$ les valeurs suivantes:

Mathematica

```
Clear[x,xi,f,df,newton];
f[x_] = x*x ;
df[x_] = D[f[x],x];
newton[x_] = x- f[x]/df[x];
xi = 1.0 ;
Print[{0,N[xi,20]}] ;
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],20]}],{i,15}]
.
{0, 1.}
{1, 0.5}
{2, 0.25}
{3, 0.125}
{4, 0.0625}
{5, 0.03125}
{6, 0.015625}
{7, 0.0078125}
{8, 0.00390625}
{9, 0.001953125}
{10, 0.0009765625}
{11, 0.00048828125}
{12, 0.000244140625}
{13, 0.0001220703125}
{14, 0.00006103515625}
{15, 0.000030517578125}
```

◇

8–53 Exemple : (Recherche d'un zéro qui n'existe pas)

Dans l'exemple précédent nous remplaçons la fonction $f(x)$ par $f(x) = x^2 + 0.001$. Donc il n'y a pas de zéros. Voici la réponse de *Mathematica*.

Mathematica

```
Clear[x,xi,f,df,newton];
f[x_] = x*x + 0.001 ;
df[x_] = D[f[x],x];
newton[x_] = x- f[x]/df[x];
xi = 1.0 ;
```

```
Print[{0,N[xi,20]}] ;
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],20]}],{i,15}]
.
{0, 1.}
{1, 0.4995000000000001}
{2, 0.248748998998999}
{3, 0.122364441159518}
{4, 0.05709606617687831}
{5, 0.01979086235007258}
{6, -0.01536875343479534}
{7, 0.02484916623527828}
{8, -0.007696816339625212}
{9, 0.06111351607747259}
{10, 0.02237526183147899}
{11, -0.01115847630596761}
{12, 0.03922974707850315}
{13, 0.006869443419617018}
{14, -0.06935137891839577}
{15, -0.02746602747701381}
```

La suite ne converge pas.

♢

8–54 Exemple : (Zéro de l'ordre 3)

Au lieu de l'exemple précédent nous considérons $f(x) = x^3$. Il y a un seul zéro $x = 0$. Voici la réponse de *Mathematica*.

Mathematica

```
Clear[x,xi,f,df,newton];
f[x_] = x^3 ;
df[x_] = D[f[x],x];
newton[x_] = x- f[x]/df[x];
xi = 1.0 ;
Print[{0,N[xi,20]}] ;
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],20]}],{i,20}]
.
{0, 1.}
{1, 0.6666666666666666}
{2, 0.4444444444444445}
{3, 0.2962962962962963}
{4, 0.1975308641975308}
{5, 0.1316872427983539}
{6, 0.0877914951989026}
{7, 0.05852766346593507}
{8, 0.03901844231062338}
{9, 0.02601229487374892}
{10, 0.01734152991583262}
{11, 0.01156101994388841}
{12, 0.007707346629258941}
{13, 0.005138231086172628}
{14, 0.003425487390781752}
{15, 0.002283658260521168}
{16, 0.001522438840347445}
{17, 0.001014959226898297}
{18, 0.0006766394845988646}
{19, 0.0004510929897325764}
{20, 0.0003007286598217176}
```

La suite converge vers 0, mais très lentement. ♢

8–55 Exemple : (Division par zéro)

La méthode peut mener à une division par zéro. Examiner la fonction $f(x) = -x^3 + x^2 - 5$. On a $f'(x) = -3x^2 + 2x$ et donc $f'(0) = 0$. La figure 8.15 montre le graphique pour une itération avec la méthode de Newton et pour la valeur initiale $x_0 = 1.54598$.

Pour cette itération on arrive à $x_1 \approx 0$ et donc x_2 devient un nombre énorme. Ce n'est pas un comportement désirable de la méthode de Newton. Voir le résultat ci–dessous de *Mathematica* pour deux itérations.

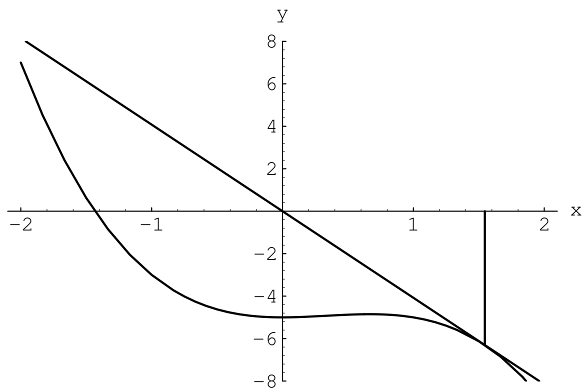


Figure 8.15: division par zéro dans la méthode de Newton

Mathematica

```
xi = z;
Print[{0,N[xi,20]}] ;
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],20]}],{i,2}]
.
{0, 1.54598}
{1, −0.00002508423995384312}
{2, −99660.4219443772}
```

♢

8–56 Exemple : (oscillations)

Il est possible que la méthode ne converge pas parce que la suite x_n ≪saute≫ entre deux valeurs différentes. Voici un exemple:

Considérons la fonction $f(x) = \sin x$. On a $f'(x) = \cos x$. Chercher une valeur de x_0 telle que $x_1 = -x_0$ et $x_2 = x_0$. La première condition implique l'équation

$$-x_0 = x_0 - \frac{\sin x_0}{\cos x_0} \quad .$$

Simplifier

$$\sin x_0 - 2x_0 \cos x_0 = 0$$

et puis trouver la solution $x_0 \approx 1.16556118521\ldots$. (Comment?)

Voici les résultats de *Mathematica* pour six itérations.

Mathematica

```
xi = z;
Print[{0,N[xi,20]}] ;
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],20]}],{i,6}]
.
{0, 1.16556118521}
{1, −1.165561185222366}
{2, 1.165561185289563}
```

```
{3, −1.165561185654719}
{4, 1.165561187639029}
{5, −1.165561198422031}
{6, 1.165561257018282}
```

Évidemment la méthode saute entre les valeurs z et $-z$. Si l'on continue l'itération, la suite x_n tend finalement vers un des zéros de la fonction $\sin x$.

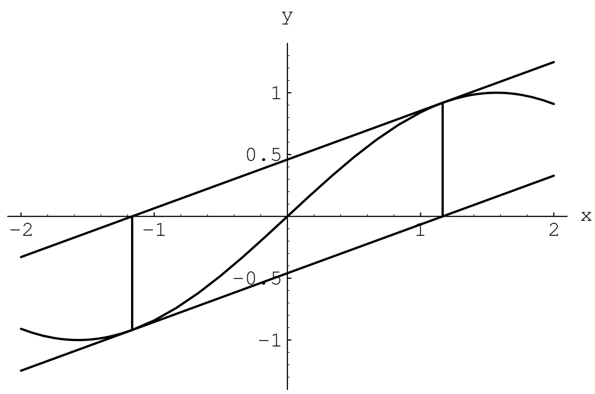


Figure 8.16: Oscillations dans la méthode de Newton

$\diamondsuit$

8–57 Exemple : (Faux zéro)
La suite x_n peut tendre vers un autre zéro de la fonction $f(x)$ qui n'est pas proche de x_0. Examiner l'exemple précédent, mais augmenter un petit peu la valeur initiale $x_0 = 1.16556118521\ldots$ $\diamondsuit$

8–58 Exemple : Chercher une valeur initiale x_0 proche de 0 telle que la suite x_n construite avec la méthode de Newton tend vers le zéro $z = 7\pi/2$ de la fonction $y = \cos(x)$. Dessiner cette situation. $\diamondsuit$

Conclusion: la méthode de Newton est très efficace pour déterminer une solution de haute précision à partir d'une valeur initiale appropriée. En revanche, la méthode fonctionne mal si l'on veut déterminer des solutions sans connaître de *bonnes* valeurs intiales.

8.6.4 Programme pour le HP–48

Comme suplément, un programme simple pour la calculatrice de poche HP–48 pour chercher un zéro d'une fonction avec la méthode de Newton par étappe.
Instructions: utiliser ce programme avec la fonction à examiner dans l'affichage. La variable indépendente **doit s'appeler** `X`. Par exemple

```
'X*COS(X) - SIN(X)'
```

pour résoudre $x\ \cos x - \sin x = 0$. Lancer le programme pour obtenir deux options au choix.

```
NEW                          EXIT
```

Mettre un nombre dans l'affichage et toucher `NEW` pour effectuer une itération avec la méthode de Newton. Répéter si nécessaire. Toucher `EXIT` pour terminer.

Listing: Remplacer le symbol $\backslash\backslash d$ par le symbol de la dérivée δ.

```
<< -> f
   << 'X' PURGE f 'X' \\d -> df
      << { { "NEW"
               << DUP 'X' STO f EVAL df EVAL / -
               >>
             } {} {} {} {}
             { "EXIT"  CONT
             }
           } TMENU HALT 'X' PURGE 2 MENU
      >>
   >>
>>
```

8.6.5 Exemples

8–59 Exemple : (Manège à sièges suspendus par des chaînes)
Un manège avec une barre de $r = 2\ m$ et une chaîne de longueur $l = 4\ m$ fait un tour complet en $T = 5\ s$. Trouver l'angle α de la chaîne par rapport à la verticale.

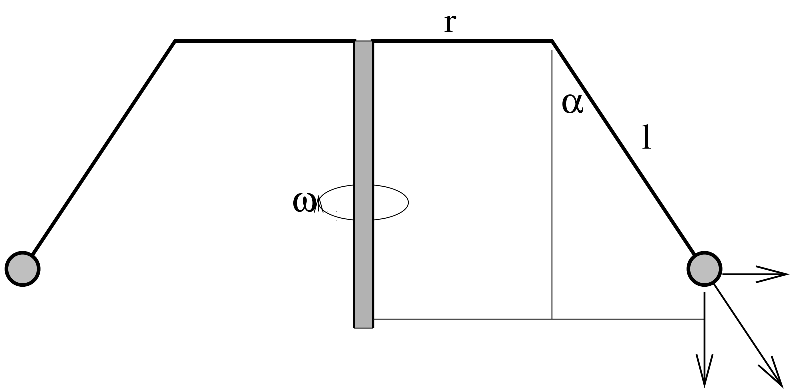


Figure 8.17: Manège à sièges suspendus par des chaînes

Solution: Avec les notations données dans la figure 8.17, la grandeur de la force centrifuge est donnée par

$$F = m\omega^2(r + l\ \sin\alpha)$$

et la force de gravitation est $G = m\,g$. La direction de la force totale doit être celle de la chaîne, donnée par l'angle α. On a donc

$$\tan\alpha = \frac{F}{G} = \frac{\omega^2}{g}\ (r + l\ \sin\alpha)$$

Avec $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ et la nouvelle variable $x = \sin\alpha$ on arrive à l'équation

$$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\omega^2}{g}\ (r + l\ x)$$

Pour résoudre cette équation on peut utiliser la méthode de Newton. Mais on peut aussi d'abord simplifier l'équation. Nous élevons les côtés au carré et multiplions par $(1 - x^2)$ pour arriver à

$$x^2 = \frac{\omega^4}{g^2}\ (r + l\ x)^2\ (1 - x^2)$$

Donc il reste à déterminer les zéros d'un polynôme du degrée 4. Nous choisissons comme valeur initiale $\alpha_0 = 30°$ (ou $x_0 = 0.5$). La méthode de Newton rend $x \approx 0.5658$ et donc $\alpha \approx 34°$. ♢

8–60 Exemple : (chaînette)
Considérons un câble suspendu entre deux poteaux qui se trouvent à une distance de 200 m l'un de l'autre et dont les hauteurs sont respectivement de 50 m et 55 m. Le point le plus bas du câble se trouve à une hauteur de 20 m. Calculer la distance a entre le point le plus bas et le poteau de 50 m.

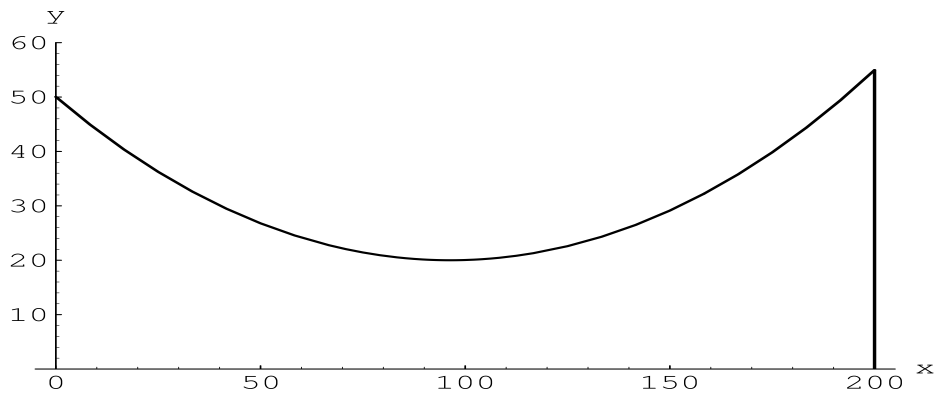


Figure 8.18: chaînette

Indication: la forme du câble est donnée par

$$y = f(x) = h + \lambda\,(\cosh\frac{x-a}{\lambda} - 1) \qquad .$$

avec les notations

h	hauteur du point le plus bas
a	coordonnée horizontale du point le plus bas
λ	$= \dfrac{H}{\rho\, g}$
ρ	masse spécifique $[kg\ m^{-1}]$ du câble
H	tension du câble $[N] = [kg\ m\ s^{-2}]$ au point le plus bas
	ou composante horizontale de la tension
g	constante de gravité $\approx 9.81 \frac{m}{s^2}$

Dans l'équation ci–dessus on calcule h. Puis utiliser les deux conditions

$$f(0) = 50 \quad \text{et} \quad f(200) = 55$$

pour trouver deux équations pour les inconnues a et λ. Utiliser une des équations pour trouver une formule pour a. Ensuite remplacer a dans l'autre équation pour obtenir une équation pour l'inconnue λ. Puis utiliser la méthode de Newton.

Solution: Les deux équations sont

$$\begin{aligned} 50 &= h + \lambda(\cosh(\frac{0-a}{\lambda}) - 1) \\ 55 &= h + \lambda(\cosh(\frac{200-a}{\lambda}) - 1) \end{aligned}$$

Utiliser $h = 20$ pour simplifier

$$\begin{aligned}\frac{30}{\lambda} &= \cosh(\frac{a}{\lambda}) - 1\\ \frac{35}{\lambda} &= \cosh(\frac{200-a}{\lambda}) - 1\end{aligned}$$

Avec la première équation on arrive à

$$\begin{aligned}\cosh(\frac{a}{\lambda}) &= \frac{30}{\lambda} + 1\\ \frac{a}{\lambda} &= \operatorname{arccosh}(\frac{30}{\lambda} + 1)\\ a(\lambda) &= \lambda \operatorname{arccosh}(\frac{30}{\lambda} + 1)\end{aligned}$$

On arrive à une seule équation pour l'inconnue λ

$$\frac{35}{\lambda} = \cosh(\frac{200 - a(\lambda)}{\lambda}) - 1$$

Pour appliquer Newton il nous faut une estimation λ_0 pour la vrai valeur de λ. À l'aide de la description du problème on peut estimer $a \approx 100$. Mettre $z = \frac{1}{\lambda}$ et examiner

$$\begin{aligned}\frac{30}{\lambda} &= \cosh(\frac{a}{\lambda}) - 1\\ 30\,z + 1 &= \cosh(95\,z)\end{aligned}$$

Utiliser un plot des fonction ci-dessus pour lire la solution approximative $z \approx 0.006$ et donc $\lambda = \frac{1}{z} \approx \frac{1}{0.006} \approx 167$. Appliquer la méthode de Newton pour trouver $\lambda \approx 159$ et $a \approx 96.3$m. Trouver une solution à l'aide de *Octave*.

Octave

```
a0 = 100;
z  = linspace(0,0.01);
plot(z,30*z,z,cosh(a0*z)-1)
grid on
la0 = 1/0.006;

function y = ff(la)
  a = la*acosh(30/la+1)
  y = la*(cosh((200-a)/la)-1)-35
endfunction

fsolve('ff',la0)
```

♢

8.6.6 Méthode de Newton d'ordre supérieur

L'idée de base de la méthode de Newton pour résoudre

$$f\,(x) = 0$$

est de remplacer la fonction par une approximation linéaire

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$$

et de résoudre ensuite cette équation simple par rapport à x. On obtient la formule d'itération

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad .$$

Au lieu du point d'intersection de la courbe avec l'axe des x on cherche le point d'intersection de la tangente avec l'axe. Au lieu de la tangente, on peut utiliser une parabole avec la pente et la courbure ≪juste≫. Ce polynôme de Taylor de degré 2 donne l'équation quadratique pour x

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}\, f''\,(x_0)\; (x - x_0)^2 = 0 \; .$$

Cette équation quadratique pour l'inconnue $x - x_0$ a les solutions

$$x - x_0 = \frac{1}{f''\,(x_0)}\; \left(-f'\,(x_0) \pm \sqrt{(f'\,(x_0))^2 - 2f''\,(x_0) f\,(x_0)}\,\right)$$

Si x_0 est assez proche d'un zéro, $f''\,(x_0) \neq 0$, $f\,(x_0) \approx 0$, alors l'expression sous la racine est positive. Parce qu'on est proche du zéro, $x - x_0$ doit être petit et on peut choisir la ≪bonne≫ des deux solutions. On arrive à la formule d'itération

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{f''\,(x_n)}\; \left(-f'\,(x_n) + \text{sign}\,(f'\,(x_n))\; \sqrt{(f'\,(x_n))^2 - 2f''\,(x_n) f\,(x_n)}\,\right) \\ &= x_n + \frac{f'\,(x_n)}{f''\,(x_n)}\; \left(-1 + \sqrt{1 - 2\,\frac{f''\,(x_n)\, f\,(x_n)}{(f'\,(x_n))^2}}\,\right) \end{aligned}$$

8–61 Exemple : Pour résoudre l'équation

$$f\,(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x - 12 = 0$$

avec la méthode de Newton (standard) et la méthode ci–dessus on peut utiliser le code en *Mathematica* suivant.

Mathematica

```
Clear[x,f,df,newton];
f[x_] = x^4 + 2 x^3 + x^2 - 6x - 12;
df[x_] = D[f[x],x];
ddf[x_] = D[df[x],x];
newton[x_] = x- f[x]/df[x];
newton2[x_] = x- df[x] (1-Sqrt[ - 2 f[x] ddf[x]/(df[x]^2)])/ddf[x];
```

Voici le résultat pour sept itérations effectuées avec cette méthode de Newton modifiée. On a choisi $x_0 = 2$.

Mathematica

```
xi = 2 ; zi = xi;
Print[{0,N[xi,15]}];
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],15],
            zi=N[newton2[zi],15]}],{i,7}]
.
{0, 2.}
{1, 1.77777777777778, 1.72653900043606}
{2, 1.73367105232299, 1.73205084873673}
{3, 1.73205293271716, 1.73205080756888}
{4, 1.73205080757254, 1.73205080756888}
{5, 1.73205080756888, 1.73205080756888}
{6, 1.73205080756888, 1.73205080756888}
{7, 1.73205080756888, 1.73205080756888}
```

La méthode modifiée converge très rapidement. Après peu d'itérations le résultat ne change plus. Ce n'est pas un hasard. On peut montrer que l'ordre de convergence est (en général) égal à trois. ♢

A cause de l'exemple ci–dessus et de la convergence très rapide, on pourrait conclure que la méthode modifiée est préférable. Ce n'est pas le cas. Examiner les raisons suivantes.

1. La parabole (polynôme de Taylor de degrée 2) n'a pas de point d'intersection avec l'axe des x. L'expression sous la racine est negative et on devrait calculer avec des nombres complexes.

2. La méthode modifiée est très sensible au choix ≪propre≫ de la valeur initiale. Examiner l'exemple ci–dessus avec valeur initiale de 3, 4, ...

3. Le coût de calcul pour une itération peut être énorme et on est obligé de trouver la deuxième dérivée. Cet effort supplémentaire est souvent pas justifié par la convergence plus rapide.

4. La méthode standard de Newton est aussi utilisée pour des systèmes d'équations à plusieurs inconnues. La méthode modifiée est **beaucoup** plus difficile à adapter.

8.7 Interpolation und numerische Approximationen

Von einer Funktion kennt man in Anwendungen manchmal nur eine Tabelle von Werten, oder es ist praktisch zu schwierig, die Ableitung zu bestimmen. Zum Beispiel kann die Tabelle durch einige Messungen entstanden sein. Dann ist die analytische Definition

$$f'(x_0) = \lim_{h \to h} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

der Ableitung nutzlos. Man muss ein anderes Verfahren finden, um die Ableitung zumindest abschätzen zu können. Eng verbunden mit dieser Frage ist das Problem der **Interpolation**: aus einer Tabelle von Werten soll die Funktion „rekonstruiert“ werden.

Die hier vorgestellten Resultate bilden zum Beispiel die Grundlage für **numerische Integrationsverfahren**.

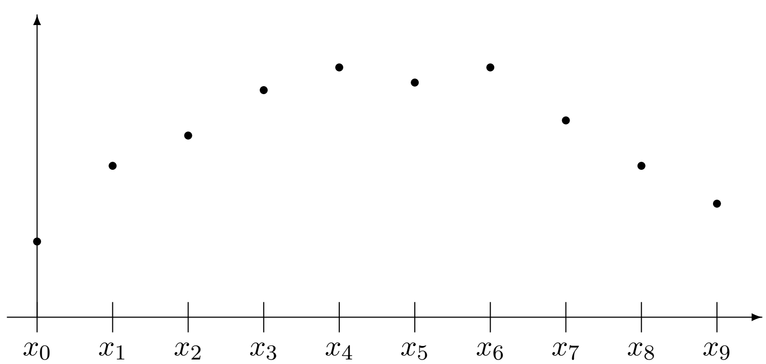


Figure 8.19: Funktion gegeben durch einige Werte

Von der Funktion $y = f(x)$ seien für ein festes h (typischerweise klein) die Werte

$$x_i = i\,h \quad \text{und} \quad y_i = f(x_i) \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

gegeben. Aus dem Kapitel über Polynome wissen Sie, dass es genau ein Polynom $P(x)$ vom Grad n gibt, das durch all diese Punkte geht. Dieses Polynom kann durch **Lagrange–** oder **Newton–Interpolation** gefunden werden. Ist allerdings n gross, d.h. viele Werte sind gegeben, so erhält man als Resultat ein Polynom von sehr hohem Grad. Dadurch kann es sehr schwierig werden, weiter zu rechnen. Um zum Beispiel den Funktionswert von $f(x)$ für ein x zwischen den x_i zu bestimmen, muss ein Polynom von hohem Grad ausgewertet werden, was mit viel Rechenaufwand verbunden ist.

Wir untersuchen nun zwei verschiedene Verfahren, den Wert von $f(x)$ abzuschätzen, indem nur wenige x_i in der Nähe von x verwendet werden. Ziel wird es sein, den Fehler, d.h den Unterschied zwischen dem wahren und geschätzen Wert, möglichst klein zu halten.

Sei dazu $y = f(x)$ eine oft differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, und wir verwenden die Notationen

$$\begin{aligned} M_1 &= \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \\ M_2 &= \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \\ M_k &= \max_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)| \end{aligned}$$

8.7.1 Lineare Interpolation

Die Grundidee dieses Verfahrens ist sehr einfach: um $f(x)$ abzuschätzen, nimmt man die rechts und links von x liegenden Werte x_i und x_{i+1} und legt eine Gerade durch diese zwei Punkte. Dann rechnet man den Funktionswert dieser Geraden aus. In Abbildung 8.19 werden je aufeinanderfolgende Punkte durch eine Gerade verbunden. Das gibt eine „neue“ Funktion $l(x)$. Die formale Definition von $l(x)$ ist gegeben durch

$$l(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) = \frac{(x - x_i)\, y_{i+1} + (x_{i+1} - x)\, y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{für} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

Diese Funktion heisst auch **stückweise lineare Interpolationsfunktion**.

Nun gilt es, die Differenz $f(x) - l(x)$ abzuschätzen.

8–62 Théorème : *Für genügend oft differenzierbare Funktionen $f(x)$ und ihre stückweise linearen Approximationen $l(x)$ gilt*

$$|\, f(x) - l(x)\,| \leq \frac{1}{8}\, M_2 h^2 + o(h^2)$$

für $x_i < x < x_{i+i}$ mit $h = x_{i+1} - x_i$.

Man sagt in dieser Situation auch, dass die Approximation quadratisch gegen die tatsächliche Funktion konvergiert, da eine Halbierung der Schrittweite h den Fehler typischerweise auf einen Viertel reduziert.

Der Beweis dieser wichtigen Aussage ist eine einfache Konsequenz des selben Resultates für die Standardsituation $x_i = -h/2$ und $x_{i+1} = h/2$.

8–63 Résultat : *Sei $f(x) \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $h > 0$ eine feste Zahl mit $y_{-1} = f(-h/2)$ und $y_1 = f(+h/2)$. Die Funktion $g(x)$ sei gegeben durch*

$$g(x) = \frac{y_{-1} + y_1}{2} + \frac{y_1 - y_{-1}}{h}\, x$$

Dann gilt

$$|\, f(x) - g(x)\,| \leq \frac{1}{8}\, M_2 h^2 + o(h^2)$$

für alle $|x| \leq h/2$.

Démonstration : Wir verwenden die Taylorpolynome

$$\begin{aligned} f(x) = &\quad f(0) + f'(0)\, x + \tfrac{1}{2!}\, f^{(2)}(0)\, x^2 + \tfrac{1}{3!}\, f^{(3)}(0)\, x^3 + o(x^3) \\ g(x) = &\quad g(0) + g'(0)\, x \end{aligned}$$

Da der Graph von g eine Gerade ist, treten keine Terme höherer Ordnung auf. Bestimmen wir y_{-1} und y_1 mittels der Taylorformel für $f(\pm h/2)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1 &= f(0) + \tfrac{1}{2}\, f'(0)\, h + \tfrac{1}{8}\, f^{(2)}(0)\, h^2 + \tfrac{1}{48}\, f^{(3)}(0)\, h^3 + o(h^3) \\ y_{-1} &= f(0) - \tfrac{1}{2}\, f'(0)\, h + \tfrac{1}{8}\, f^{(2)}(0)\, h^2 - \tfrac{1}{48}\, f^{(3)}(0)\, h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{y_{-1}+y_1}{2} = f(0) + \frac{1}{8}\, f''(0)\, h^2 + o(h^3) \\ g'(0) &= \frac{y_1 - y_{-1}}{h} = f'(0) + \frac{1}{24}\, f^{(3)}(0)\, h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

und

$$g(x) = \left(f(0) + \frac{1}{8}\, f''(0)\, h^2\right) + x\, \left(f'(0) + \frac{1}{24}\, f^{(3)}(0)\, h^2\right) + o(h^3)$$

Das ergibt für $|x| < |h/2|$

$$f(x) - g(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right)\, f''(0) + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x\, h^2}{24}\right)\, f^{(3)}(0) + o(h^2)$$

Wegen $|x| \leq h/2$ gilt

$$\left|\frac{x^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right| \leq \frac{h^2}{8}$$

und somit

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{8}\, M_2\, h^2 + o(h^2)$$

□

Wegen der Taylorapproximation

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)\, x + \frac{1}{2!}\, f^{(3)}(0)\, x^2 + \frac{1}{3!}\, f^{(4)}(0)\, x^3 + o(x^2)$$

gilt auch

$$f'(x) - g'(x) = f'(x) - g'(0) = f''(0)\, x + o(x)$$

oder auch

$$|\, f'(x) - \frac{f(-h/2) - f(h/2)}{h}\, | \leq \frac{1}{2}\, M_2\, h + o(h)$$

für $-h/2 < x < h/2$. Somit haben wir für kleine Werte von h eine brauchbare Approximation der Ableitung der Funktion.

Man kann leicht feststellen, dass die Approximation der Ableitung für beliebige Polynome vom Grad 1 exakt ist. Für Polynome vom Grad 2 ist der Fehler von der Ordnung h.

8–64 Exemple : Auf dem Intervall $[0, \pi]$ sind $n+1$ Punkte $x_i = i\,\pi/n$ gleichmässig verteilt, und für jeden Punkt wird $y_i = \sin x_i$ tabelliert. Zwischen diesen Punkten wird durch Geradenstücke interpoliert. Wie viele Punkte sind zu wählen, damit der Fehler kleiner als 10^{-3} ist?

Solution: Für diese einfache Funktion sieht man leicht, dass $M_2 = 1$. Somit gilt für den Interpolationsfehler

$$|\, f(x) - l(x)\, | \leq \frac{1}{8}\, h^2 + o(h^2)$$

Da h auf alle Fälle klein sein wird, ignorieren wird den Term $o(h^2)$. Damit der Fehler sicher klein genug ist, muss gelten

$$\frac{1}{8}\, h^2 \leq 10^{-3}.$$

Wegen $h = \pi/n$ ergibt das die Bedingung

$$\frac{1}{8}\, 10^3 \pi^2 \leq n^2.$$

Das führt auf $n \geq 35.124$, und somit ist $n = 36$ geeignet. ♢

8.7.2 Quadratische Interpolation

Wir versuchen, durch drei gegebene Funktionswerte eine passende Parabel zu legen. Die einfachstmögliche Situation ist

$$f(-h) = y_{-1} \quad , \quad f(0) = y_0 \quad , \quad f(h) = y_1$$

Die allgemeine Formel für eine Parabel ist

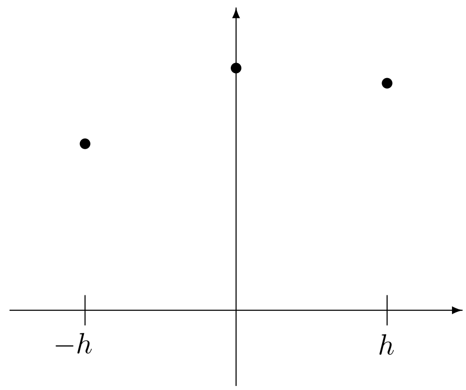


Figure 8.20: Interpolation durch eine Parabel

$$p(x) = a + b\,x + c\,x^2$$

Nun gilt es, die Konstanten a, b und c zu bestimmen, abhängig von h und den drei y_i. Setzt man der Reihe nach $x = -h,\ 0$ und h, so erhält man die drei Gleichungen

$$\begin{array}{rcccccc} y_{-1} = & a & - & b\,h & + & c\,h^2 \\ y_0 = & a & + & b\,0 & + & c\,0 \\ y_1 = & a & + & b\,h & + & c\,h^2 \end{array}$$

Daraus kann man ohne lange Rechnung die Lösungen

$$a = y_0 \quad , \quad b = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \quad , \quad c = \frac{y_{-1} - 2\,y_0 + y_1}{2h^2}$$

ablesen.

8–65 Résultat : *Sei $f(x) \in C^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $h > 0$ eine feste Zahl mit $y_{-1} = f(-h)$, $y_0 = f(0)$ und $y_1 = f(+h)$. Die Funktion $p(x)$ sei durch die obige Formel gegeben. Dann gilt*

$$|\, f(x) - p(x)\,| \leq \frac{1}{6}\, M_3 h^3 + o(h^3)$$

für alle $|x| \leq h$.

Man sagt in dieser Situation auch, dass die Approximation von dritter Ordnung ist, da eine Halbierung der Schrittweite h den Fehler typischerweise auf einen Achtel reduziert.

Die Formulierung und der Beweis dieser Aussage sind analog zur selben Aussage für die Interpolation durch eine Gerade. Der **wesentliche Unterschied** liegt in der höheren Ordnung (h^3 statt h^2) des Approximationsfehlers. Diese höhere Konvergenzordnung rechtfertigt bei den meisten Anwendungen den etwas grösseren Rechenaufwand durch die Interpolation durch Parabelstücke statt Geradenstücke.

Beim Problem der numerischen Integration von Funktionen führt die Approximation durch Geraden zur **Trapezregel** und die Approximation durch Parabelstücke zur **Regel von Simpson**.

Démonstration : Wir verwenden die Taylorpolynome

$$\begin{aligned} f(x) = &\quad f(0) + f'(0)\,x + \tfrac{1}{2!}\,f^{(2)}(0)\,x^2 + \tfrac{1}{3!}\,f^{(3)}(0)\,x^3 + o(x^3) \\ p(x) = &\quad a + b\,x + c\,x^2 \end{aligned}$$

Bestimmen wir y_{-1} und y_1 mittels der Taylorformel für $f(\pm h)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1 &= f(0) + f'(0)\,h + \tfrac{1}{2}\,f^{(2)}(0)\,h^2 + \tfrac{1}{6}\,f^{(3)}(0)\,h^3 + o(h^3) \\ y_{-1} &= f(0) - f'(0)\,h + \tfrac{1}{2}\,f^{(2)}(0)\,h^2 - \tfrac{1}{6}\,f^{(3)}(0)\,h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} p(0) &= a = f(0) \\ p'(0) &= b = \tfrac{1}{2h}\,(y_1 - y_{-1}) = f'(0) + \tfrac{1}{6}\,f^{(3)}(0)\,h^2 + o(h^2) \\ p''(0) &= 2\,c = \tfrac{1}{h^2}\,(y_1 - 2\,y_0 + y_{-1}) = f''(0) + o(h) \end{aligned}$$

Das ergibt

$$p(x) = a + b\,x + c\,x^2 = f(0) + x\left(f'(0) + \frac{1}{6}\,f^{(3)}(0)\,h^2\right) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x\,h^2) + o(x^2\,h)$$

und für $|x| \leq h$

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{6}\,f^{(3)}(0)\,x^3 - \frac{1}{6}\,f^{(3)}(0)\,h^2\,x + o(h^3)$$

Wegen $|x| \leq h$ gilt

$$|x^3 - h^2\,x| \leq h^3$$

(man kann das sogar noch etwas verbessern) und somit

$$|\;f(x) - p(x)\;| \leq \frac{1}{6}\,M_3\,h^3 + o(h^3)$$

woraus die Behauptung folgt. □

Wegen den Taylorapproximationen

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(0) + f''(0)\,x + \tfrac{1}{2!}\,f^{(3)}(0)\,x^2 + \tfrac{1}{3!}\,f^{(4)}(0)\,x^3 + o(x^2) \\ p'(x) &= p'(0) + p''(0)\,x \end{aligned}$$

und

$$f(0) = p(0) \quad , \qquad f'(0) = p'(0) \quad , \qquad f''(0) = p''(0)$$

gilt auch

$$f'(x) - p'(x) = \frac{1}{2}\,f^{(3)}(0)\,x^2 + o(x^2)$$

und

$$|\;f'(x) - p'(x)\;| \leq \frac{1}{2}\,M_3\,h^2 + o(h^2)$$

für $-h/2 < x < h/2$. Somit haben wir für kleine Werte von h eine brauchbare Approximation der Ableitung der Funktion.

Man kann leicht feststellen, dass die Approximation der Ableitung für beliebige Polynome vom Grad 2 exakt ist. Für Polynome vom Grad 3 ist der Fehler von der Ordnung h^2.

8–66 Exemple : Auf dem Intervall $[0, \pi]$ sind $n+1$ Punkte $x_i = i\,\pi/n$ gleichmässig verteilt, und für jeden Punkt wird $y_i = \sin x_i$ tabelliert. Zwischen diesen Punkten wird durch Parabelstücke interpoliert. Wie viele Punkte sind zu wählen, damit der Fehler kleiner als 10^{-3} ist?

Solution: Für diese einfache Funktion sieht man leicht, dass $M_3 = 1$. Somit gilt für den Interpolationsfehler

$$|\,f(x) - p(x)\,| \leq \frac{1}{6}\,h^3 + o(h^3)$$

Da h auf alle Fälle klein sein wird, ignorieren wird den Term $o(h^3)$. Damit der Fehler sicher klein genug, ist muss gelten

$$\frac{1}{6}\,h^3 \leq 10^{-3}.$$

Wegen $h = \pi/n$ ergibt das die Bedingung

$$\frac{1}{6}\,10^3\pi^3 \leq n^3.$$

Das führt auf $n \geq 17.29$ und somit $n = 18$.

Bei Interpolation durch Geradenstücke waren für die selbe Genauigkeit noch mindestens 35 Teilpunkte notwendig. Verlangt man ein noch genaueres Resultat, so wird der Unterschied zwischen linearer und quadratischer Interpolation noch grösser. ♢

8.8 Kubische Spline–Interpolation

Dieser Abschnitt ist im wesentlichen aus [MeybVach90, p.135] übernommen. Das vorgestellte Verfahren ist auch in [Bron93, p. 636] beschrieben. Dort finden Sie auch eine kurze Beschreibung des Verfahrens von Bézier. Damit kann man eine parametrisierte Kurve $(x(t), y(t))$ durch gegebene Punkte (x_i, y_i) legen. y muss aber nicht als Funktion von x darstellbar sein. Diese Idee ist in [Bon91] illustriert. Wir geben hier ein einfaches Beispiel und kommentarlos den zugehörigen *Mathematica*–Code

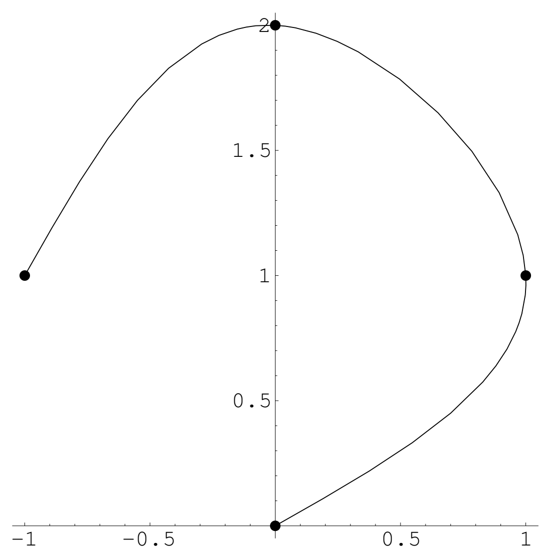


Figure 8.21: Parametrische Spline–Interpolation

Mathematica

```
Needs["Graphics`Spline`"]
npts = {{0,0},{1,1},{0,2},{-1,1}};
ptplot = Graphics[{PointSize[0.02],Map[Point , npts]}];
Show[ptplot ,
      Graphics[Spline[npts ,Cubic]] ,
     Axes -> True ,
     AspectRatio -> Automatic ,
     PlotRange -> All]
```

Wir wollen nur den einfacheren Fall untersuchen, wo y als Funktion von x gegeben sein muss. Wir suchen eine „einfache“ Funktion, wobei die abhängige Variable y von einer Variablen x abhängt.

8.8.1 Definition einer kubischen Spline–Funktion

Im Kapitel über Polynome haben wir gesehen, dass durch $n+1$ Punkte $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ genau ein Polynom $p(x)$ vom Grad n gepasst werden kann. Die Koeffizienten dieses Polynoms können durch die Verfahren von Lagrange oder Newton bestimmt werden. Das Resultat kann zu starken Schwankungen des Interpolationspolynoms zwischen den vorgegebenen Werten führen (siehe Abbildung 8.22). Die **Spline–Interpolation** führt zu Kurven, die möglichst „sanft“ durch die Punkte hindurchgehen. Legt man durch die gegebenen Punkte ein dünnes, elastisches Lineal (Englisch: spline), so wird seine Biegelinie durch dieses kubische Splinepolynom beschrieben.

8–67 Définition : Zu $n+1$ Stützpunkten (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$ mit

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

heisst die Funktion $y = s(x)$ eine **kubische Spline–Funktion**, wenn sie folgenden drei Eigenschaften erfüllt

1. $s(x_i) = y_i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$
2. s ist zwei mal differenzierbar und die zweite Ableitung ist stetig, d.h. $s \in C^2$.
3. auf jedem Teilintervall $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ist s ein Polynom vom Grad ≤ 3. Die Koeffizienten des Polynoms hängen typischerweise vom Teilintervall ab.

8.8.2 Der Ansatz

Zu den gegebenen Punkten (x_i, y_i) betrachten wir Polynome

$$s_i(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

mit noch unbekannten Koeffizienten b_i, c_i, d_i und setzen

$$s(x) = s_i(x) \quad \text{falls} \quad x_i \leq x < x_{i+1}$$

Hierfür gilt bereits $s(x_i) = y_i$.

8.8.3 Die Berechnung der Koeffizienten

(a) Damit die Funktion s auf dem ganzen Intervall stetig ist, muss

$$\lim_{x\to x_{i+1}-} s(x) = s_i(x_{i+1}) = s(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

gelten. Mit der Notation

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

führt das auf die Gleichungen

$$y_i + b_i\, h_i + c_i\, h_i^2 + d_i\, h_i^3 = y_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

oder auch

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - c_i\, h_i - d_i\, h_i^2$$

(b) Damit die Funktion s auf dem ganzen Intervall stetig differenzierbar ist, muss

$$\lim_{x\to x_{i+1}-} s'(x) = s_i'(x_{i+1}) = s'(x_{i+1}) = b_{i+1}$$

gelten. Das führt auf die Gleichungen

$$b_i + 2\, c_i\, h_i + 3\, d_i\, h_i^2 = b_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-2$$

oder auch

$$b_{i-1} + 2\, c_{i-1}\, h_{i-1} + 3\, d_{i-1}\, h_{i-1}^2 = b_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

(c) Damit die zweite Ableitung der Funktion s auf dem ganzen Intervall stetig ist muss

$$\lim_{x\to x_{i+1}-} s''(x) = s_i''(x_{i+1}) = s''(x_{i+1}) = 2\, c_{i+1}$$

gelten. Das führt auf die Gleichungen

$$2\, c_i + 6\, d_i\, h_i = 2\, c_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

oder auch

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

Setzen wir die letzte der obigen Gleichungen in die erste ein, so ergibt sich

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - c_i\, h_i - d_i\, h_i^2 = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - c_i\, h_i - \frac{c_{i+1} - c_i}{3}\, h_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2c_i + c_{i+1}}{3}\, h_i$$

Diese Gleichung kann nun in der zweiten eingesetzt werden, und wir erhalten

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2c_{i-1} + c_i}{3}\, h_{i-1} + 2\, c_{i-1}\, h_{i-1} + (c_i - c_{i-1})\, h_{i-1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2c_i + c_{i+1}}{3}\, h_i$$

oder auch

$$c_{i-1}\, h_{i-1} + c_i\, 2\,(\, h_i + h_{i-1}) + c_{i+1}\, h_i = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$$

Diese Gleichung muss für $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ richtig sein. Somit haben wir $n-1$ Gleichungen für die $n+1$ Unbekannten $c_0, , c_1, \ldots, c_n$. Gibt man aber c_0 und c_n vor, so wird das System von linearen Gleichungen eindeutig lösbar. Die speziell einfache Wahl von $c_0 = c_n = 0$ führt dazu, dass die Kurve mit Krümmung 0 in die Punkte (x_0, y_0) und (x_n, y_n) einmündet. Es ergibt sich mit der Matrixnotation und der Abkürzung

$$f_i = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$$

das Systen von Gleichungen

$$\begin{bmatrix} 2\,(h_1 + h_0) & h_1 & & & \\ h_1 & 2\,(h_2 + h_1) & h_2 & & \\ & h_2 & 2\,(h_3 + h_2) & h_3 & \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ & & & h_{n-2} & 2\,(h_{n-1} + h_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dieses **tridiagonale** System von linearen Gleichungen kann mit numerischen Verfahren leicht und schnell nach den Unbekannten c_i aufgelöst werden, und daraus können wir mittels

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \\ b_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - c_i\,h_i - d_i\,h_i^2 \end{aligned}$$

auch die Koeffizienten d_i und b_i bestimmen.

Dieser lange Rechenweg lässt sich leicht auf Computern und Taschenrechnern ausführen.

8.8.4 Zur Wahl von c_0 und c_n

Man kann zeigen, dass mit $c_0 = c_n = 0$ für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $g\,(x)$, welche durch die gegebenen Punkte gehen, folgende Ungleichung gilt:

$$\int_{x_0}^{x_n} (s''\,(x))^2\,dx \leq \int_{x_0}^{x_n} (g''\,(x))^2\,dx$$

Fragestellungen dieser Art führen in das Gebiet der **Variationsrechnung**.

8.8.5 Ein vollständig durchgerechnetes Beispiel

Gesucht ist die kubische Spline–Funktion, welche durch die Punkte

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
y_i	0	0	0	1	0	0	0

geht. In diesem Beispiel ist $n = 6$ und $h_i = 1$, und wir erhalten

$$f_i = 3\,(y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1})$$

und somit das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit dem Lösungsvektor

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.34615 \\ 1.38462 \\ -2.19231 \\ 1.38462 \\ -0.34615 \end{pmatrix}$$

Mittels der Formeln

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{c_{i+1} - c_i}{3} \\ b_i &= y_{i+1} - y_i - c_i - d_i \end{aligned}$$

und $c_0 = c_6 = 0$ ergeben sich die Vektoren

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.11538 \\ 0.57692 \\ -1.19231 \\ 1.19231 \\ -0.57692 \\ 0.11538 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.11538 \\ -0.23077 \\ 0.80769 \\ 0 \\ -0.80769 \\ 0.23077 \end{pmatrix}$$

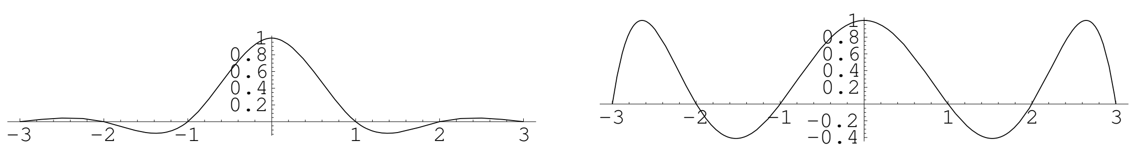


Figure 8.22: Spline– und Polynom–Interpolation

Diese Resultate wurden mit MATLAB durch die untenstehenden Befehle erzeugt.

Matlab

```
a=[
4 1 0 0 0
1 4 1 0 0
0 1 4 1 0
0 0 1 4 1
0 0 0 1 4];
y=[0 0 0 1 0 0 0];
f=[0 3 -6 3 0];

c= f/a;
c=[0 c 0]
d= (c(2:7)-c(1:6))/3
b= y(2:7) - y(1:6) - c(1:6) - d(1:6)

test1= y(1:6)+b+d+ c(1:6)-y(2:7)
test2= b(1:5) + 2*c(1:5) + 3*d(1:5) - b(2:6)
test3= c(1:6) + 3*d - c(2:7)
```

Die letzten drei Zeilen verifizieren, dass die drei Systeme von Gleichungen in Abschnitt 8.8.3 tatsächlich erfüllt sind. Die Rechnungen führen auf die Tabelle der Koeffizienten

i	0	1	2	3	4	5
x	$-3 \leq x < -2$	$-2 \leq x < -1$	$-1 \leq x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$
y_i	0	0	0	1	0	0
b_i	0.11538	-0.23077	0.80769	0	-0.80769	0.23077
c_i	0	-0.34615	1.38462	-2.19231	1.38462	-0.34615
d_i	-0.11538	0.57692	-1.19231	1.19231	-0.57692	0.11538

Aus dieser Tabelle können wir nun die verschiedenen Stücke des kubischen Spline–Polynoms herauslesen als

$$\begin{array}{llllllll}
s(x) = s_0(x) = & 0 & +0.11538\,(x+3) & & -0.11538\,(x+3)^3 & \text{für} & -3 \leq x \leq -2 \\
s(x) = s_1(x) = & 0 & -0.23077\,(x+2) & -0.34615\,(x+2)^2 & +0.57692\,(x+2)^3 & \text{für} & -2 \leq x \leq -1 \\
s(x) = s_2(x) = & 0 & +0.80769\,(x+1) & +1.38462\,(x+1)^2 & -1.19231\,(x+1)^3 & \text{für} & -1 \leq x \leq 0 \\
s(x) = s_3(x) = & 1 & & -2.19231\,(x+0)^2 & +1.19231\,(x+0)^3 & \text{für} & 0 \leq x \leq 1 \\
s(x) = s_4(x) = & 0 & -0.80769\,(x-1) & +1.38462\,(x-1)^2 & -0.57692\,(x-1)^3 & \text{für} & 1 \leq x \leq 2 \\
s(x) = s_5(x) = & 0 & +0.23077\,(x-2) & -0.34615\,(x-2)^2 & +0.11538\,(x-2)^3 & \text{für} & 2 \leq x \leq 3
\end{array}$$

Die Abbildung 8.22 vergleicht das Resultat der stückweisen Spline–Interpolation mit dem direkten Interpolationspolynom vom Grade 6

$$p(x) = \frac{-1}{36}\,(x+3)\,(x+2)\,(x+1)\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$$

8.8.6 Ein zweites Beispiel

Als sehr vergleichbares Beispiel suchen wir das Spline–Polynom durch die Punkte

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
y_i	0	0	0	0	1	0	0	0	0

Die Rechnungen sind analog zum vorangehenden Abschnitt, und hier sei nur der *Mathematica*–Code gezeigt, der verwendet wird, um das Polynom zu zeichnen. Die Graphik ist mit dem Resultat einer einfachen Lagrange–Interpolation

$$p(x) = \frac{-1}{576}\,(x+4)\,(x+3)\,(x+2)\,(x+1)\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)$$

zu vergleichen.

Mathematica

```
Needs["Graphics`Spline`"]
pts={{-4,0},{-3,0},{-2,0},{-1,0},{0,1},{1,0},{2,0},{3,0},{4,0}};
Show[Graphics[Spline[pts,Cubic]],
     Axes -> True,AspectRatio -> Automatic]
```

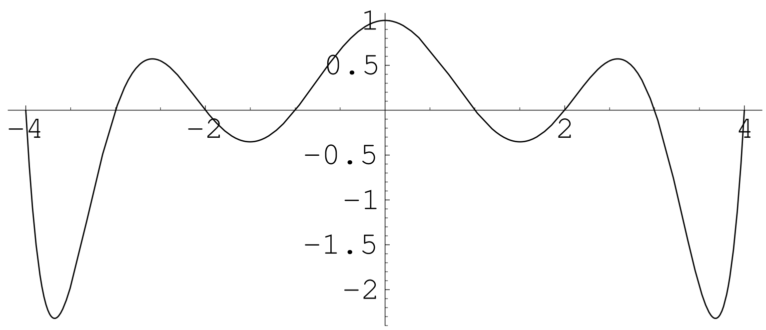


Figure 8.23: Polynom–Interpolation durch 9 Stützpunkte

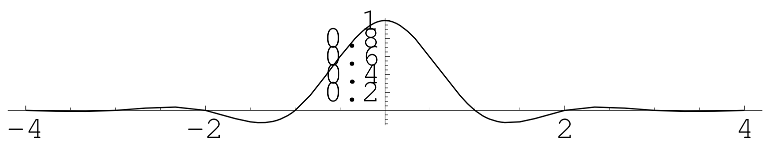


Figure 8.24: Spline–Interpolation durch 9 Stützpunkte

8.9 Exercices

8.9.1 Problèmes d'optimisation

• Problème 8–1:
Une balle est lancée verticalement vers le haut. La hauteur, comme fonction du temps, est calculée selon la formule

$$h(t) = 5 + 35t - 5t^2$$

Calculer la hauteur maximale et le moment où celle-ci est atteinte.

• Problème 8–2:
Résistance d'une poutre

On veut tailler dans un rondin cylindrique une poutre de section rectangulaire de sorte que son moment de résistance $W = bh^2/6$ soit maximale .

(r rayon du rondin, b largeur de la poutre, h hauteur de la poutre)

• Problème 8–3:
La figure 8.25 montre une poutre de section quadratique qui est suspendue. Nous admettons que le bord inférieur est horizontal et que le câble glisse sans friction au point P . Chercher l'angle résultant. Cet angle est caractérisé par la condition que le centre de gravité se trouve le plus bas possible.

(a) Représenter la hauteur du centre de gravité de la poutre comme fonction de l'angle w, de la largeur de la poutre b et de la longueur totale L du câble.

(b) Trouver l'angle optimal w et la hauteur correspondante de la poutre.

• Problème 8–4:
Deux sources lumineuses, dont une est 8 fois plus forte que l'autre, se trouve à une distance de 40 m. L'itensité I à un point se trouvant à x mètres de la source la plus forte est calculée selon la formule

$$I = \frac{8}{x^2} + \frac{1}{(40-x)^2}$$

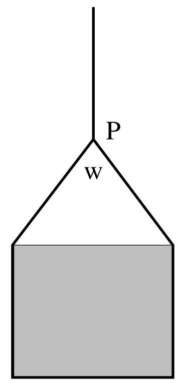


Figure 8.25: Poutre suspendue

Trouver le point entre les sources lumineuses où l'intensité est minimale.

• Problème 8–5:
L'équation

$$y = k\,(16\,x^4 - 12\,L\,x^3 + L^2\,x^2) \qquad ,$$

où k est une constante, décrit la déformation d'une poutre de longueur L comme fonction de la distance x d'un extrémité. Pour quelle valeur de x la déformation est-elle maximale?

• Problème 8–6:
Quel nombre surpasse le plus son carré?

• Problème 8–7:
Déterminer deux nombres dont la somme est égale à 110 et dont le produit est maximal.

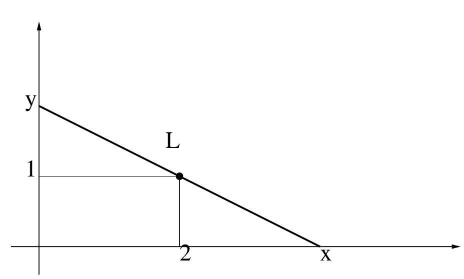
• Problème 8–8:
Un fil de longueur de 50 cm doit être coupé en deux parties. Avec l'une on forme un cercle et avec l'autre un carré. Où faut-il couper le fil pour que l'aire totale des deux figures construites soit maximale?

• Problème 8–9:
Un jardin rectangulaire ($12m^2$) doit être clôturé. Un côté est contigu à la maison et ne nécessite donc pas de clôture. Comment doit-on choisir la longueur et la largeur du jardin afin que la longueur de la clôture soit minimale?

• Problème 8–10:
Une section de longueur L d'une droite connecte l'axe des x avec l'axe des y et passe par le point $(2\,,\,1)$.

(a) Exprimer la longueur L comme fonction de x.

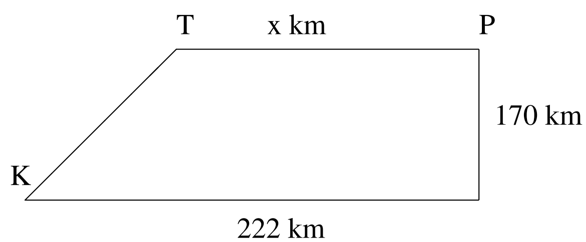
(b) Comment choisir x tel que la longueur L de cette section de la droite soit minimale?
Tip: garder des facteurs communs.



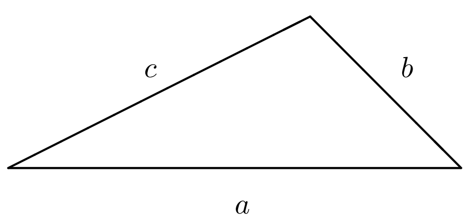
• Problème 8–11:
Les kiwis sont cueillis à la plantation K et sont à transporter rapidement au fleuve avec des mulets ($v_M = 4\frac{km}{h}$) et depuis là avec un bateau ($v_B = 11\frac{km}{h}$) à la ville P sur la côte.

(a) Quelle est la durée du transport si l'on construit le port de transbordement T à une distance de cent kilomètres de P ($x = 100km$).

(b) Où est-ce qu'on devrait construire le port T pour que la durée du transport soit minimale ($x =$?)? Quelle est la durée du transport pour ce chemin idéal?



• Problème 8–12:
Examiner un triangle avec base fixe a et de circonférence fixe $2\,L$. Montrer que l'aire A du triangle est maximale pour un triangle isocèle $b = c$.
Tip: formule de Héron pour l'aire

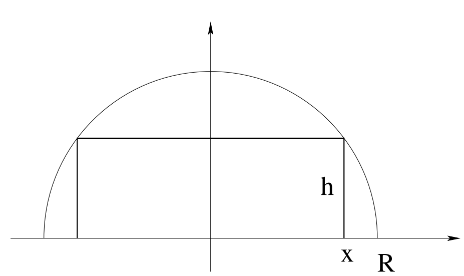


$$2\,L = a + b + c$$

$$A = \sqrt{L\,(L-a)\,(L-b)\,(L-c)}$$

• Problème 8–13:

Pour la figure à droite on applique une rotation par rapport à l'axe verticale. On obtient une demie boule avec un cylindre à l'intérieur. Le rayon R est donné. Rendre des résultats **exacte**.



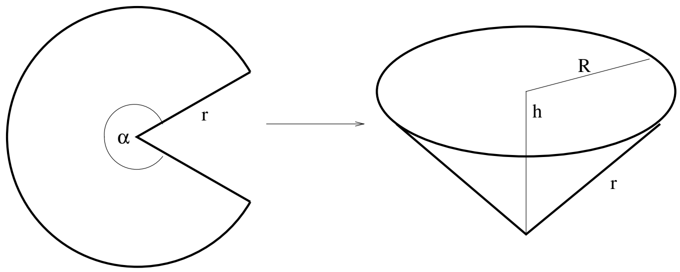
(a) Pour quelle valeur de x le volume du cylindre est–il maximal?

(b) Calculer le rapport du volume maximal du cylindre et la demie boule.

• Problème 8–14:
Une vendeuse de frites fabrique des cornets de forme conique en rejoignant les bords rectiligne d'un secteur circulaire de rayon r .

(a) Exprimer le volume V comme fonction de l'angle d'ouverture α.

(b) Comment doit-elle choisir l'angle d'ouverture α afin que le volume des cornets soit maximal?



• Problème 8–15:
Un chauffe-eau cylindrique se compose d'un fond en cuivre et de côtés latéraux en étain. Il est ouvert en haut. Le volume doit être au minimum égal à 0.8 m^3 . Le prix de l'étain est de 70 Fr./m^2 et le prix du cuivre de 164 Fr./m^2 . Quelles mesures donnent le chauffe-eau le meilleur marché?

• Problème 8–16:
Un ligne de téléphone doit traverser une rivière de 20 m de large et doit ensuite rejoindre le réseau principal à 70 m en aval. Le coût du mètre de la partie au-dessus de la rivière est trois fois celui de la partie sur terre. Afin de minimiser les coûts, le câble traverse la rivière en biais et atteint l'autre bord x mètres en aval. Déterminer x .

• Problème 8–17:
Nous considérons deux sources lumineuses de la même intensité qui sont installées au plafond à une distance de 5 m l'une de l'autre. L'intensité à un endroit est proportionnelle à la puissance de la source et inversement proportionnelle au carré de la distance.

(a) Examiner l'intensité 2 m en-dessous du plafond. Où l'intensité est-elle maximale?

(b) Examiner l'intensité 5 m en-dessous du plafond. Où l'intensité est-elle maximale?

• Problème 8–18:
Considérons un tronc de cône droit de hauteur $h = 1/2$, de rayon de base 1 et de rayon de couvercle $0 \leq x \leq 1$.

(a) Calculer la surface latérale A comme fonction de x. Tuyau: règle de Guldin (Pappus).

(b) Trouver de façon exacte la valeur maximale et minimale de la surface latérale.

(c) Calculer $A(0)$ et $A(1)$, puis dessiner $A(x)$ le plus précisément possible.

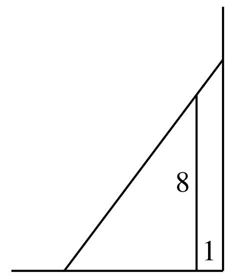
• Problème 8–19:
Toutes les tangentes à la courbe $y = 2/x$ pour $x > 0$ coupent l'axe des x et l'axe des y . Trouver la tangente dont le segment entre les deux axes soit minimum.

(a) Calculer le plus possible analytiquement.

(b) Dès que nécessaire calculer numériquement (HP–48).

• Problème 8–20:

Une palissade de 8 m de haut longe le mur d'un haut batiment à une distance de 1 m. Quelle longueur doit avoir au minimum une échelle pour qu'elle puisse reposer sur le mur par-dessus la palissade. Indication: Faire usage de triangles semblables.



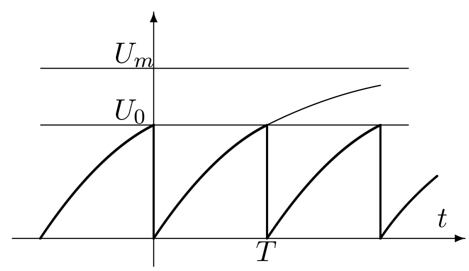
• Problème 8–21:
La section d'un tunnel a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. L'aire de la section A est donnée. Quelle est la largeur du tunnel afin que le périmètre devienne minimale?

• Problème 8–22:

Un condensateur est chargé sur une résistance. La tension est donnée par la formule

$$U\,(t) = U_m\,\left(1 - e^{-\alpha\,t}\right) .$$

A l'instant T la tension $U\,(T)$ atteint la valeur critique $U_0 < U_m$ et la tension est remise à 0 par un élément actif. Le processus de chargement recommence. On obtient un signal de période T.



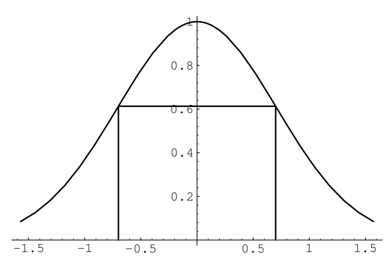
Les grandeurs U_m et T sont fixes et sont données. Les grandeurs U_0 et α peuvent être variées.

(a) Le temps T devrait être insensible aux petites variations (par exemple, effets de température) de U_0. Vérifier que cette condition soit satisfaite si la pente de la courbe de tension $U(t)$ est maximale en $t = T$.

(b) Déterminer les valeurs optimales de α et de U_0.

• Problème 8–23:

Construire un rectangle sous la courbe $y = e^{-x^2}$, comme dans la figure à droite.
Où doit-on mettre les points de base du rectangle pour que la surface soit maximale? Calculer la surface maximale. Vérifier qu'on a un maximum (local).



• Problème 8–24:
Les constantes a et b sont positives. Examiner la fonction

$$f(x) = a\,x\,e^{-b\,x} .$$

(a) La fonction atteint un maximum au point $(1, 2)$. Trouver les valeurs des constantes a et b.

(b) Trouver la coordonnée x du point d'inflexion.

8.9.2 Etude d'une fonction

• Problème 8–25:
Trouver (si possible) les zéros, les extrema et les points d'inflexion de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}\ .$$

Déterminer ensuite les valeurs de la fonction en ces endroits. Dessiner ensuite le graphe.

• Problème 8–26:
Trouver (si possible) les zéros, les extrema et les points d'inflexion de la fonction

$$f(x) = \frac{6x^2}{1+x^4}\ .$$

Déterminer ensuite les valeurs de la fonction en ces endroits. Dessiner ensuite le graphe.

• Problème 8–27:
Trouver (si possible) les zéros, les extrema et les points d'inflexion de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}\ .$$

Déterminer ensuite les valeurs de la fonction en ces endroits. Dessiner ensuite le graphe.

• Problème 8–28:
Examiner la fonction $y(x) = e^{-x^2/2}(1-x^2)$.

(a) Déterminer tous les zéros et les pentes aux zéros.

(b) Déterminer tous les points critiques et calculer les limites $y(x)$ pour $x \to \pm\infty$.

(c) Dessiner le graphe de cette fonction à l'aide des valeurs déterminées ci-dessus.

• Problème 8–29:
Trouver (si possible) les zéros, les extrema et les points d'inflexion de la fonction

$$f(x) = \frac{4x^2-8x}{(1+x^2)(x-2)}$$

Déterminer ensuite les valeurs de la fonction en ces endroits. Dessiner ensuite le graphe.

• Problème 8–30:
Examiner la fonction

$$f(x) = x^5 - 5\,x^3$$

(a) Trouver tous les zéros et tous les points critiques. Décider s'il s'agit d'un maximum, minimum ou un point de selle.

(b) Trouver la position exacte de tous les points d'inflexion.

(c) Dessiner le graphe qualitativement et quantitativement correctement à l'aide des informations ci-dessus.

Tous les calculs doivent être effectués **exactement.** La calculatrice ne doit être utilisée que pour contrôler les résultats.

• Problème 8–31:
Trouver (si possible) les zéros, les extrema et les points d'inflexion de la fonction

$$f(x) = -\frac{(x-1)^2}{1+x}$$

Déterminer ensuite les valeurs de la fonction en ces endroits. Dessiner ensuite le graphe.

• Problème 8–32:
Trouver tous les points spéciaux (extremums, points d'inflexion) du graphe de la fonction ci–dessous. Puis dessiner le graphe. A résoudre sans calculatrice et donner des valeurs exactes.

$$f(x) = 10 + 2\,x^2 - x^4$$

• Problème 8–33:
Trouver (si possible) les zéros, les extrema et les points d'inflexion de la fonction

$$f(x) = \left(x^2\right)^x \ .$$

Déterminer ensuite les valeurs de la fonction en ces endroits. Dessiner ensuite le graphe. Une solution complète de cet exercice est donnée dans [Blum84, p. 13].

• Problème 8–34:
Considérer pour $\lambda > 0$ la fonction dépendant d'un paramètre

$$f_\lambda(x) = \cosh(x) + \frac{\lambda}{1+x^2}$$

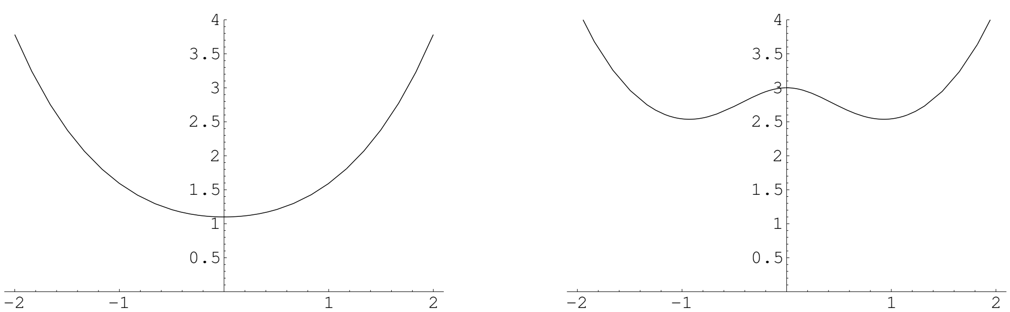


Figure 8.26: Graphe de la fonction $f_\lambda(x) = \cosh(x) + \frac{\lambda}{1+x^2}$ pour $\lambda = 0.1$ et $\lambda = 2$

Pour quelle valeur de λ la fonction change-t-elle son comportement qualitatif de gauche à droite dans la Figure 8.26?

• Problème 8–35:
Le polynôme

$$f(x) = \frac{1}{4}\,x^4 - \frac{4}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + a\,x + b$$

possède un extremum en $x = 3$ et on a $f(0) = 2$. Les calculs de cet exercice doivent être effectués exactement sans utiliser une calculatrice.

(a) Déterminer les valeurs des paramètres a et b.

(b) Décider si la fonction admet un maximum ou un minimum en $x = 3$.

(c) Trouver la position, la valeur de la fonction et le type des autres extrema.

(d) Esquisser le graphe de cette fonction pour $-2 \leq x \leq 4$ à l'aide des extrema et à l'aide du comportement pour $x \to \pm\infty$.

• Problème 8–36:
Une boule bouge dans le plan suivant l'axe des x avec $x(t) = v \cdot t$. L'observateur est au point $P = (3\,,\,-2)$ et soit $\alpha(t)$ l'angle entre l'axe des y est la direction sous laquelle la boule est visible.

(a) Trouver la vitesse angulaire $\dot{\alpha}(t)$

(b) Trouver l'accélération angulaire $\ddot{\alpha}(t)$

(c) Esquisser les graphes des fonctions $\dot{\alpha}(t)$ et $\ddot{\alpha}(t)$.

8.9.3 Dérivée implicite

• Problème 8–37:
Le point $(x, y) = (2, -3)$ se trouve sur la courbe $y^4 - x^3 - 2\,y^2 + x - c = 0$, où le paramètre c doit être déterminé. Déterminer la pente de la courbe en ce point.

• Problème 8–38:
Déterminer la dérivée de la fonction $y\,(x) = \arccos x$ à l'aide de la dérivée implicite.

• Problème 8–39:
Soit f et g deux fonctions avec le domaine de définition $\mathbb{R}$ satisfaisant la relation

$$g^2\,(x) + f^2\,(x) = 1$$

Supposons qu'on a

$$g'(x) = f(x)$$

Déduisez-en $f'\,(x)$, si $f\,(x) \neq 0$

• Problème 8–40:
Le point $(1, 1)$ se trouve sur la courbe

$$e^{x-1} + y^2 + y^5 - 3x^2 = 0$$

(a) Trouver l'équation de la tangente à la courbe en ce point.

(b) Trouver une bonne approximation de la valeur de x sur la courbe avec $y = 1.1$.

• Problème 8–41:
Considérer la courbe

$$(x+1)^3 + \tan\,(y/4) - 2y = 2 - 2\pi$$

$y = \pi$ est un point d'intersection avec l'axe des y. Trouver l'angle entre cette courbe et l'axe des y.

• Problème 8–42:
Une courbe dans le plan xy est décrite par l'équation

$$2\,y^3 + 6\,x^3 - 24\,x + 6\,y = 0$$

(a) La courbe a trois points d'intersection avec l'axe des x . Déterminez-les.

(b) Il n'y a qu'un point d'intersection avec $x > 0$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en ce point. Déterminer le point d'intersection de la tangente avec l'axe des y .

• Problème 8–43:
le point $(2,1)$ se trouve sur la courbe

$$e^{x-2} + y + y^3 - 3\,x = k$$

dans le plan oxy .

(a) calculer k.

(b) trouver l'équation de la tangente à la courbe pour ce point.

(c) trouver une bonne approximation de la valeur de x du point sur cette courbe avec $y = 1.1$.

8.9.4 Calcul d'erreur

• Problème 8–44:
Dans un triangle avec $a = 3$, $b = 4$ et $\gamma = 60^\circ$ on a la règle du cosinus.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$$

Estimer le changement admissible Δc tel que $\Delta\gamma < 5^\circ$. Utiliser les dérivées.

• Problème 8–45:
Soit f la longueur focale d'une lentille. Un object se trouve à une distance u de la lentille et l'image se trouve à une distance v de la lentille. Utiliser

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$$

Utiliser une approximation linéaire.

(a) Soit $f = 1.0$ [m] et $v = 1.5$ [m] . Trouver la variation Δu de u d'une façon approximative si la distance v change de v à $v + \Delta v$.

(b) Trouver Δu si v change de 1.5 à 1.3 [m] .

• Problème 8–46:
Soit f la longueur focale d'une lentille. Un object se trouve à une distance u de la lentille et l'image se trouve à une distance v de la lentille. Utiliser

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$$

Utiliser une approximation linéaire.

(a) Soit $f = 0.75$ [m] et $u = 1.25$ [m] . Trouver la variation Δv de v d'une façon approximative si la distance u change de u à $u + \Delta u$.

(b) Trouver Δv si u change de 1.25 à 1.3 [m] .

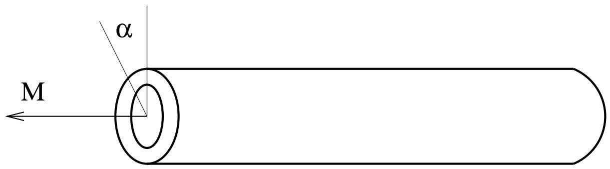
• Problème 8–47:
On applique un moment M à une tube de longueur L, rayon intérieur R_1 et rayon extérieur R_2. Elle est déformé par un angle α . Examiner α comme fonction du rayon intérieure R_1 .

$$\alpha = \frac{2\,(1+\nu)\,L}{E\,J}\,M \quad \text{avec} \quad J = \frac{\pi}{2}\,\left(R_2^4 - R_1^4\right)$$

(a) Pour un petit changement $\Delta R_1 \ll R_1$ trouver le changement $\Delta\alpha$ de l'angle à l'aide d'une approximation linéaire.

(b) Exprimer le changement relative $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ comme fonction de R_1, R_2 et $\frac{\Delta R_1}{R_1}$.

(c) Utiliser les valeurs ci–dessous pour une tube en aluminium. Calculer α en radian et degrée. Quel est le changement permissible en R_1 tel que $|\Delta\alpha| \leq 1°$?



symbole	valeur	unité
M	1	N m
L	1	m
R_1	3	mm
R_2	5	mm
E	$7 \cdot 10^{10}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
ν	0.34	

8.9.5 Taux liés

• Problème 8–48:
D'une boule de naphtaline avec rayon originale de $r = 2$ cm il reste une boule de rayon 1 cm après 6 mois. Trouver le rayon r comme fonction du temps t. Utiliser que le changement du volume V par temps est proportionelle à la surface S. ($V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$, $S = 4\,\pi\,r^2$)

• Problème 8–49:
Un abreuvoir rectangulaire possède une section en V. Sa longueur est de 2 m, sa largeur de 1 m et sa profondeur de 0.5 m. De l'eau coule avec un débit de 900 cm^3/s. Quelle est la vitesse à laquelle l'eau monte à l'instant où le niveau d'eau est de 25 cm ?

• Problème 8–50:
Un garçon fait voler un cerf-volant à une hauteur de 50 m. Quelle est la vitesse ([m/s]) avec laquelle la ficelle s'alonge, si le cerf-volant se trouve à une distance de 80 m du garçon et s'envole horizontalement avec une vitesse de 6 m/s ?

• Problème 8–51:
Un train part à 11 h vers l'est avec une vitesse de 75 km/h. Un deuxième train part à midi de la même gare vers le sud avec une vitesse de 100 km/h. Quelle est la vitesse avec laquelle le train s'éloignent à 15 h?

• Problème 8–52:
La fonction

$$f(x) = e^{-b\,x}\,\sin(a\,x) \quad \text{pour} \quad x > 0$$

a pour $b = 0$ et $a = 1$ un premier maximum local en $x = \pi/2$.

(a) Etablir une relation entre a et b de sorte que le maximum reste en $x = \pi/2$ même si les valeurs de a et b diffèrent légèrement.

(b) Résoudre l'équation de la partie (a) par rapport à b .

(c) Dans quelle marge autour de 1 le paramètre a peut-il varier si $|b|$ doit être inférieur à 0.1 ?

8.9.6 Méthode de Newton

• Problème 8–53:
Pour des valeurs fixes du nombre $z \approx 0$ la valeur $x = \ln(1+z)$ est determinée comme solution de l'équation

$$f(x) = e^x - 1 - z = 0$$

(a) Utiliser un pas de la méthode de Newton pour trouver une **formule** approximative pour x. Choisir une bonne valeur initiale x_0 autant simple que possible.

(b) Appliquer un deuxième pas de la méthode pour trouver $x_2 = \ldots$.

(c) Utiliser le résultat du probléme précédente pour calculer la valeur de $x = \ln 1.2$ dune façon approximative. approximativ zu bestimmen.

• **Problème 8–54:**
La fonction $f(x) = (\sin x)/x^2$ a pour $x > 0$ quelques maxima et minima locaux.

1. Esquisser le graphe de cette fonction pour $x > 0$.
2. Utiliser la méthode de Newton pour déterminer le premier minimum local. Justifier le choix de la valeur initiale. Pour une bonne valeur initiale deux itérations fournissent une approximation valable.

• **Problème 8–55:**
Pour une valeur donnée de $y \geq 1$ resoudre l'équation $y - \cosh(x) = 0$ pour x à l'aide de la méthode de Newton.

(a) Trouver la formule d'itération de Newton, veut dire exprimer x_{n+1} comme fonction de x_n .

(b) Pour des valeurs grandes et positive de x il y a une bonne approximation à $\cosh x$ par **une** fonction exponentielle. Utiliser cette approximation pour trouver une bonne valeur initialle x_0 de la méthode de Newton si $y \gg 1$.

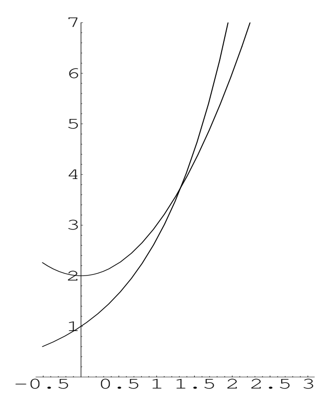
(c) Appliquer un pas de la méthode ci–dessus pour resoudre $\cosh x = 4$ pour x .

• **Problème 8–56:**

Rechts sehen Sie die Graphen der beiden Funktionen $y = e^x$ und $y = 2 + x^2$. Verwenden Sie einen einfachen, ganzzahligen Starwert x_0 und **2 Schritte** des Verfahrens von Newton um die untenstehende Gleichung nach x aufzulösen.

$$2 + x^2 = e^x$$

À droite trouver les graphes des deux fonctions $y = e^x$ et $y = 2 + x^2$. Appliquer **2 pas** de la méthode de Newton avec une valeur initiale x_0 simple, entier pour résoudre l'équation ci–dessus pour x .



• **Problème 8–57:**
Le point $(5, 2)$ se trouve sur la courbe $y + x^2 - (5 - x)^{17} + \cos(y - 2) = 28$.

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en ce point.
2. Déterminer par un calcul une bonne approximation de l'abscisse x d'un point qui se trouve sur la courbe et l'axe des x . Le calcul doit être justifié et doit être effectué sans calculatrice. Indication: une itération avec la méthode de Newton.

• **Problème 8–58:**
Considérons la fonction

$$f(x) = x\, e^{-x} \quad \text{pour} \quad x > 0$$

1. Dessiner le graphe de cette fonction.
2. Avec la méthode de Newton, déterminer des zéros de cette fonction en utilisant la valeur initiale $x_0 = 1.5$. Dessiner x_1 et x_2 à l'aide du résultat de la première partie du problème.
3. Calculer x_1 et x_2 .
4. Etudier l'ensemble de toutes les valeurs x_1 si l'on utilise des valeurs initiales $x_0 > 1$. Trouver la valeur minimale de x_1 .

• Problème 8–59:
Examiner la fonction
$$f(x) = x^2 \, e^{3\,x}$$
Dessiner le graphe de cette fonction (calculatrice). Examiner le maximum local de cette fonction. Sans utiliser la calculatrice, effectuer une seule itération de la méthode de Newton afin de trouver une bonne approximation de l'abscisse x de ce maximum. Choisir comme valeur initiale le meilleur des quatre nombres a_i ci–dessous. Donner un résultat exact.
$$a_1 = -2 \quad , \quad a_2 = \frac{-1}{2} \quad , \quad a_3 = 0 \quad \text{ou} \quad a_4 = 1$$

• Problème 8–60:
Considérons le graphe de la fonction
$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{pour} \quad x > 0$$
Examiner le deuxième minimum local de cette fonction. Déterminer avec une seule itération de la méthode de Newton une bonne approximation de l'abscisse x de ce minimum. Ne pas utiliser la calculatrice.

• Problème 8–61:
Essayer de résoudre l'équation
$$e^x = x^3 \, .$$
Choisir comme valeur initiale un entier approprié.

• Problème 8–62:
Considérons le graphe de la fonction
$$f(x) = x^2 - 4\,x + 7$$
Utiliser la méthode de Newton pour déterminer les zéros (qui n'existent pas) de cette fonction. Il y a certaines valeurs initiales x_0 pour lesquelles $x_0 = x_2$. En trouver deux de ces valeurs.

• Problème 8–63:
La fonction $f(x) = \sin(x)\,e^x$ attein la valeur 1 pour un x_n proche de $n\,\pi$, veut dire $f(x_n) = 1$ avec $x_n \approx n\,\pi$.

(a) Utiliser un pas de la méthode de Newton pour trouver une **formule** approximative pour les valeurs de x_n.

(b) Utiliser votre formule ci–dessus pour calculer x_2 proche à $2\,\pi$.

(c) Expliquer pourquoi l'approximation naïve $x_n = n\,\pi$ est de très bonne qualité pour n grande.

• Problème 8–64:
Pour un $z \in \mathbb{R}_+$ donné le nombre x est déterminé par l'équation
$$e^x = z$$
Le nombre z est proche de 1.0 . **Ne pas** utiliser le logarithme pour les deux premières parties de l'exercice.

(a) Etablir une formule d'approximation pour x à l'aide d'une seule itération de la méthode de Newton.

(b) Etablir une formule d'approximation pour x à l'aide de **deux** itérations de la méthode de Newton.

(c) Comparer pour $z = 1.1$ les valeurs de x obtenues avec $\ln 1.1$. Vos commentaires?

• Problème 8–65:
Examiner la fonction

$$f(x) = x\, e^{-2\,x}$$

On cherche un zéro à l'aide de la méthode de Newton. Après une seule itération on obtient la valeur $x_1 = 5$.

(a) Déterminer la ou les valeurs initiales exactes x_0 .

(b) Trouver (sans calcul)

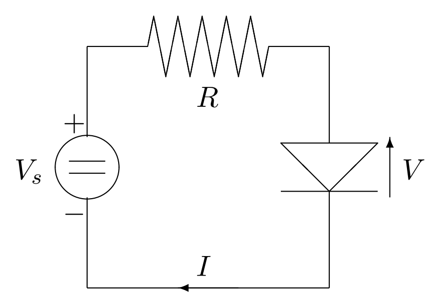
$$L = \lim_{n\to\infty} x_n$$

• Problème 8–66:
Développer une méthode itérative pour déterminer des extrema locaux d'une fonctions en appliquant la méthode de Newton à l'équation $f'(x) = 0$. Tester votre méthode avec quelques exemples du paragraphe sur les problème d'optimisation.

• Problème 8–67:

Le circuit à droite se compose d'une diode, d'une résistance et d'une force électromotrice. On a les relations suivantes (Kirchhoff et équation de la diode)

$$\begin{aligned} V_s - V &= I\,R \\ I &= I_s\,(e^{k\,V} - 1) \end{aligned}$$



Pour des valeurs données de la tension V_s, du courant de saturation I_s, de la constante k et de la résistance R il faut déterminer la tension de la diode V et le courant I .

(a) Etablir une équation pour la tension inconnue V sur la diode.

(b) Etablir la formule d'itération de la méthode de Newton pour résoudre l'équation numériquement.

(c) Choisir une tension initiale $V_0 = 0$ pour obtenir à l'aide de la méthode de Newton une meilleure approximation de la vraie valeur V . Déterminer V_1 exactement.

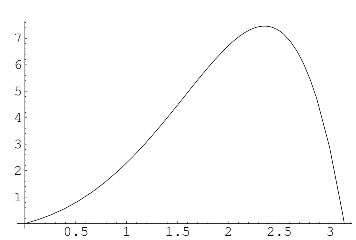
(d) Soit $k = 40\ V^{-1}$, $I_s = 10^{-14}\,A$, $V_s = 2\,V$ et $R = 22\,k\Omega$. Effectuer deux itérations avec la méthode de Newton en utilisant la valeur initiale $V_0 = 0.6\,V$. Utiliser la calculatrice.

• Problème 8–68:

Examiner la fonction

$$f(x) = e^x\ \sin x\ .$$

Il nous faut examiner des tangentes à cette courbe.



(a) Etablir l'équation de la tangente à la courbe au point $(z, f(z))$ avec la variable indépendante x.

(b) Il y a une première valeur positive z telle que la tangente à la courbe (au point $(z, f(z))$) coupe l'origine. Trouver une équation pour le point z.

(c) Trouver une bonne approximation de la valeur exacte de z. La calculatrice ne doit pas être utilisée.

• **Problème 8–69:**
En décembre 1994, il s'est révélé que le processeur ≪Pentium≫ de la compagnie Intel a eu des problèmes en divisant deux nombre flottants (floating point number). Pour certaines combinaisons du numérateur et du dénominateur seulement les quatre ou cinq premières décimales étaient correctes. Pour un $z \neq 0$ donné, la valeur réciproque $x = 1/z$ doit être déterminée. Concevoir un algorithme pour améliorer le résultat ultérieurement.
Indication: $f(x) = z - \frac{1}{x}$

• **Problème 8–70:**
Concevoir un algorithme pour calculer la valeur $x = \frac{y}{z}$ à partir des valeurs z et y. Il ne faut utiliser que des additions, des soustractions et des multiplications. En plus, les opérations devraient être bien réalisées sur un microprocesseur.
Indication: seulement le calcul de $1/z$ est relevant. D'abord le domaine de définition du dénominateur z doit être restreint sur $1 \leq z \leq 2$. Cela est facilement possible, puisque z la représentation interne de z se fait dans le système dual.

8.9.7 Interpolation

• **Problème 8–71:**
Considérer le tableau

x	0.1	0.2	0.3
$\sin x$	0.09983	0.19867	0.29552

et en déterminer $z = \sin 0.25$ par une

(a) interpolation linéaire.

(b) interpolation quadratique.

• **Problème 8–72:**
Dans l'intervalle $[0, \pi]$ on donne $n + 1$ abscisses équidistantes $x_i = i\,\pi/n$. Pour toute abscisse la valeur $y_i = \sin x_i$ est donnée. On fait une interpolation par intervalle par des polynômes de degré 1. Combien de points doit-on choisir pour que l'erreur soit inférieure à 10^{-6} ?

• **Problème 8–73:**
Dans l'intervalle $[0, \pi]$ on donne $n + 1$ abscisses équidistantes $x_i = i\,\pi/n$. Pour toute abscisse la valeur $y_i = \sin x_i$ est donnée. On fait une interpolation par intervalle par des polynômes de degré 2. Combien de points doit-on choisir pour que l'erreur soit inférieure à 10^{-6} ?

• **Problème 8–74:**
Dans l'intervalle $[-1, 1]$ on donne $n + 1$ abscisses équidistantes. Pour toute abscisse la valeur $y_i = e^{x_i}$ est donnée. Combien de points doit-on choisir pour que l'erreur soit inférieure à 10^{-6} si l'on fait

(a) une interpolation par intervalle par des polynômes de degré 1.

(b) une interpolation par intervalle par des polynômes de degré 2.

8.9.8 Solutions de quelques exercices

Solution pour problème 8–1 : $t = 3.5$ et $h = \frac{265}{4} = 66 + \frac{1}{4}$

Solution pour problème 8–2 : $h = \frac{2}{3}\sqrt{6}r$, $b = \frac{2}{3}\sqrt{3}r$, $W = \frac{8}{27}\sqrt{3}r^3$.

Solution pour problème 8–3 : Soit $\alpha = \frac{w}{2}$ et soit L la longueur totale du câble.

(a) La différence d'altitude H entre le bord supérieur de la poutre et le point de suspension est donnée par

$$H(\alpha) = L - 3\,b - \frac{b}{\sin\,\alpha} + \frac{b\,\cos\,\alpha}{2\sin\,\alpha} = L - 3\,b + \frac{b}{2}\,\frac{\cos\,\alpha - 2}{\sin\,\alpha}$$

La fonction est dérivable dans l'intervalle donné.

(b) On cherche le maximum de la fonction $H(\alpha)$ pour $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Pour $\alpha \to 0+$ la valeur de la fonction tend vers $-\infty$ puisque

$$\lim_{\alpha\to 0+} H(\alpha) = L - 3\,b - \frac{b}{2}\lim_{\alpha\to 0+}\frac{2-\cos\,\alpha}{\sin\,\alpha} = -\infty$$

et on a

$$\lim_{\alpha\to\pi/2} H(\alpha) = H(\pi/2) = L - 4\,b$$

La dérivée de la fonction est donnée par

$$\frac{\partial H}{\partial\alpha} = \frac{b}{2}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{\cos\,\alpha - 2}{\sin\,\alpha} = \frac{b}{2}\,\frac{-\sin^2\,\alpha - (\cos\,\alpha - 2)\,\cos\,\alpha}{\sin^2\,\alpha}$$

Par conséquent, l'équation trigonométrique

$$-\sin^2\,\alpha - (\cos\,\alpha - 2)\,\cos\,\alpha = -\sin^2\,\alpha - \cos^2\,\alpha - 2\,\cos\,\alpha = 0$$

doit être résolue. Donc

$$\cos\,\alpha = \frac{1}{2}$$

et par conséquent

$$w = 2\,\alpha = \frac{2}{3}\,\pi = 120°$$

On trouve pour ces valeurs de α

$$H(\pi/3) = L - 3\,b + \frac{b}{2}\,\frac{1/2-2}{\sqrt{3}/2} = L - 3\,b - b\,\frac{\sqrt{3}}{2} > L - 4\,b$$

Le maximum est donc atteint pour $w = 120°$.

Solution pour problème 8–4 : $x \approx 26.7\text{m}$.

Solution pour problème 8–5 :

$$\begin{aligned}
y(x) &= k\,(16\,x^4 - 12\,L\,x^3 + L^2\,x^2) \\
y'(x) &= k\,(64\,x^3 - 36\,L\,x^2 + 2\,L^2\,x) \\
&= k\,2\,x\,(32\,x^2 - 18\,L\,x + L^2) \\
0 &= 32\,x^2 - 18\,L\,x + L^2 \\
x_{1,2} &= \frac{1}{64}\,\left(18\,L \pm \sqrt{(18\,L)^2 - 128\,L^2}\right) \\
&= \frac{L}{64}\,\left(18 \pm \sqrt{18^2 - 128}\right) = \frac{L}{64}\,(18 \pm 14) = \left\{\begin{array}{l} L/2 \\ L/16 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= k\,(192\,x^2 - 72\,L\,x + 2\,L^2) \\ y''(L/2) &< 0 \quad \text{maximum} \\ y''(L/16) &> 0 \quad \text{minimum} \end{aligned}$$

Solution pour problème 8–6 : $\frac{1}{2}$

Solution pour problème 8–7 : Les deux nombres sont égaux à 55.

Solution pour problème 8–8 : Il faut utiliser pour le cercle un bout d'environ 21.99 cm.

Solution pour problème 8–9 : Environ 4.9 m le long de la maison sur 2.45 m perpendiculaire à la maison.

Solution pour problème 8–10 :

(a) Verwende Ähnlichkeit von Dreiecken um y als Funktion von x zu finden.

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x-2} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{x}{x-2} \quad \text{wobei} \quad x > 2$$

Die zu minimierende Funktion ist

$$f(x) = L^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

(b) Der natürliche Definitionsbereich ist $2 < x < \infty$ und die Funktion ist differenzierbar. Die beiden Randwerte $x \to 2$ und $x \to \infty$ erzeugen extrem grosse Werte. Somit sind nur die Nullstellen der Ableitung zu untersuchen.

$$\begin{aligned} f(x) &= L^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{x^2}{(x-2)^2} \\ \frac{d}{dx}\,f(x) &= 2\,x + \frac{2\,x\,(x-2)^2 - x^2\,2\,(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2\,x\,(x-2)^4 + 2\,x\,(x-2)^2 - x^2\,2\,(x-2)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{2\,x\,(x-2)}{(x-2)^4}\,((x-2)^3 + (x-2) - x) = \frac{2\,x}{(x-2)^3}\,((x-2)^3 - 2) \end{aligned}$$

Die zu lösende Gleichung im Bereich $2 < x < \infty$ ist somit $(x-2)^3 = 2$ mit der eindeutigen Lösung

$$x = 2 + \sqrt[3]{2} \approx 3.2599$$

Solution pour problème 8–12 : Quelle [Klin77]

$$\begin{aligned} c &= 2\,L - a - b \\ A(b) &= \sqrt{L\,(L-a)\,(L-b)\,(L-c)} = \sqrt{L\,(L-a)\,(L-b)\,(L-(2\,L-a-b))} \\ A(b)^2 &= L\,(L-a)\,(L-b)\,(a+b-L) \\ f(b) &= \frac{A(b)^2}{L\,(L-a)} = (L-b)\,(a+b-L) \quad \text{maximal} \\ \frac{d}{db}\,f(b) &= -(a+b-L) + (L-b) = 2\,L - a - 2\,b = 0 \\ b &= \frac{2\,L-a}{2} \\ c &= 2\,L - a - b = 2\,L - a - \frac{2\,L-a}{2} = \frac{2\,L-a}{2} = b \end{aligned}$$

Somit gilt $b = c$. Wegen $\frac{d^2}{db}f(b) = -2 < 0$ liegt ein Maximum vor.

Mit analoger Rechnung kann gezeigt werden, dass $a = b$ und somit ist das Dreieck mit maximaler Fläche gleichseitig.

Solution pour problème 8–13 :

(a)

$$\begin{aligned}
x^2 + h^2 &= R^2 \\
V(x) &= \pi\, x^2\, h = \pi\, x^2 \sqrt{R^2 - x^2} \\
\frac{\partial\, V(x)}{\partial x} &= \pi \left(2\,x\sqrt{R^2 - x^2} + x^2\, \frac{-2\,x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right) \\
&= \pi \left(2\,x\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) \\
&= \frac{\pi\, x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \left(2\,(R^2 - x^2) - x^2\right) \\
&= \frac{\pi\, x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \left(2\,R^2 - 3\,x^2\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\, V(x)}{\partial x} = 0 \qquad \Longleftarrow \qquad x^2 = \frac{2}{3}\, R^2 \qquad \Longleftarrow \qquad x = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R$$

(b)

$$V = \pi\, \frac{2}{3}\, R^2 \sqrt{R^2 - \frac{2}{3}\, R^2} = \pi\, \frac{2}{3\sqrt{3}}\, R^3$$

$$\frac{V}{V_{\text{Halbkugel}}} = \frac{\pi\, \frac{2}{3\sqrt{3}}\, R^3}{\frac{1}{2}\, \frac{4}{3}\, \pi\, R^3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (\approx 0.577)$$

Solution pour problème 8–14 : Sei R der Radius des Kreises, der die Oberkante der Tüte formt. Die Länge der Oberkante der Tüte ist $2\,\pi\, R = \alpha\, r$ und somit ist der Radius $R = \frac{\alpha\, r}{2\,\pi}$. Die Höhe h ist bestimmt durch $h^2 = r^2 - R^2 = \left(1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}\right) r^2$

(a) Das Volumen lässt sich als Funktion des Winkels α schreiben.

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\, A\, h = \frac{1}{3}\, \pi\, \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}\, r^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}}\, r = \frac{r^3}{12\,\pi}\, \alpha^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}}$$

(b) Für ein maximales Volumen muss die Ableitung $\frac{d}{d\alpha}\, V$ Null sein.

$$\frac{d}{d\,\alpha}\, V(\alpha) = \frac{r^3}{12\,\pi} \left(2\,\alpha \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}} + \alpha^2\, \frac{-2\,\alpha/(4\,\pi^2)}{2\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}}}\right) = 0$$

Diese Gleichung lässt sich nach α auflösen.

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{d\,\alpha}\, V(\alpha) &= \frac{r^3}{12\,\pi} \left(2\,\alpha \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}} + \alpha^2\, \frac{-2\,\alpha/(4\,\pi^2)}{2\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}}}\right) \\
2\,\alpha \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}} &= \alpha^2\, \frac{\alpha/(4\,\pi^2)}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}}} \\
2 - \frac{2\,\alpha^2}{4\,\pi^2} &= \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2} \\
\alpha^2 &= \frac{8\,\pi^2}{3} \\
\alpha &= \sqrt{\frac{8}{3}}\, \pi = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\, \pi
\end{aligned}$$

Solution pour problème 8–15 : Die Kosten K sind als Funktion von Radius r und Höhe h zu berechnen. Mit Hilfe der Bedingung für das Volumen kann die Variable h eliminiert werden.

$$\begin{aligned}
0.8 = V &= \pi\, r^2\, h \\
h &= \frac{V}{\pi\, r^2} \\
K &= 164\,\pi\, r^2 + 70\; 2\,\pi\, r\, h = 164\cdot\pi\, r^2 + 70\cdot 2\,\pi\, r\,\frac{V}{\pi\, r^2} \\
\frac{\partial}{\partial r}\, K &= 164\cdot 2\,\pi\, r - 70\cdot 2\,\frac{V}{r^2} \;=\; 0 \\
r^3 &= \frac{2\cdot 70\, V}{164\cdot 2\,\pi} \approx 0.10869 \\
r &\approx 0.477 \\
h &\approx 1.12
\end{aligned}$$

Somit ist die optimale Lösung gegeben durch $r = 0.48$ m und $h = 1.12$ m.

Solution pour problème 8–16 : 7.07 m

Solution pour problème 8–17 : Soit h la distance verticale du point au plafond et x sa coordonnée horizontale où $x = 0$ se trouve entre les deux sources lumineuses. Par conséquent, il nous faut étudier la fonction

$$f\,(x) = \frac{1}{h^2 + (x + 2.5)^2} + \frac{1}{h^2 + (x - 2.5)^2}\;.$$

Le graphe de cette fonction peut être examiné sans problème à l'aide d'une calculatrice moderne ou d'un ordinateur. Vous trouvez ultérieurement un calcul, un peut long, pour examiner cette fonction.

La fonction est strictement croissante et on a $\lim_{|x|\to\infty} f\,(x) = 0$. L'intensité n'est certainement pas maximale si $|x|$ est grande. Puisque la fonction est dérivable il nous faut trouver les zéros de la dérivée. On a

$$\begin{aligned}
f'\,(x) &= \frac{-2\,(x + 2.5)}{(h^2 + (x + 2.5)^2)^2} + \frac{-2\,(x - 2.5)}{(h^2 + (x - 2.5)^2)^2} \\
&= \frac{-2\,x - 5}{(h^2 + (x + 2.5)^2)^2} + \frac{-2\,x + 5}{(h^2 + (x - 2.5)^2)^2} \\
&= -\frac{(2\,x + 5)\;(h^2 + (x - 2.5)^2)^2 + (2\,x - 5)\;(h^2 + (x + 2.5)^2)^2}{(h^2 + (x + 2.5)^2)^2\;(h^2 + (x - 2.5)^2)^2}
\end{aligned}$$

Pour $x \gg 1$ on a donc $f'\,(x) < 0$ et pour $x \ll -1$ on a $f'\,(x) > 0$. Comme points critiques seulement les zéros du polynôme au numérateur entrent en ligne de compte. Puisque la fonction f et le dénumérateur sont pairs, le numérateur doit être impair. Essayons de simplifier.

$$\begin{aligned}
-\quad \text{numérateur} &= (2\,x + 5)\;(h^2 + (x - 2.5)^2)^2 + (2\,x - 5)\;(h^2 + (x + 2.5)^2)^2 \\
&= 2\,x\;\left((h^2 + (x - 2.5)^2)^2 + (h^2 + (x + 2.5)^2)^2\right) \\
&\quad +5\;\left((h^2 + (x - 2.5)^2)^2 - (h^2 + (x + 2.5)^2)^2\right) \\
&= 2\,x\;\left((h^2 + x^2 - 5\,x + 6.25)^2 + (h^2 + x^2 + 5\,x + 6.25)^2\right) \\
&\quad +5\;\left((h^2 + x^2 - 5\,x + 6.25)^2 - (h^2 + x^2 + 5\,x + 6.25)^2\right) \\
&= 4\,x\;\left(h^4 + x^4 + 5^2\,x^2 + 6.25^2 + 2\;(h^2\,x^2 + 6.25\,(x^2 + h^2))\right) \\
&\quad -100\,x\;\left(h^2 + x^2 + 6.25\right)
\end{aligned}$$

Un zéro évident est $x = 0$. Avec la substitution $z = x^2$ il suffit de déterminer les zéros de la fonction quadratique $g\,(z)$:

$$\begin{aligned}
g\,(z) &= \left(h^4 + z^2 + 5^2\,z + 6.25^2 + 2\;(h^2\,z + 6.25\,(z + h^2))\right) - 25\;\left(h^2 + z + 6.25\right) \\
&= z^2 + z\;\left(25 + 2\,h^2 + 12.5 - 25\right) + \left(h^4 + 6.25^2 + 12.5\,h^2 - 25\,h^2 - 25\cdot 6.25\right)
\end{aligned}$$

On a pour cette parabole tournée vers le haut

$$\begin{aligned} g\,(0) &= h^4 + 6.25^2 + 12.5\,h^2 - 25\,h^2 - 25 \cdot 6.25 \\ g'\,(0) &= 25 + 2\,h^2 + 12.5 - 25 = 2\,h^2 + 12.5 > 0 \end{aligned}$$

Soit $h_0 > 0$ la valeur unique telle que $g\,(h_0) = 0$ ($h_0 \approx 4.33$). On a:

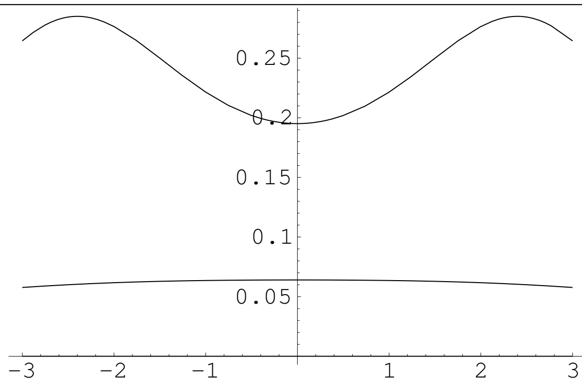
- Si $0 \leq h < h_0$, alors $g\,(0) < 0$ et g a donc exactement un zéro positif z_0. La fonction $f\,(x)$ admet en $x_0 = \sqrt{z_0}$ un maximum global. Par conséquent, les maxima d'intensité se trouvent 2 m en-dessous du plafond à proximité des sources lumineuses.

- Si $h > h_0$, alors $g\,(0) > 0$ et g n'a pas de zéros positifs. La fonction $f\,(x)$ ne possède qu'en $x = 0$ un point critique et admet un maximum là. Par conséquent, le maximum d'intensité se trouve 5 m en-dessous du plafond entre les deux sources lumineuses.

Le résultat ci-dessus est illustré par la figure.

Mathematica

```
Clear[f,x,fig];
f[x_,h_] := 1/(h^2+(x+2.5)^2) + 1/(h^2+(x-2.5)^2);
fig=Plot[{f[x,2],f[x,5],0},{x,-3,3}];
```



Solution pour problème 8–20 : Soit x la longueur recherchée de l'échelle, l la distance entre le pied et le mur et h la hauteur du point où l'échelle touche le mur . Alors on a

$$\frac{h}{l} = \frac{h-8}{1} \quad \text{et} \quad x^2 = h^2 + l^2$$

Le domaine en question est déterminé par les inéquations $h > 8$ et $l > 1$. La première équation peut être résolue par rapport à l . Par conséquent, nous cherchons le minimum de la fonction

$$f\,(h) = h^2 + l^2 = h^2 + \left(\frac{h}{h-8}\right)^2$$

Cette fonction est dérivable pour $h > 8$ et il nous faut donc trouver les zéros de la dérivée.

$$\frac{d\,f}{dh} = 2\,h + 2\,\left(\frac{h}{h-8}\right)\,\left(\frac{(h-8)-h}{(h-8)^2}\right) = 0$$

Cela mène à l'équation

$$1 - \frac{8}{(h-8)^3} = 0$$

avec la solution

$$(h-8)^3 = 8 \quad \text{et par conséquent} \quad h = 10$$

Il s'en suit que

$$l = \frac{h}{h-8} = 5 \quad \text{et} \quad x^2 = h^2 + l^2 = 125 = 5\sqrt{5} \approx 11.18$$

L'échelle doit donc avoir une longueur de $5\sqrt{5}$ m.

Solution pour problème 8–21 : Soient b et h respectivement la largeur et la hauteur du rectangle. Alors on a:

$$A = b\,h + \frac{\pi}{8}\,b^2 \quad \text{et} \quad U = b + 2\,h + \frac{\pi}{2}\,b$$

L'équation pour A peut être résolue par rapport à h :

$$h = \frac{A}{b} - \frac{\pi}{8}\,b = \frac{8\,A - \pi\,b^2}{8\,b}$$

On introduit cette expression dans l'équation pour U :

$$U\,(b) = b + \frac{\pi}{2}\,b + 2\,h = b + \frac{\pi}{2}\,b + 2\,\left(\frac{A}{b} - \frac{\pi}{8}\,b\right)$$

L'intervalle en question pour la variable b est donné par $b > 0$. Nous dérivons et égalons à zéro:

$$\frac{d}{db}\,U\,(b) = 1 + \frac{\pi}{2} + 2\,\left(\frac{-A}{b^2} - \frac{\pi}{8}\right) = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2\,A}{b^2} = 0$$

Le périmètre est donc extremal pour

$$b^2 = \frac{8\,A}{4+\pi}$$

(plus précisément il s'agit d'un point critique). Le test de la dérivé seconde

$$\frac{d^2}{db^2}\,U\,(b) = 0 + \frac{4\,A}{b^3} > 0$$

montre que la fonction possède un minimum en

$$b = \sqrt{\frac{8\,A}{4+\pi}}$$

Solution pour problème 8–22 :

(a) Si les accroissements ΔT et ΔU_0 sont petits, alors

$$\Delta U_0 \approx \frac{\partial U}{\partial T}\,\Delta T$$

Afin que ΔT , pour un ΔU_0 donné, soit minimale, la dérivée doit être maximale.

(b) Nous déterminons d'abord la pente de la courbe

$$\begin{aligned} U\,(t) &= U_m\,(1 - e^{-\alpha\,t}) \\ U'\,(t) &= U_m\,\alpha\,e^{-\alpha\,t} \\ U'\,(T) &= U_m\,\alpha\,e^{-\alpha\,T} \end{aligned}$$

Maintenant cette fonction ≪nouvelle≫ doit devenir maximal par rapport à la variable α . A cet fin, le zéro de la dérivée est déterminé:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\,U'\,(T) = U_m\,e^{-\alpha\,T}\,(1 - \alpha\,T)$$

Cette dérivée partielle est zéro pour $\alpha = 1/T$ et par conséquent le choix optimal du paramètre est donné par

$$U_0 = U_m\,(1 - e^{-\alpha\,T}) = U_m\,(1 - \frac{1}{e})$$

Solution pour problème 8–23 : Le domaine de définition est donné par $0 < x < \infty$. La fonction étant arbitrairement dérivable, nous pouvons donc nous concentrer sur les zéros de la dérivée.

$$\begin{aligned} f\,(x) &= \text{aire avec des points de support en } \pm x \\ &= 2\,x\,e^{-x^2} \\ f'\,(x) &= 2\,e^{-x^2} - 4\,x^2\,e^{-x^2} \\ &= 2\,\left(1 - 2\,x^2\right)\,e^{-x^2} \end{aligned}$$

Les deux zéros sont donnés par $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Evidemment, seulement la solution positive entre en ligne de compte. On a

$$f\,(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2}{\sqrt{2}}\,e^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{e}}$$

Nous effectuons le test de la dérivée seconde afin de prouver qu'il s'agit d'un minimum local.

$$\begin{aligned} f''\,(x) &= 2\,\left(-4\,x - 2\,x + 4\,x^3\right)\,e^{-x^2} \\ &= 4\,x\,\left(-3 + 2\,x^2\right)\,e^{-x^2} \\ f''\,(1/\sqrt{2}) &= 4\,\sqrt{2}\,\left(-3 + 1\right)\,e^{-1/2} < 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction admet un maximum local. En réalité il s'agit même d'un maximum **global**.

Solution pour problème 8–24 :

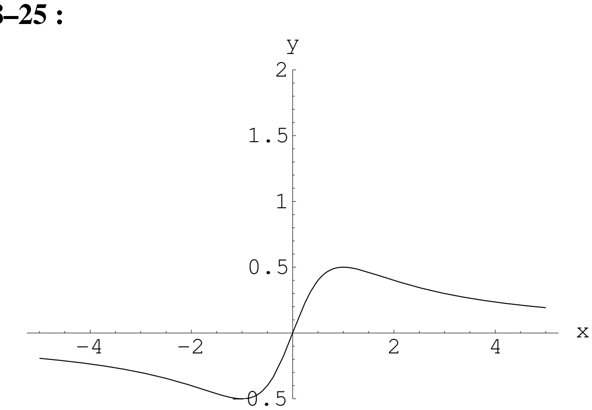
(a) Au maximum la dérivée doit s'annuler. Cela mène à

$$\begin{aligned} f(x) &= a\,x\,e^{-b\,x} \\ f'(x) &= a\,e^{-b\,x} - a\,x\,b\,e^{-b\,x} \\ 0 &= a\,(1-b)\,e^{-b} \qquad \Rightarrow \qquad b\;=\;1 \\ f(1)\;=\;2 &= a\,e^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad a\;=\;2\,e \end{aligned}$$

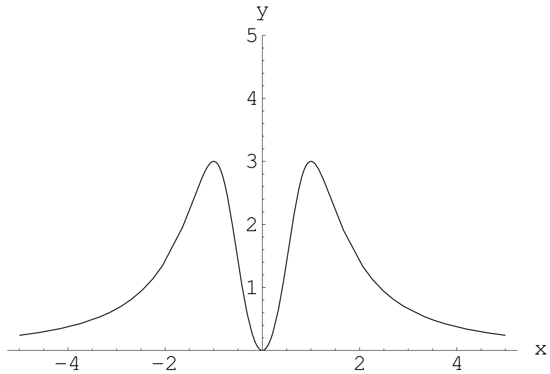
(b) Au point d'inflexion, la dérivée seconde est égale à 0 et par conséquent on a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,e\,x\,e^{-x} \\ f'(x) &= 2\,e\,(1-x)\,e^{-x} \\ f''(x) &= 2\,e\,(-2+x)\,e^{-x} \\ f''(x) &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x\;=\;2 \end{aligned}$$

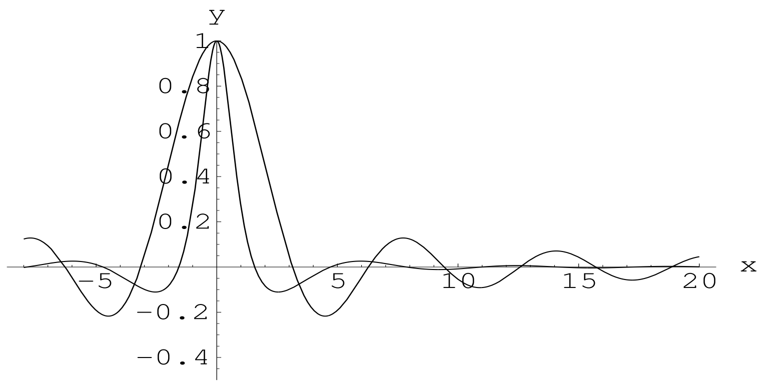
Solution pour problème 8–25 :



Solution pour problème 8–26 :



Solution pour problème 8–27 :



Solution pour problème 8–28 :

(a) Les zéros sont $x_{1,2} = \pm 1$. A cause de

$$y'(x) = e^{-x^2/2}\ \left(-2\,x - x + x^3\right) = e^{-x^2/2}\ \left(-3\,x + x^3\right)$$

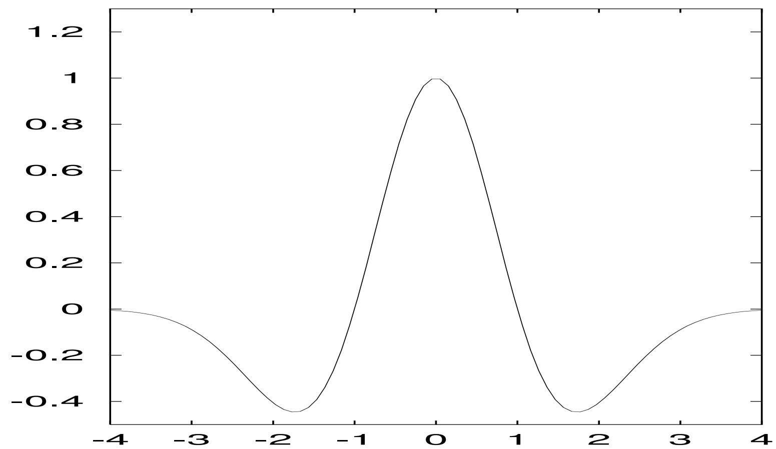
les valeurs de la dérivée en ± 1 sont données par $\mp 2\,e^{-1/2} \approx \mp 1.21$

(b) Comme points critiques seulement les solutions de l'équation

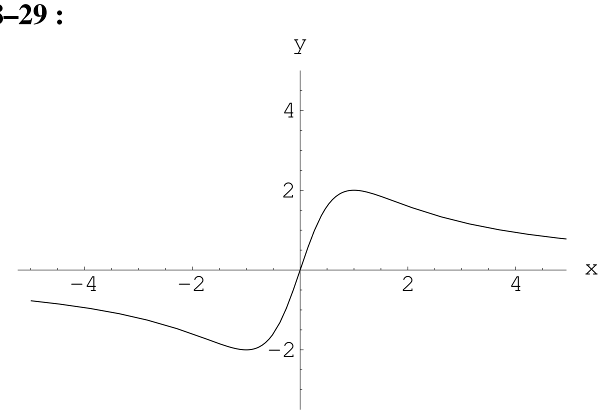
$$-3\,x + x^3 = x\ (x^2 - 3) = 0$$

entrent en ligne de compte. Ils sont donc donnés par $x_1 = 0$ et $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$. Les valeurs de la fonction sont données par $y\,(x_1) = 1$ et $y_{2,3} = -1/e^{3/2}$. Pour $x \to \pm\infty$ la fonction $y\,(x)$ tend vers 0. Par conséquent, nous avons le tableau ci-dessous:

$x =$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$
$y\,(x) =$	$-1/e^{3/2}$	0	1	0	$-1/e^{3/2}$
$y'\,(x) =$	0	$-2/\sqrt{e}$	0	$-2/\sqrt{e}$	0



Solution pour problème 8–29 :



Solution pour problème 8–30 : La fonction est évidemment impaire.

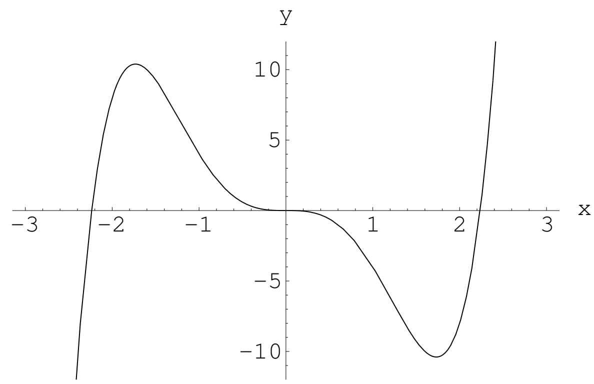
$$\begin{array}{llll}
f(x) = x^3\,(x^2-5) & \text{zéros en} \quad x=0 & \text{et} & x=\pm\sqrt{5} \\
f'(x) = 5\,x^4 - 15\,x^2 = 5\,x^2\,(x^2-3) & \text{zéros en} \quad x=0 & \text{et} & x=\pm\sqrt{3} \\
f''(x) = 20\,x^4 - 30\,x^2 = 10\,x\,(2\,x^2-3) & \text{zéros en} \quad x=0 & \text{et} & x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}
\end{array}$$

On arriva à

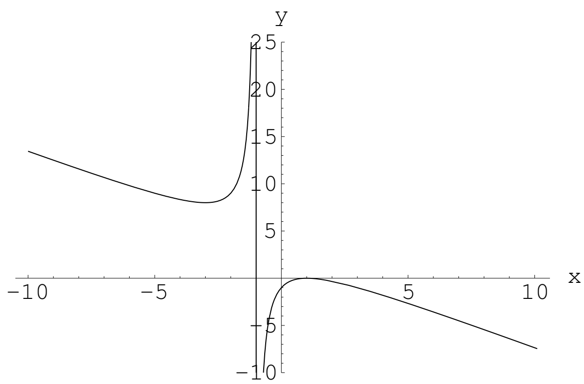
$x =$	0	$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{5}$
$f(x) =$	0	$\mp\frac{21}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\mp 6\sqrt{3}$	0
$f'(x) =$	0	$-\frac{45}{4}$	0	50
$f''(x) =$	0	0	$\pm 30\sqrt{3}$	$\mp 70\sqrt{5}$
type	point de selle	point d'inflexion	extrema	zéros

Afin de dessiner le graphe il n'est pas nécessaire d'établir le tableau entier. La partie donnée ci-dessous suffit:

$x =$	0	$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{5}$
$f(x) =$	0	$\mp\frac{21}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \mp 6.4$	$\mp 6\sqrt{3} \approx \mp 10.4$	0
$f'(x) =$	0	negativ	0	positiv
$f''(x) =$	0	0		
type	point de selle	point d'inflexion	extrema	zéros



Solution pour problème 8–31 :



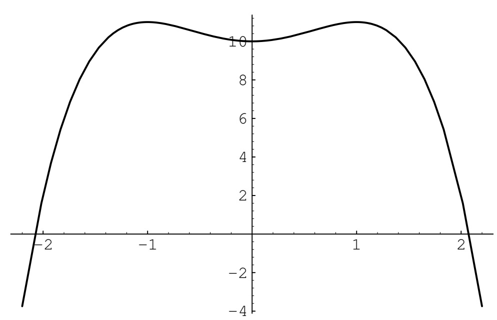
Solution pour problème 8–32 :

La fonction est **paire**. Les zéros peuvent être donnés exactement, puisque $f(x) = 0$ est une équation biquadratique.

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{44}\right) = 1 \pm \sqrt{11}$$

Par conséquent, on a deux solutions réelles

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{1+\sqrt{11}}$$



Afin de trouver les autres points spéciaux on utilise les dérivées.

$$\begin{aligned} f(x) &= 10 + 2\,x^2 - x^4 \\ f'(x) &= 4\,x - 4\,x^3 = 4\,x\,(1-x^2) \\ f''(x) &= 4 - 12\,x^2 = 4\,(1-3\,x^2) \end{aligned}$$

On a (calcul exact!)

$$f(\pm 1) = 11 \quad , \quad f(\pm 1/\sqrt{3}) = 10 + \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = 10 + \frac{5}{9} \quad , \quad f'(\pm 1/\sqrt{3}) = \pm 4\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{2}{3} = \frac{\mp 8}{3\sqrt{3}}$$

$x =$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1
$f(x) =$	11	$10+\frac{5}{9}$	10	$10+\frac{5}{9}$	11
$f'(x) =$	0	$\frac{-8}{3\sqrt{3}}$	0	$\frac{8}{3\sqrt{3}}$	0
$f''(x) =$	-8	0	4	0	-8
type	maximum	point d'inflexion	minimum	point d'inflexion	maximum

Solution pour problème 8–34 : Pour la valeur critique λ_c la courbe change d'un minimum locale chez $x = 0$ à un maximum locale chez $x = 0$. Donc on a $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\lambda(\lambda_c, 0) = 0$ et cette condition nous donne $\lambda_c = 1/2$.

Solution pour problème 8–35 :

(a)

$$\begin{aligned} f\,(0) &= b = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad b = 2 \\ f'\,(x) &= x^3 - 4\,x^2 + x + a \\ f'\,(3) &= 27 - 4 \cdot 9 + 3 + a = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 6 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f''\,(x) &= 3\,x^2 - 8\,x + 1 \\ f''\,(3) &= 27 - 24 + 1 = 4 > 0 \qquad \Longrightarrow \quad \text{minimum en } \ x = 3 \end{aligned}$$

(c) Les autres zéros de $f'(x)$ doivent être trouvés. On peut diviser $f'(x)$ par $(x-3)$ à l'aide du schéma de Horner:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ x_0 = 3 & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

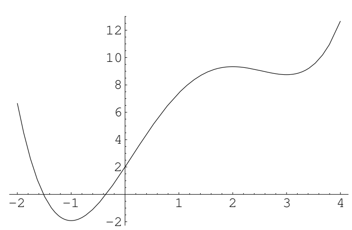
Par conséquent, on a

$$f'\,(x) = x^3 - 4\,x^2 + x + 6 = (x-3)\,(x^2 - x - 2) = (x-3)\,(x-2)\,(x+1)$$

Les extrema sont

valeur de x	$f\,(x)$	$f''\,(x)$	type de l'extremum
$x = 3$	$f\,(3) = \frac{35}{4}$	$f''\,(3) = 4 > 0$	minimum local
$x = 2$	$f\,(2) = \frac{28}{3}$	$f''\,(2) = -3 < 0$	maximum local
$x = -1$	$f\,(-1) = \frac{-23}{12}$	$f''\,(-1) = 12 > 0$	minimum local

(d)



Solution pour problème 8–36 : Mit Hilfe einer einfachen Graphik erkennt man

$$\tan(\alpha(t)) = \frac{v \cdot t - 3}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha(t) = \arctan\left(\frac{v \cdot t - 3}{2}\right)$$

(a) Verwende Kettenregel und $\frac{d}{dx}\ \tan x = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\dot\alpha(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{v \cdot t - 3}{2}\right)^2}\ \frac{v}{2}$$

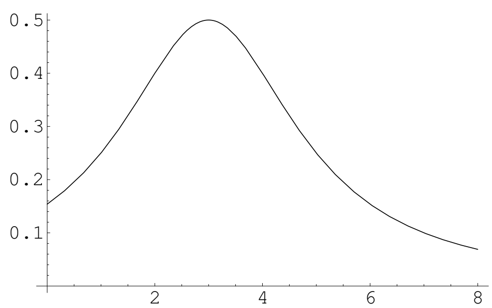
(b)

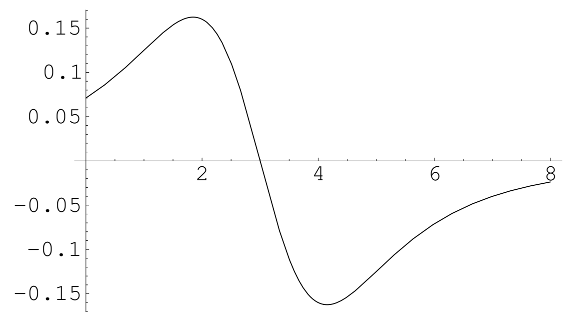
$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{-1}{\left(1+\left(\frac{v\cdot t-3}{2}\right)^2\right)^2}\;\frac{v^2}{4}\;(v\cdot t-3)$$

(c) Man kann die folgenden Aspekte erkennen:

- Die Funktion $\dot{\alpha}(t)$ hat ein Maximum bei $x=3$, d.h. bei $t_0 = 3/v$.
- Für $t < t_0$ ist $\ddot{\alpha}(t) > 0$.
- Für $t > t_0$ ist $\ddot{\alpha}(t) < 0$.
- Für $|t| \gg 1$ gilt $\dot{\alpha}(t) \approx \frac{2}{v\,t^2}$
- Für $|t| \gg 1$ gilt $\ddot{\alpha}(t) \approx \frac{-4}{v\,t^3}$

Für die Geschwindigkeit $v=1$ erhält man die beiden folgenden Graphen für $\dot{\alpha}(t)$ und $\ddot{\alpha}(t)$.





Solution pour problème 8–37 :

$$\begin{aligned}
y(x)^4 - x^3 - 2\,y(x)^2 + x &= c\\
(-3)^4 - 2^3 - 2\,(-3)^2 + 2 &= 57 \;=\; c\\
4\,y(x)^3\,y'(x) - 3\,x^2 - 4\,y(x)\,y'(x) + 1 &= 0\\
4\,(-3)^3\,y'(2) - 3\,2^2 - 4\,(-3)\,y'(2) + 1 &= 0\\
y'(2) &= \frac{12-1}{-4\cdot 27+2} = \frac{-11}{96}
\end{aligned}$$

Solution pour problème 8–38 : Evidemment on a

$$\cos\left(y\left(x\right)\right) = x$$

et par conséquent

$$-\sin\left(y\left(x\right)\right)\cdot y'\left(x\right) = 1$$

et

$$y'\left(x\right) = \frac{-1}{\sin\left(y\left(x\right)\right)}$$

Pour $0 < z = \arccos\left(x\right) < \pi$ on a $\sin z = \sqrt{1-\cos^2 z}$ et donc

$$y'\left(x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2(\arccos\left(x\right))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2)}}$$

Solution pour problème 8–39 :

$$\frac{d}{dx}\,\left(g^2\left(x\right)+f^2\left(x\right)\right) = 2\,\left(g\left(x\right)g'\left(x\right)+f\left(x\right)f'\left(x\right)\right) = 0$$

Par conséquent

$$f'(x) = \frac{-g(x)g'(x)}{f(x)} = \frac{-g(x)f(x)}{f(x)} = -g(x)$$

Solution pour problème 8–40 : Interpréter $y(x)$ comme fonction de x et dériver l'équation.

$$e^{x-1} + 2y \cdot y' + 5y \cdot y' - 6x = 0$$

Au point $(x, y) = (1, 1)$ on a

$$e^{1-1} + 2y' + 5y' - 6 = 0$$

et par conséquent

$$y'(1) = \frac{5}{7}$$

(a) Nous établissons l'équation de la tangente

$$y - 1 = \frac{5}{7}(x-1) \quad \text{ou} \quad y = \frac{5}{7}x + \frac{2}{7}$$

(b) En posant $y = 1.1$ dans l'équation de la tangente on obtient:

$$1.1 - 1 = \frac{5}{7}(x-1) \quad \text{ou} \quad x = 1 + \frac{7}{50}$$

Solution pour problème 8–41 : $y = f(x)$ et $f'(0) = 2$, donc $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan 2 \approx 0.4636\ldots$

Solution pour problème 8–42 :

(a) Intersection avec l'axe des x ($y = 0$)

$$6\,x^3 - 24\,x = 0$$

Donc, $x = 2$, $x = 0$ et $x = -2$.

(b) Evidemment il s'agit du point $(2, 0)$. En dérivant implicitement on obtient

$$6\,y^2\,y' + 18\,x^2 - 24 + 6\,y' = 0\ .$$

En introduisant les coordonnées du point donné on a donc

$$0 + 18\,2^2 - 24 + 6\,y'(2) = 0$$

et par conséquent $y'(2) = -8$. On obtient ainsi pour l'équation de la **tangente**

$$y = y(2) + y'(2)\,(x-2) = -8\,(x-2)$$

Le point d'intersection avec l'axe des y ($x = 0$) est donc donné par $y = 16$.

Solution pour problème 8–43 :

(a) le point $(2, 1)$ se trouve sur la courbe. donc:

$$k = e^{x-2} + y + y^3 - 3\,x = 1 + 1 + 1 - 6 = -3$$

(b) interpréter $y(x)$ comme fonction de x et dériver l'équation par rapport à x .

$$e^{x-2} + y' + 3\,y^2 \cdot y' - 3 = 0$$

au point $(x, y) = (2, 1)$ on a donc

$$e^{2-2} + y' + 3\,y' - 3 = 0$$

et par conséquent

$$y'(2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

nous établissons l'équation de la tangente

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-2) \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{2}\,x$$

(c) en posant $y = 1.1$ dans l'équation de la tangente nous obtenons

$$1.1 = \frac{1}{2}\,x \quad \text{ou} \quad x = 2.2$$

Solution pour problème 8–44 :

$$\begin{aligned} \text{variable indépendante} &= \gamma \\ \text{variable dépendante} &= c \end{aligned}$$

Nous calculons la longueur c pour $\gamma = 60°$:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma = 9 + 16 - 24\,\frac{1}{2} = 13 \\ c &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

En dérivant la formule du théorème du cosinus par rapport à γ (interpréter c comme fonction de γ) et en introduisant les valeurs nous obtenons

$$\begin{aligned} c(\gamma)^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma \\ 2\,c(\gamma)\,\frac{d\,c}{d\gamma} &= +2\,a\,b\,\sin\gamma \\ \frac{d\,c}{d\gamma} &= \frac{a\,b\,\sin\gamma}{c} = \frac{12\,\sqrt{3}/2}{\sqrt{13}} = 6\,\sqrt{\frac{3}{13}} \end{aligned}$$

Pour l'accroissement maximal $\Delta\gamma = 5° = \frac{5\,\pi}{180}$ de γ on a

$$\begin{aligned} \Delta c &\approx \frac{d\,c}{d\gamma}\,\Delta\gamma \\ &= 6\,\sqrt{\frac{3}{13}}\,\frac{5\,\pi}{180} \approx 0.2515 \end{aligned}$$

La grandeur c peut donc être changée de 0.25 unités de longueur. La grandeur $\Delta\gamma = 5°$ doit être donnée en radian, puisque les formules de dérivation des fonctions trigonométriques ne sont que valables si les angles sont mesurés en radian.
Source: [JordSmit94, p 79]

Solution pour problème 8–45 :
Source : [JordSmit94, p 82]

(a) Die Distanz u ist als Funktion von v aufzufassen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u} &= \frac{1}{f}-\frac{1}{v}=\frac{v-f}{v\,f}\\
g\,(v) &= u=\frac{v\,f}{v-f}\\
g'(v) &= \frac{d}{dv}\,u=\frac{f\,(v-f)-v\,f}{(v-f)^2}=\frac{-f^2}{(v-f)^2}=\frac{-1^2}{0.5^2}=-4\\
\Delta u &\approx g'\,(v)\,\Delta v=-4\cdot\Delta v
\end{aligned}$$

(b) Ici on a $\Delta v=-0.2$ [m] et donc $\Delta u\approx -4\cdot\Delta v=+0.8$ [m].

Une cntrolle numérique montre

$$\begin{aligned}
v=1.50\text{ [m]} &\implies u=3\text{ [m]}\\
v=1.30\text{ [m]} &\implies u=4.33\text{ [m]}\\
v=1.48\text{ [m]} &\implies u=3.08\text{ [m]}
\end{aligned}$$

Donc pour $\Delta v=-0.2$ l'approximation linéaire rend l'ordre de grandeur correct, mais la valeur differe. Pour $\Delta v=-0.02$ l'approximation est d'une bonne qualité.

Solution pour problème 8–46 :

(a)

$$\begin{aligned}
g\,(u) &= v=\frac{1}{1/f-1/u}=\frac{u\,f}{u-f}\\
g\,(u) &= v=\frac{u\,f}{f-u}\\
g'(u) &= \frac{d}{du}\,v=\frac{f\,(u-f)-u\,f}{(f-u)^2}=\frac{-f^2}{(f-u)^2}\approx -2.25\\
\Delta v &\approx g'\,(u)\,\Delta u=-2.25\cdot\Delta u
\end{aligned}$$

(b) Ici on a $\Delta u=+0.05$

$$\Delta v\approx g'\,(u)\,\Delta u\approx -2.25\cdot 0.05\approx -0.11\text{ [m]}$$

Solution pour problème 8–47 : Verwende eine lineare Approximation $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$ und somit $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$. Die unabhängige Variable ist R_1 und die abhängige Variable ist der Winkel α .

(a) Verwende die Kettenregel um die Ableitung zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,\alpha}{\partial R_1} &= \frac{2\,(1+\nu)\,L\,M}{E}\;\frac{\frac{\pi}{2}\,4\,R_1^3}{J^2}=\frac{2\,(1+\nu)\,L\,M}{E\,J}\;\frac{4\,R_1^3}{\left(R_2^4-R_1^4\right)}=\alpha\;\frac{4\,R_1^3}{\left(R_2^4-R_1^4\right)}\\
\Delta\alpha &\approx \frac{\partial\,\alpha}{\partial R_1}\,\Delta R_1=\alpha\;\frac{4\,R_1^3}{R_2^4-R_1^4}\,\Delta R_1
\end{aligned}$$

(b) Division durch α führt auf

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}=\frac{4\,R_1^4}{R_2^4-R_1^4}\;\frac{\Delta R_1}{R_1}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{2\,(1+\nu)\,L}{E}\,\frac{2}{\pi\,\left(R_2^4-R_1^4\right)} \approx 0.0448 = 2.57^\circ \\
|\Delta\alpha| &\leq \alpha\,\frac{4\,R_1^3}{R_2^4-R_1^4}\,|\Delta R_1| \approx 8.89\,|\Delta R_1| \leq \frac{\pi}{180} \approx 0.017453 \\
|\Delta R_1| &\leq 0.0019 \text{ m} = 1.9 \text{ mm}
\end{aligned}$$

Diese Variation ist zu gross um noch mittels einer linearen Approximation behandelt werden zu können. Besser wäre eine Toleranz von 0.1° zu verlangen.

Solution pour problème 8–48 : Die beiden Grössen Volumen V und Oberfläche S sind durch den Radius r miteinander verbunden. Der Radius hängt von der Zeit t ab. Die Änderungsrate (Ableitung) des Volumens ist gegeben. Daraus ergibt sich eine Bedingung an die Anderungsrate des Radius.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,V(t) &= -c\,S(t) \\
\frac{d}{dt}\,\frac{4\,\pi}{3}\,r^3(t) &= -c\,4\,\pi\,r^2(t) \\
4\,\pi\,r^2(t)\,\dot r(t) &= -c\,4\,\pi\,r^2(t) \\
\dot r(t) &= -c \\
r(t) &= r(0) - c\,t \\
r(6) = 1 &= 2 - c\,6 \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{1}{6} \\
r(t) &= 2 - \frac{t}{6}
\end{aligned}$$

Solution pour problème 8–49 : On a

$$V = h^2\;L$$

et par conséquent

$$\frac{d}{dt}\;V = 2\;L\;h\;\dot h$$

A l'instant en question on a $L = 2$ $[m]$, $h = 0.25$ $[m]$ et $\dot V = 900 \cdot 10^{-6}[\text{m}^3/\text{s}] = 9 \cdot 10^{-4}[\text{m}^3/\text{s}]$. Donc:

$$\dot h = \frac{\dot V}{2\;L\;h} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 0.25}\;[\text{m/s}] = 0.09\;[\text{cm/s}]$$

Solution pour problème 8–50 : 4.68 m/s

Solution pour problème 8–51 : $87.5\sqrt{2}$ km/h

Solution pour problème 8–52 :

(a)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -b\,e^{-b\,x}\,\sin(a\,x) + a\,e^{-b\,x}\,\cos(a\,x) \\
f'(\pi/2) &= e^{-\pi b/2}\,\left(-b\,\sin(a\,\pi/2) + a\,\cos(a\,\pi/2)\right) = 0 \\
0 &= -b\,\sin(a\,\pi/2) + a\,\cos(a\,\pi/2)
\end{aligned}$$

(b)

$$b = a\,\frac{\cos(a\,\pi/2)}{\sin(a\,\pi/2)}$$

(c)

$$\begin{aligned}
g(a) &= b = a\,\frac{\cos(a\,\pi/2)}{\sin(a\,\pi/2)} \\
\frac{d\,g(a)}{da} &= \frac{\cos(a\,\pi/2)}{\sin(a\,\pi/2)} + a\,\frac{-\pi/2\,\sin^2(a\,\pi/2) - \pi/2\,\cos^2(a\,\pi/2)}{\sin^2(a\,\pi/2)} \\
\frac{d\,g(1)}{da} &= 0 - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Donc

$$b \approx g(1) + g'(1)\,\Delta a = 0 - \frac{\pi}{2}\,\Delta a$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\Delta b &\approx -\frac{\pi}{2}\,\Delta a \\
|\Delta a| &\leq \frac{2}{\pi}\,0.1 \approx 0.0637
\end{aligned}$$

Solution pour problème 8–53 : La valeur de $z \approx 0$ soit fixe. Puis la valeur de $x = \ln(1+z)$ est donnée comme solution de l'équation $f(x) = e^x - 1 - z = 0$.

(a) Avec $f(x) = e^x - 1 - z$ on a $f'(x) = e^x$ et donc

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - 1 - z}{e^{x_n}} = x_n - 1 + (1+z)\,e^{-x_n}$$

A cause de $z \approx 0$ et $e^0 = 1$ on arrive à $x \approx 0$ et on choisit la valeur initialle $x_0 = 0$. Puis on trouve

$$x_1 = x_0 - 1 + (1+z)\,e^{-x_0} = z$$

Donc une première approximation de $ln(1+z)$ est donnée par $x_1 = z$. Cette formule coincide avec l'approximation de Taylor de l'ordre 1 .

(b) Un deuxième pas de Newton rend

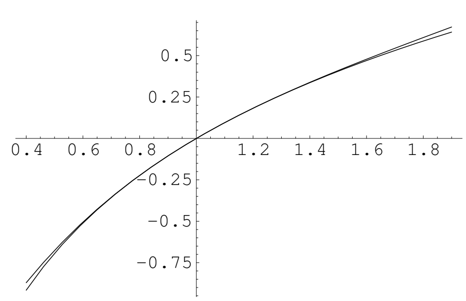
$$x_2 = x_1 - 1 + (1+z)\,e^{-x_1} = z - 1 + (1+z)\,e^{-z}$$

Donc une meilleure approximation de $\ln(1+z)$ est donnée par x_2 . Avec $x = 1+z$ on trouve $\ln x \approx x - 2 + x\,e^{-(x-1)}$ pour $x \approx 1$.

(c) On a

$$\begin{aligned}
z &= 0.2 \\
\ln 1.2 &\approx 0.182322 \\
x_2 &= 0.2 - 1 + (1+0.2)\,e^{-0.2} \\
&= 0.182477
\end{aligned}$$

et comme prevue la difference de x_2 et $\ln(1+z)$ est très petite La graphique à droite montre les graphes de $\ln(x)$ et $x - 2 + x\,e^{-(x-1)}$



Solution pour problème 8–55 :

(a)

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
f(x) &= y - \cosh(x) \\
f'(x) &= -\sinh(x) \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{y - \cosh(x_n)}{-\sinh(x_n)} = x_n + \frac{y - \cosh(x_n)}{\sinh(x_n)}
\end{aligned}$$

(b) Für $x > 1$ ist $e^{-x} \ll e^x$ und somit

$$\begin{aligned}
y &= \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \approx \frac{1}{2}\, e^x \\
x &\approx \ln(2\, y) = x_0 \\
x_1 &= x_0 + \frac{y - \cosh(x_0)}{\sinh(x_0)} = \ln(2\, y) + \frac{y - \cosh(\ln(2\, y))}{\sinh(\ln(2\, y))}
\end{aligned}$$

(c) Wähle als Startwert $x_0 = \ln(2 \cdot 4) \approx 2.07944$. Man erhält

$$x_1 = \ln(8) + \frac{y - \cosh(\ln(8))}{\sinh(\ln(8))} \approx 2.06357$$

Das Resultat ist bereits eine gute Approximation von $\cosh^{-1}(4) \approx 2.06344$. Ein weiterer Schritt des Verfahrens von Newton führt auf $x_2 \approx 2.06344$. Der Fehler ist ca. $9 \cdot 10^{-9}$.

Solution pour problème 8–56 : Die zu lösende Gleichung ist $f(x) = 2 + x^2 - e^x = 0$. Die Iterationsvorschrift von Newton lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2 + x_n^2 - e^{x_n}}{2\, x_n - e^{x_n}}$$

Als Startwerte kommen entweder $x_0 = 1$ oder $x_0 = 2$ in Frage. Das führt auf

$x_0 = 1$	$x_1 = 1.39221$	$x_2 = 1.32323$
$x_0 = 2$	$x_1 = 1.59013$	$x_2 = 1.37212$

Einige weitere Iterationen zeigen, dass die Lösung gegeben ist durch $x \approx 1.31907$.

Solution pour problème 8–58 :

$$f'(x) = (1 - x)\, e^{-x}$$

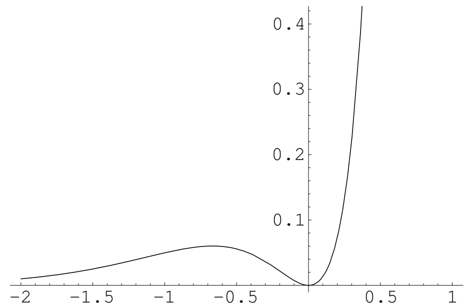
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n\, e^{-x_n}}{(1 - x_n)\, e^{-x_n}} = x_n - \frac{x_n}{(1 - x_n)}$$

avec $x_0 = 1.5$ on a $x_1 = 4.5$ et $x_2 \approx 5.78571$. Par conséquent, toutes les valeurs de z doivent être examinées, où

$$\begin{aligned}
z &= x - \frac{x}{1 - x} = \frac{-x^2}{1 - x} \quad \text{avec} \quad x > 1 \\
\frac{d\,z}{dx} &= \frac{-2\,x\,(1 - x) - x^2}{(1 - x)^2} = \frac{-2\,x + x^2}{(1 - x)^2} = 0
\end{aligned}$$

Donc la fonction admet un point critique en $x = 2$ qui donne une valeur $z = 4$.

Solution pour problème 8–59 :



Il faut trouver un zéro de la dérivée

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(x) = 2\,x\,e^{3x} + 3\,x^2\,e^{3x} = (2\,x + 3\,x^2)\,e^{3x} \\ g'(x) &= f''(x) = (2 + 6\,x + 6\,x + 9\,x^2)\,e^{3x} = (2 + 12\,x + 9\,x^2)\,e^{3x} \end{aligned}$$

Cela mène à la formule d'itération

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g\,(x_n)}{g'\,(x_n)} = x_n - \frac{(2\,x_n + 3\,x_n^2)\,e^{3x_n}}{(2 + 12\,x_n + 9\,x_n^2)\,e^{3x_n}} = x_n - \frac{2\,x_n + 3\,x_n^2}{2 + 12\,x_n + 9\,x_n^2}$$

D'après la figure $x_0 = a_2 = \frac{-1}{2}$ peut être utilisé comme valeur initiale. On obtient les nombres

$$x_1 = \frac{-1}{2} - \frac{-1 + \frac{3}{4}}{2 - 6 + \frac{9}{4}} = \frac{-1}{2} - \frac{-4 + 3}{-16 + 9} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-7} = -\frac{9}{14}$$

Solution pour problème 8–61 :

$$f\,(x) = e^x - x^3 \quad \text{et} \quad f'\,(x) = e^x - 3\,x^2$$

Donc:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\,(x_n)}{f'\,(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - x^3}{e^{x_n} - 3\,x^2}$$

Avec une valeur initiale de $x_0 = 3.0$ on obtient

$$x_1 = 2.0 \quad , \quad x_2 = 1.8675 \quad , \quad x_3 = 1.85725 \quad , \quad x_4 = 1.85718 \qquad \ldots$$

Solution pour problème 8–63 :

(a) Zu lösen ist die Gleichung $g(x) = \sin(x)\,e^x - 1 = 0$. Da die Lösung in der Nähe von $n\,\pi$ liegen muss, verwenden wir diesen Wert als Startwert für das Verfahren von Newton.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x)\,e^x - 1 \\ g'(x) &= \cos(x)\,e^x + \sin(x)\,e^x \\ x_n &\approx n\,\pi - \frac{g(n\,\pi)}{g'(n\,\pi)} = n\,\pi - \frac{\sin(n\,\pi)\,e^{n\,\pi} - 1}{\cos(n\,\pi)\,e^{n\,\pi} + \sin(n\,\pi)\,e^{n\,\pi}} = n\,\pi - \frac{0 - 1}{(-1)^n\,e^{n\,\pi} + 0} \\ &= n\,\pi + (-1)^n\,e^{-n\,\pi} \end{aligned}$$

(b)

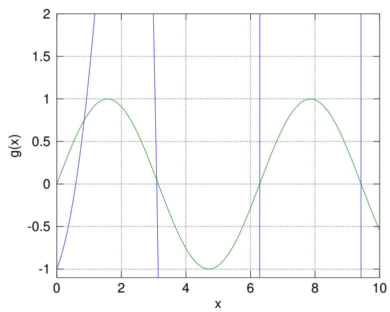
$$x_2 = 2\,\pi + e^{-2\,\pi} \approx 2\,\pi + 0.00187 \approx 6.2851$$

(c) Für grosse Werte von x ist e^x extrem gross und somit muss $\sin(x)$ fast Null sein, damit das Produkt $\sin(x)\,e^x = 1$ erfüllt. Wir erwarten die 1–Stellen von $f(x)$ in der Nähe der Nullstellen von $\sin(x)$, weil $\sin(x) = e^{-x}$ sein muss. Der Abstand von $n\,\pi$ zu x_n ist gegeben durch $\exp(-n\,\pi)$ und für grosse Werte von n wird diese Zahl extrem klein. Somit wird der berechnete Wert sehr nahe bei der wahren Nullstelle liegen. Der untenstehende Code erzugt den Graphen von $g(x)$ und $\sin(x)$.

Octave

```
n = 2;
function y = g(x)
  y = sin(x).*exp(x)-1;
endfunction

xn = n*pi+(-1)^n*exp(-n*pi)
xnOctave = fsolve(@g,n*pi)
Difference = xn - xnOctave
x = 0:0.1:10;
plot(x,g(x),x,sin(x))
xlabel('x'); ylabel('g(x)');
axis([0,10,-1.1,2]);
```



Solution pour problème 8–64 :

(a) On veut résoudre l'équation $f(x) = e^x - z = 0$. A cause de $z \approx 1$ on utilise la valeur initiale $x_0 = 0$ et on obtient

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1-z}{1} = z - 1$$

(b)

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = z - 1 - \frac{e^{z-1} - z}{e^{z-1}} = z - 2 + z\,e^{1-z}$$

(c) Les valeurs de $x_2 \approx 0.09532$ et de $\ln 1.1 \approx 0.095310$ ne diffèrent que peu l'une de l'autre.

Solution pour problème 8–65 : A cause de

$$f'(x) = e^{-2x}\,(1 - 2\,x)$$

on a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n\,e^{-2x_n}}{e^{-2x_n}\,(1-2\,x_n)} = x_n - \frac{x_n}{1-2\,x_n} = \frac{-2\,x_n^2}{1-2\,x_n}$$

(a) La condition $x_1 = 5$ mène donc à l'équation

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{-2\,x_0^2}{1-2\,x_0} \\ 5 - 10\,x_0 &= -2\,x_0^2 \\ 2\,x_0^2 - 10\,x_0 + 5 &= 0 \\ x_0 &= \frac{1}{4}\,\left(10 \pm \sqrt{100-40}\right) = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

(b) En étudiant le graphe de $f(x)$ et en appliquant la méthode de Newton graphiquement on trouve $L = \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Solution pour problème 8–67 :

(a) Nous éliminons le courant I et obtenons

$$V_s - V = I\ R = I_s\,(e^{k\,V} - 1)\ R$$

(b) Il faut résoudre l'équation

$$f\,(V) = V_s - V - I_s\,(e^{k\,V} - 1)\ R = 0$$

A cause de

$$f'\,(V) = \frac{d}{dV}\ f\,(V) = -1 - k\,I_s\,R\,e^{k\,V}$$

on obtient

$$V_1 = V_0 - \frac{f\,(V_0)}{f'\,(V_0)}$$

(c) Si $V_0 = 0$ on a donc

$$V_1 = 0 - \frac{f\,(0)}{f'\,(0)} = \frac{V_s - I_s\,(1-1)\ R}{1 + k\,I_s\,R} = \frac{V_s}{1 + k\,I_s\,R}$$

(d) Deux itérations avec la méthode de Newton fournissent

$$V_1 \approx 0.581\,V \quad \text{et} \quad V_2 \approx 0.569\,V$$

La solution ≪exacte≫ est $0.565\,V$.

Solution pour problème 8–68 :

(a) Soit $y = g(x)$ l'équation de la tangente.

$$\begin{aligned} g\,(x) &= f\,(z) + f'\,(z)\,(x - z) \\ &= e^z\ \sin z + (e^z\ \sin z + e^z\ \cos z)\ (x - z) \end{aligned}$$

(b) Dans l'équation ci-dessus il faut que $g(0) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0 &= e^z\ \sin z + (e^z\ \sin z + e^z\ \cos z)\ (0 - z) \\ 0 &= e^z\ (\sin z - (\sin z + \cos z)\ z) \\ 0 &= \sin z - (\sin z + \cos z)\ z = h\,(z) \end{aligned}$$

(c) Cette équation peut être résolue à l'aide de la méthode de Newton où on peut utiliser comme point initial $z_0 = 2$ (voir la figure). Il nous faut résoudre une équation $h(z) = 0$ avec une fonction appropriée h.

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 - \frac{h\,(z_0)}{h'(z_0)} \\ z_1 &= z_0 - \frac{\sin z_0 - (\sin z_0 + \cos z_0)\ z_0}{\cos z_0 - (\cos z_0 - \sin z_0)\ z_0 - (\sin z_0 + \cos z_0)} \\ &= z_0 + \frac{\sin z_0 - (\sin z_0 + \cos z_0)\ z_0}{(\cos z_0 - \sin z_0)\ z_0 + \sin z_0} \\ &= 2 + \frac{\sin 2 - (\sin 2 + \cos 2)\ 2}{(\cos 2 - \sin 2)\ 2 + \sin 2} \approx 2.04421 \end{aligned}$$

Un calcul analogue mène à $z_2 \approx 2.04279$. Les chiffres donnés sont identiques avec ceux de la solution ≪juste≫.

Solution pour problème 8–69 : Evidemment,

$$f(x) = z - \frac{1}{x} = 0$$

implique $x = 1/z$. On peut donc utiliser le résultat du processeur pentium pour $x_0 = 1/x$ comme valeur initiale pour la méthode de Newton. On a

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

et par conséquent

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{z - 1/x_n}{1/x_n^2} = 2\,x_n - z\,x_n^2 = x_n\,(2 - z\,x_n)$$

Pour une itération de la méthode de Newton, il faut effectuer deux multiplications et une soustraction, mais pas de division (ce qui est très important). Puisque la valeur initiale possède déjà 4 à 5 décimales correctes, au moins 16 décimales sont correctes après deux itérations de la méthode.

8.10 Résumé

Après avoir étudié**?** fond ce chapitre vous devriez être capable

- d'examiner des extrema des fonctions d'une seule variable. De plus, vous connaissez quelques exemples typiques.
- d'effectuer des études complètes d'une fonction.
- de calculer des dérivées implicites et des dérivées des fonctions réciproques.
- d'appliquer l'idée de l'approximation linéaire pour estimer des erreurs et de calculer des fonctions approximativement.
- d'utiliser la méthode de Newton pour résoudre des équations d'une seule inconnue. Vous devriez connaître à fond les avantages et les désavantages de la méthode.
- d'approcher les fonctions en effectuant une interpolation par intervalle par des polynômes de degré 1 et 2. Vous devriez aussi connaître à fond le comportement typique de l'erreur.

Bibliographie

[Apos92a] T. M. Apostol and other. *A Century of Calculus, Part I 1894–1968*. The Mathematical Association of America, 1992.

[Apos92b] T. M. Apostol and other. *A Century of Calculus, Part II 1969–1991*. The Mathematical Association of America, 1992.

[Blum84] G. W. Bluman. *Problem Book for First Year Calculus*. Springer, New York, 1984.

[Bon91] C. Bondi. *New Applications of Mathematics*. Penguin Books, London, 1991.

[Bron93] I. Bronstein, K. Semendjaev, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1993.

[JordSmit94] D. Jordan and P. Smith. *Mathematical Techniques*. Oxford University Press, Oxford, England, 1994.

[Klin77] M. Kline. *Calculus, an Intuitive and Physical Approach*. John Wiley and Sons, 1977.

[Leup85] W. Leupold and other. *Analysis für Ingenieure*. Harry Deutsch Verlag, Thun und Frankfurt, 16. edition, 1985.

[MeybVach90] K. Meyberg and P. Vachenauer. *Höhere Mathematik I*. Springer, Berlin, 1990.

[Nick91] H. Nickel and other. *Algebra und Geometrie für Ingenieure*. Fachbuchverlag, Leipzig, 1991.

[TenePoll85] M. Tenenbaum and H. Pollard. *Ordinary Differential Equations*. Dover, New York, 1985.

[Walt85] W. Walter. *Analysis I*. Springer–Verlag, Berlin, 1985.

Liste des figures

2.1 Graphe de la function $y = 2 + 2x$ . . . 17
2.2 graphe de la function $y = x^2$ . . . 19
2.3 Translation d'une parabole . . . 23
2.4 Transformation d'une ellipse dans un cercle . . . 24
2.5 Transformation d'une deuxième ellipse dans un cercle . . . 24

3.1 Graphe de $f(x) = 1 + 3\,x - 2\,x^2$ . . . 39
3.2 Graphe de $f(x) = 2x^3 - x + 4$ . . . 43
3.3 Polynômes de base pour l'interpolation de Lagrange . . . 50
3.4 Polynôme d'interpolation . . . 50
3.5 Schéma des différences divisées . . . 52
3.6 Interpolation linéaire par morceaux pour la population des Etats–Unis . . . 55
3.7 Interpolation par un polynôme du degré neuf pour la population des Etats–Unis . . . 56
3.8 Graphe d'une fonction rationnelle impropre . . . 60

4.1 angles en radians . . . 81
4.2 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ dans un triangle droit . . . 82
4.3 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ dans un cercle d'unité . . . 82
4.4 graphes de $\sin\alpha$ . . . 83
4.5 graph de $\cos\alpha$ . . . 83
4.6 théorème d'addition . . . 84
4.7 graphe de la fonction $\tan x$ . . . 85
4.8 règle du sinus . . . 86
4.9 $\sin(x)$ avec domaine de définition restreinte . . . 87
4.10 graphe de $\arcsin(x)$ . . . 87
4.11 graphe de $\cos(x)$ avec domaine de définition restreinte et de $\arccos(x)$ . . . 88
4.12 graphe de $\arctan(x)$ . . . 88
4.13 battement . . . 93
4.14 battement approximative . . . 93
4.15 amplificateur Lock In . . . 93
4.16 une régulation par force centrifuge . . . 95
4.17 angle de déflexion pour ne régulation par force centrifuge . . . 95
4.18 preuve du théorème d'addition de cosinus . . . 97

5.1 Graphe de $f(x) = e^x$ . . . 112
5.2 Graphe de $f(x) = \ln(x)$ . . . 113
5.3 Courbe de cloche de Gauss . . . 115
5.4 Graphes de $y = e^x$ et $y = 5^x$ . . . 116
5.5 Graphes de $\cosh x$ et $\sinh x$ . . . 118
5.6 Chaînette . . . 120
5.7 Graphes des fonctions $y = \text{Arsinh}(x) = \sinh^{-1}(x)$ et $y = \text{Arcosh}(x) = \sinh^{-1}(x)$ . . . 122

5.8 Élement RC 124
5.9 Échelle linéaire et logarithmique pour la tension d'un élément RC 124
5.10 Un ressort avec une masse attaché 125
5.11 Plot de Bode pour le facteur amplification d'un système masse ressort 125
5.12 Plot des amplitudes pour un filtre passe-haut et un filtre passe-bas 128
5.13 Plot de Bode d'un filtre passe-bas 135

6.1 Bisection 151
6.2 Illustration pour des doubles séries 169
6.3 Graphe de $(\sin x)/x$ 172
6.4 Graphe de $\sin(1/x)$ 174
6.5 Preuve de $\frac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$ 178
6.6 Théorème de Bolzano 181

7.1 Position en fonction du temps 205
7.2 Graphe de $f(x) = \sin^6 x + x$ avec sécante et tangente 207
7.3 Agrandissement du graphe, de la sécante et de la tangente 207
7.4 Graphe de $|x|$ 210
7.5 $\sin(x)$ et l'approximation d'ordre 3 229
7.6 $\sin(x)$ et l'approximation d'ordre 10 229
7.7 Approximation de e^x par une fraction rationnelle 234

8.1 Extrema locaux et globaux 265
8.2 Extremum correspondant à une extrémité de l'intervalle 266
8.3 Graphe de $f(x) = (1-x)^2 \sin x$ 268
8.4 Distance minimale entre un point et une droite 269
8.5 Jet d'eau sortant d'un cylindre 270
8.6 Adaption de la puissance d'une résistance 271
8.7 Réfraction 272
8.8 Graphe de $f(x) = x/(1+x^2)$ 277
8.9 Graphe d'une fonction rationnelle 277
8.10 Solution de l'équation $y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0$ 279
8.11 Pont de Wheatstone 283
8.12 Pont de Wheatstone: résistance comme fonction de la position 283
8.13 Idée de la méthode de Newton 287
8.14 graphe de $f(x) = x^5 - 3\,x + 1$ 289
8.15 division par zéro dans la méthode de Newton 292
8.16 Oscillations dans la méthode de Newton 293
8.17 Manège à sièges suspendus par des chaînes 294
8.18 chaînette 295
8.19 Funktion gegeben durch einige Werte 298
8.20 Interpolation durch eine Parabel 301
8.21 Parametrische Spline–Interpolation 303
8.22 Spline– und Polynom–Interpolation 307
8.23 Polynom–Interpolation durch 9 Stützpunkte 309
8.24 Spline–Interpolation durch 9 Stützpunkte 309
8.25 Poutre suspendue 310
8.26 Graphe de la fonction $f_\lambda(x) = \cosh(x) + \frac{\lambda}{1+x^2}$ pour $\lambda = 0.1$ et $\lambda = 2$ 315

Liste des tableaux

3.1 Population des Etats–Unis, 1900–1990 55

4.1 propriétés des fonctions inverse trigonométriques 88
4.2 FM radio transmission 94

5.1 Propriétés des fonction exponentielle et logarithmique 117
5.2 Propriétés des fonction hyperboliques 123

6.1 $\sin x \approx x$ pour $|x| \ll 1$ 178

7.1 Tableau de dérivées des fonctions élémentaires 216

8.1 Comportement qualitatif des courbes 275
8.2 Comportement qualitatif en des points critiques 275