Analysis 1

Andreas Stahel

10. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Gleichungen, Ungleichungen, Lösungen

Dieses Kapitel ist eine Repetition von bereits bekanntem Stoff und Methoden.

1.1 Grunddefinitionen

Wir betrachten eine Gleichung mit einer Unbekannten, der Variablen. Gesucht werden alle möglichen Werte der Variablen, für welche die Gleichung (Ungleichung) erfüllt ist.

1–1 Beispiel :

$$\begin{aligned} 7x + 15 &= 3 && \text{Variable : } x \\ 7x &= 3 - 15 \\ x &= \frac{-12}{7} && \text{germandie Lösung} \end{aligned}$$

♢

1–2 Definition : Die Menge aller Lösungen der Gleichung heisst auch **Lösungsmenge**.

Es ist durchaus möglich, dass eine Gleichung keine, eine oder viele Lösungen hat.

1–3 Beispiel :

$x^2 + 4 = 0$	$7x + 15 = 3$	$x^2 - 4 = 0$
keine (reelle) Lösung	genau eine Lösung	zwei Lösungen
$L = \{\} = \emptyset$	$L = \{-12/7\}$	$L = \{+2, -2\}$

♢

1–4 Definition : Zwei Gleichungen heissen **äquivalent**, falls sie dieselbe Lösungsmenge haben. Typischerweise versucht man, komplizierte Gleichungen in eine einfachere, aber äquivalente Form zu bringen.

1–5 Satz : *Hier ist eine Liste von Operationen, welche eine Gleichung in eine andere, äquivalente Form bringen. Man spricht von Äquivalenztransformationen.*

- *Addition desselben Ausdrucks zu beiden Seiten einer Gleichung.*
- *Subtraktion desselben Ausdrucks von beiden Seiten einer Gleichung.*
- *Multiplikation beider Seiten mit einem von Null verschiedenen Term.*
- *Division beider Seiten durch einen von Null verschiedenen Term.*

1–6 Beispiel :

$$\begin{aligned}
\tfrac{15x-3}{7} &= -2 && \mid \cdot 7 \\
15x-3 &= -14 && \mid +3 \\
15x &= -11 && \mid \div 15 \\
x &= \tfrac{-11}{15}
\end{aligned}$$

♢

1–7 Beispiel :

$$\begin{aligned}
3x-3\cdot 7 &= 2\cdot 7-2x \\
3\,(x-7) &= -2\,(x-7) && \mid \div (x-7) \\
3 &= -2
\end{aligned}$$

Weshalb scheitert diese Rechnung? ♢

1–8 Satz : *Eine Gleichung heisst* **linear** *bezüglich der Variablen x, falls sie von der Form*

$$a\,x+b=0$$

ist, wobei $a\neq 0$ und b Konstanten sind. Die eindeutig bestimmte Lösung ist gegeben durch

$$x=-\,\frac{b}{a}$$

1.2 Quadratische Gleichungen, Vervollständigung des Quadrates

Die Basis für die Überlegungen in diesem Abschnitt ist die bekannte binomische Formel

$$(a+b)^2=a^2+2\,a\,b+b^2$$

Zu finden sind alle Lösungen der Gleichung $ax^2+bx+c=0$, wobei a, b und c reelle Konstanten sind mit $a\neq 0$.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0 && \mid \div a \\
x^2+2\,\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a} &= 0 && \mid +\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \\
(x+\frac{b}{2a})^2 &= \frac{1}{4a^2}\,(b^2-4ac)
\end{aligned}$$

Nun kann man auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel ziehen. Dies wird aber nicht immer möglich sein. Wieso?

Bestimmt man die **Diskriminante** $D=b^2-4ac$, so sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

(A) $D=b^2-4ac>0$ führt zu zwei verschiedenen Lösungen

$$x_{1,2}=\frac{1}{2a}\,(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2a}\,(-b+\sqrt{b^2-4ac})\\ \frac{1}{2a}\,(-b-\sqrt{b^2-4ac})\end{array}\right.$$

(B) $D=b^2-4ac=0$ führt zu einer (doppelten) Lösung

$$x=\frac{-b}{2a}$$

(C) $D = b^2 - 4ac < 0$ liefert keine (reelle) Lösung, da die Wurzel einer negativen Zahl nicht bestimmt werden kann. Es gibt aber zwei komplexe Lösungen. ($i = \sqrt{-1}$)

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}\,(-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\,(-b + i\sqrt{4ac - b^2}) \\ \frac{1}{2a}\,(-b - i\sqrt{4ac - b^2}) \end{cases}$$

1–9 Satz : *Für eine quadratische Gleichung*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

mit zwei reellen Lösungen x_1 und x_2 können die **Formeln von Vieta** *leicht verifiziert werden.*

$$x_1 + x_2 = -\,\frac{b}{a} \quad \textit{und} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Zudem gilt die **Faktorisierung**

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

1–10 Beispiel : Um die Gleichung

$$3x^2 - 8x - 4 = 0$$

mittels Vervollständigung des Quadrates zu lösen, rechnet man

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x - 4 &= 0 \\ x^2 - 2\,\tfrac{4}{3}\,x - \tfrac{4}{3} &= 0 \\ x^2 - 2\,\tfrac{4}{3}\,x + \left(\tfrac{4}{3}\right)^2 - \left(\tfrac{4}{3}\right)^2 - \tfrac{4}{3} &= 0 \\ \left(x - \tfrac{4}{3}\right)^2 &= +\left(\tfrac{4}{3}\right)^2 + \tfrac{4}{3} = \tfrac{4\cdot 7}{9} \\ x - \tfrac{4}{3} &= \pm\,\tfrac{2}{3}\,\sqrt{7} \\ x &= \tfrac{4 \pm 2\sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

Das Resultat kann leicht mit der direkten Lösungsformel verglichen werden.

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}\,(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) = \frac{1}{2 \cdot 3}\,(+8 \pm \sqrt{64 + 48}) = \frac{1}{2 \cdot 3}\,(+8 \pm 4\sqrt{7})$$

♢

Gleichungen, die **Wurzelausdrücke** enthalten, können oft zu quadratischen Gleichungen umgeformt werden, indem die Wurzel auf einer Seite isoliert wird. Durch Quadrieren wird dann das Wurzelzeichen verschwinden. Dies ist aber **keine Äquivalenztransformation**. Deshalb müssen alle Lösungen mit der ursprünglichen Wurzelgleichung verifiziert werden.

1–11 Beispiel : Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} \sqrt{2x - 3} + 5 - 3x &= 0 \\ \sqrt{2x - 3} &= 3x - 5 && \mid \text{quadrieren} \\ 2x - 3 &= (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25 \\ 9x^2 - 32x + 28 &= 0 \\ x_{1,2} &= \tfrac{1}{18}(+32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 9 \cdot 28}) = \begin{cases} 2 \\ \frac{14}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Nun müssen beide Lösungen verifiziert werden, und es stellt sich heraus, dass nur $x = 2$ auch Lösung der ursprünglichen Gleichung ist.

Somit ist die Lösungsmenge gegeben durch $L = \{2\}$. ♢

Eine Gleichung ist von **quadratischer Form**, falls sie quadratisch ist bezüglich einer Funktion der Variablen. Gleichungen dieser Art können oft durch eine geeignete **Substitution** gelöst werden.

1–12 Beispiel : Um die **biquadratische Gleichung**

$$x^4 + x^2 - 12 = 0$$

zu lösen, kann man die Substitution $z = x^2$ einsetzen und erhält

$$z^2 + z - 12 = (z+4)\,(z-3) = 0$$

mit den Lösungen

$$z_1 = -4 \quad \text{und} \quad z_2 = 3$$

Da x^2 nicht negativ ist, kommt nur die positive Lösung von z in Frage, und wir erhalten für die ursprüngliche Gleichung die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

♢

1.3 Ungleichungen

1–13 Beispiel : Finden Sie alle Werte von x mit

$$7x + 10 \geq 2$$

Hierzu schreibt man die Ungleichung um zu

$$x \geq \frac{-8}{7}$$

und kann nun leicht eine graphische Darstellung der Lösungsmenge $L = [\frac{-8}{7}, \infty)$ angeben. ♢

1–14 Definition : Zwei Ungleichungen heissen **äquivalent**, falls sie dieselbe Lösungsmenge haben. Typischerweise versucht man, komplizierte Ungleichungen in eine einfachere, aber äquivalente Form zu bringen.

1–15 Satz : *Hier eine Liste von Operationen, welche eine Ungleichung in eine äquivalente Form bringen. Man spricht von Äquivalenztransformationen.*

- *Addition desselben Ausdrucks zu beiden Seiten einer Ungleichung.*
- *Subtraktion desselben Ausdrucks von beiden Seiten einer Ungleichung.*
- *Multiplikation beider Seiten mit einem positiven Term.*
- *Division beider Seiten durch einen positiven Term.*
- *Multiplikation (oder Division) beider Seiten mit einem negativen Term und gleichzeitiges „Umkehren“ des Ungleichheitszeichens.*

$$< \;\to\; > \quad , \quad > \;\to\; < \quad , \quad \leq \;\to\; \geq \quad , \quad \geq \;\to\; \leq$$

1–16 Beispiel : Die Lösungsmenge der Ungleichung

$$2x^3 - 2x > -3x^2$$

ist gegeben durch $L = (-2, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$. $\diamondsuit$

1–17 Beispiel : Um die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{1}{x+4} \geq \frac{1}{3x+2}$$

zu finden, sollte man

1. den Definitionsbereich finden
2. die Vorzeichen von $x + 4$ und $2x + 3$ beachten
3. die Lösungsmenge graphisch aufzeichnen

Das Resultat ist $L = (-4, -\frac{2}{3}) \cup [1, \infty)$. $\diamondsuit$

1.4 Aufgaben

• Aufgabe 1–1:
Ausgehend von einem quadratischen Stück Weissblech muss eine Schachtel mit einem Volumen von 24 dm^3 hergestellt werden. Hierzu entfernt man in jeder Ecke ein kleines Quadrat mit Seitenlänge 2 dm und biegt dann die Seitenstücke nach oben. Wie gross muss das ursprüngliche Stück Blech sein?

• Aufgabe 1–2:
Zwei Röhren füllen ein Reservoir in 6h 40Min. Wie lange brauchen die einzelnen Röhren, falls bekannt ist, dass die grössere 3h weniger benötigt als die kleinere.

• Aufgabe 1–3:
Lösen Sie

$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = 3$$

• Aufgabe 1–4:
Trouver l'ensemble des solutions de l'équation
Finde die Lösungsmenge der Gleichung

$$4 - 2x^2 + \sqrt{2x^4 + 2} = 0$$

• Aufgabe 1–5:
Trouver l'ensemble des solutions de l'équation
Finde die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{1}{2x + 3^2} = \frac{3}{x+1}$$

• Aufgabe 1–6:
Trouver l'ensemble des solutions de l'équation
Finde die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{x}{2x + 3^2} = \frac{3}{x+1}$$

• **Aufgabe 1–7:**
Trouver l'ensemble des solutions de l'équation
Finde die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{x}{2x+3^2} = \frac{3x}{x+1}$$

• **Aufgabe 1–8:**
Trouver l'ensemble des solutions de l'équation
Finde die Lösungsmenge der Gleichung

$$8x^2 + 4\,x^3 = 5x$$

• **Aufgabe 1–9:**
Résoudre l'équation / Lösen Sie die Gleichung $1 = x^4 - 3\,x^2$

• **Aufgabe 1–10:**
Es sei $a \neq b$. Finden Sie die Lösungsmenge der Gleichung bezüglich der Variablen x

$$\frac{a+b}{a-b}\,x^2 = a^2 - b^2$$

• **Aufgabe 1–11:**
Es sei $a \neq b$ und $a \neq -b$. Finde die Lösungsmenge der Gleichung bezüglich der Variablen x

$$\frac{x}{a-b} + \frac{x}{a+b} = 1$$

• **Aufgabe 1–12:**
Lösen Sie die Gleichung $y = 2\,x + |2-x|$ explizit nach x als Funktion von y auf.

• **Aufgabe 1–13:**
Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

(a) $|x-3| + |x-7| = 2$

(b) $|x-3| + |x-7| = 4$

(c) $|x-3| + |x-7| = 6$

• **Aufgabe 1–14:**
Lösen Sie die Ungleichung $x^2 \leq 5x - 6$.

• **Aufgabe 1–15:**
Lösen Sie die Ungleichung $|3x-4| \leq 1$.

• **Aufgabe 1–16:**
Lösen Sie die Ungleichung $|x-5| \geq |x+2|$.

• **Aufgabe 1–17:**
Lösen Sie die Ungleichung $2 - x \geq |3x+1|$.

• **Aufgabe 1–18:**
Lösen Sie die Ungleichung

$$\frac{x^4 - x^2}{x^2+1} < 0$$

• **Aufgabe 1–19:**
Lösen Sie die Ungleichung
$$\frac{1-2x}{x+2} \leq 3$$

• **Aufgabe 1–20:**
Lösen Sie die Ungleichung
$$\frac{-2x+2}{x+2} < 3-x$$

• **Aufgabe 1–21:**
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Ungleichung
$$\frac{x}{x+1} < \frac{2}{x+2}$$
richtig?

• **Aufgabe 1–22:**
Lösen Sie die Ungleichung
$$\left| \frac{3x-8}{2} \right| \geq 4$$

• **Aufgabe 1–23:**
Lösen Sie die Ungleichung
$$|3x| \geq |6-3x|$$

• **Aufgabe 1–24:**
Finden Sie alle x, für die gilt: $\sqrt{1+x} < 1 + x/2$.

• **Aufgabe 1–25:**
Finden Sie eine einzige Ungleichung, welche die folgende Menge als Lösungsmenge hat.
$$L = [-1, 0] \cup [3, 5]$$

• **Aufgabe 1–26:**
(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung **exakt**.
$$x^3 - 7\,x^2 > 12\,x$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung.
$$x > \frac{x-1}{x^2-2}$$

• **Aufgabe 1–27:**
Lösen Sie die Ungleichung
$$\frac{x}{x-3} > x$$

• **Aufgabe 1–28:**
(a) Trouver les solutions **exactes** de $\sqrt{x-3} = 5-x$.
Finden Sie die **exakten** Lösungen von $\sqrt{x-3} = 5-x$.

(b) Pour quelles valeurs de α il y a des solutions de l'équation $\sqrt{x-3} = \alpha - x$?
Für welche Werte von α hat die Gleichung $\sqrt{x-3} = \alpha - x$ Lösungen?

Die untenstehenden Aufgaben sind dem Buch [Nick91] entnommen.

• Aufgabe 1–29:
Finden Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen

(a)

$$\frac{a}{x} + \frac{x}{a} = \frac{x}{a\,b} + \frac{a\,b^2}{x}$$

(b)

$$8\,x^2 - 6\,x + 1 = 0$$

• Aufgabe 1–30:
Finden Sie je eine quadratische Gleichung mit der angegebenen Lösungsmenge.

(a) $x = 3$ und $x = -2$

(b) $x = a + 2\,b$ und $x = 2\,a + b$

• Aufgabe 1–31:
Finden Sie die Lösungen der Gleichung

$$x^4 - 5\,x^2 + 4 = 0$$

• Aufgabe 1–32:
Finden Sie die Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{2\,x^2 + 4\,x - 6} - x - 3 = 0$$

• Aufgabe 1–33:
Finden Sie die Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{2\,x + 15} - \sqrt{x + 4} = 2$$

• Aufgabe 1–34:
Finden Sie die Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x - 4} = 3$$

• Aufgabe 1–35:
Finden Sie die Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{5\,x - 1} - \sqrt{8 - 2\,x} = \sqrt{x - 1}$$

• Aufgabe 1–36:
Bestimmen Sie die **Lösungsmengen** der folgenden Gleichungen und Ungleichungen **von Hand**.

$$\begin{array}{llcl@{\qquad}llcl}
\text{(a)} & 2\,x^2 - 3\,x - 2 & = & 0 & \text{(c)} & \sqrt{x^2 - 6\,x + 9} & = & x - 3 \\
\text{(b)} & x^8 - 3\,x^4 & = & 4 & \text{(d)} & \frac{x-1}{x+1} & < & 1
\end{array}$$

• Aufgabe 1–37:

Trouver les ensembles des solutions pour les problèmes suivantes. Donner des solutions exactes

Finden Sie die Lösungsmengen für die folgenden Probleme. Die Lösungen sind exakt anzugeben.

(a)

$$x^4 - x^2 - 6 = 0$$

(b)

$$x - 3 = \sqrt{x - 2}$$

(c)

$$3\,x^2 + 6\,x > 9$$

(d)

$$\frac{1}{(x-2)^2} \geq 1$$

• Aufgabe 1–38:
Der Inhalt eine Dreiecks, das einen rechten Winkel enthält, beträgt 24 dm^2. Die beiden Katheten unterscheiden sich um 2 dm. Wie lang sind sie?

• Aufgabe 1–39:
Wird der Radius eines Kreises verdoppelt, so verdoppelt sich der Flächeninhalt. Wie gross war der Radius?

• Aufgabe 1–40:
Wird der Radius eines Kreises um 3 Einheiten vergrössert, so verdoppelt sich der Flächeninhalt. Wie gross war der Radius?

• Aufgabe 1–41:
Durch eine Verbesserung im Betrieb kann ein Eisenbahnzug jetzt eine um 9 km/h höhere Durchschnittsgeschwindigkeit erreichen und erzielt dadurch auf einer Strecke von 180 km Länge eine Zeiteinsparung von 60 min. Wie viele Stunden benötigt er für die Strecke?

• Aufgabe 1–42:
Um die Tiefe eines Brunnens zu bestimmen, lässt man einen Stein hineinfallen und hört ihn nach 6 s im Wasser aufschlagen. Wie tief ist der Brunnen?
Schallgeschwindigkeit: 333 m/s . Erdbeschleunigung g = 9.81 m/s^2. Die Bremswirkung der Luft kann vernachlässigt werden.

1.4.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1–1 : 7.464 dm

Lösung zu Aufgabe 1–2 : Die kleinere Röhre füllt das Reservoir in 15h, die grössere in 12h.

Lösung zu Aufgabe 1–3 : $x = 5/3$

Lösung zu Aufgabe 1–8 : $L = \{0, 0.5, -2.5\}$

Lösung zu Aufgabe 1–9 : Setze $z = x^2$, und es entsteht die quadratische Gleichung $z^2 - 3z - 1 = 0$ mit den Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(3 \pm \sqrt{9+4}\right)$$

Hiervon ist aber nur eine Lösung positiv, und somit erhalten wir

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\,\left(3 + \sqrt{13}\right)} \approx \pm 1.817$$

Lösung zu Aufgabe 1–10 : Si $a = -b$ puis $L = \mathbb{R}$. Si $a \neq -b$ puis on divise par $a + b$ et arrive à

$$\frac{1}{a-b}\,x^2 = a - b \quad \text{ou} \quad x^2 = (a-b)^2$$

et donc $L = \{a-b, b-a\}$

Lösung zu Aufgabe 1–11 : Erweitern mit $(a-b)\,(a+b) \neq 0$ ergibt

$$\begin{aligned} (a+b)\,x + (a-b)\,x &= (a-b)\,(a+b) \\ 2\,a\,x &= a^2 - b^2 \\ x &= \frac{a^2-b^2}{2\,a} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–12 : Es sind die zwei Fälle $x \leq 2$ und $x > 2$ zu unterscheiden

$$y = \begin{cases} 2\,x + (2-x) & \text{falls} \quad x \leq 2 \\ 2\,x + (x-2) & \text{falls} \quad x > 2 \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen können je nach x aufgelöst werden mit dem Resultat.

$$x = \begin{cases} y-2 & \text{falls} \quad x \leq 2 \\ (y+2)/3 & \text{falls} \quad x > 2 \end{cases}$$

Die Fallunterscheidung sollte noch als Bedingung an y formuliert werden.

$$x = \begin{cases} y-2 & \text{falls} \quad y \leq 4 \\ (y+2)/3 & \text{falls} \quad y > 4 \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 1–13 :

(a) Keine Lösung für x

(b) $3 \leq x \leq 7$

(c) $x = 2$ und $x = 8$

Lösung zu Aufgabe 1–14 : $2 \leq x \leq 3$

Lösung zu Aufgabe 1–15 : $1 \leq x \leq \frac{5}{3}$

Lösung zu Aufgabe 1–16 : $x \leq \frac{3}{2}$

Lösung zu Aufgabe 1–17 : $\frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{1}{4}$

Lösung zu Aufgabe 1–18 : $|x| < 1$ und $x \neq 0$

Lösung zu Aufgabe 1–19 : $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, \infty)$

Lösung zu Aufgabe 1–20 : $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 4)$

Lösung zu Aufgabe 1–21 : $x \in (-2, -\sqrt{2}) \cup (-1, \sqrt{2})$

Lösung zu Aufgabe 1–22 : $L = (-\infty, 0] \cup [16/3, \infty)$.

Lösung zu Aufgabe 1–23 : $L = [1, \infty)$.

Lösung zu Aufgabe 1–24 : $L = [-1, \infty) \setminus \{0\}$.

Lösung zu Aufgabe 1–25 : Zum Beispiel $(x+1)\,x\,(x-3)\,(x-5) \leq 0$

Lösung zu Aufgabe 1–26 :

(a)

$$\begin{aligned} x^3-7\,x^2-12\,x &> 0\\ x\,\left(x^2-7\,x-12\right) &> 0\\ x\,\left(x-\frac{7+\sqrt{97}}{2}\right)\,\left(x-\frac{7-\sqrt{97}}{2}\right) &> 0 \end{aligned}$$

Die dritte Zeile wurde mit Hilfe der Lösungen einer quadratischen Gleichung erzeugt.

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\,\left(7\pm\sqrt{49+48}\right)=\frac{7\pm\sqrt{97}}{2}$$

Somit wechselt der Ausdruck bei $x=0$ und $x=\frac{7\pm\sqrt{97}}{2}$ das Vorzeichen. Für sehr grosse Werte von x ist die Ungleichung erfüllt. Somit ergibt sich

$$\mathbb{L}=\left(\frac{7-\sqrt{97}}{2}\,,\,0\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{97}}{2}\,,\,\infty\right)$$

(b) Die Ungleichung soll mit (x^2-2) erweitert werden. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden

1. Fall: $x^2-2>0$

$$\begin{aligned} x &> \frac{x-1}{x^2-2}\\ x\,(x^2-2) &> x-1\\ x^3-3\,x+1 &> 0 \end{aligned}$$

Durch Lösen der kubischen Gleichung sieht man, dass der Ausdruck rechts positiv ist für $x_1<x<x_2$ und $x_3<x$, wobei

$$x_1\approx-1.879\quad,\quad x_2\approx 0.347\quad,\quad x_3\approx 1.532$$

Die exakte Lösung ist nicht leicht zu bestimmen. Somit erhalten wir einen ersten Beitrag von $x_1<x<-\sqrt{2}$ und $x>x_3$ zur Lösungsmenge.

2. Fall: $x^2-2<0$

$$\begin{aligned} x &> \frac{x-1}{x^2-2}\\ x^3-3\,x+1 &< 0 \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist gelöst für $x_2<x<\sqrt{2}$.

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbb{L}=\left(x_1\,,\,-\sqrt{2}\right)\cup\left(x_2\,,\,\sqrt{2}\right)\cup\left(x_3\,,\,\infty\right)$$

Die Aufgabe kann auch ohne Fallunterscheidung gelöst werden mittels der Rechnungen

$$\begin{aligned} x &> \frac{x-1}{x^2-2}\\ x-\frac{x-1}{x^2-2} &> 0\\ \frac{x\,(x^2-2)}{x^2-2}-\frac{x-1}{x^2-2} &> 0\\ \frac{x^3-3\,x-1}{x^2-2} &> 0\\ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} &> 0 \end{aligned}$$

Bei einer geraden Anzahl von positiven Faktoren ist der ganze Ausdruck positiv.

Lösung zu Aufgabe 1–27 : Unterscheide zwei Fälle $x > 3$ und $x < 3$

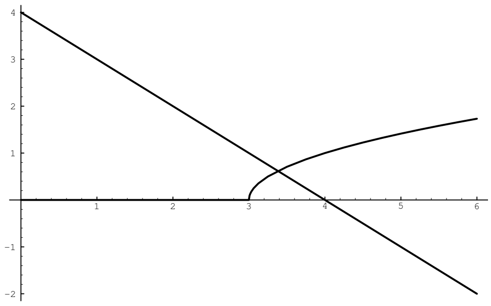
$x > 3$	$x < 3$
$x > x\,(x-3)$	$x < x\,(x-3)$
$0 > x\,(x-4)$	$0 < x\,(x-4)$
$0 < x < 4$ und $x > 3$	$(x < 0$ oder $x > 4)$ und $x < 3$
$3 < x < 4$	$x < 0$

Also ist die Lösungsmenge $L = (3,4) \cup (-\infty, 0)$

Lösung zu Aufgabe 1–28 :

(a) Durch Quadrieren beider Seiten ergibt sich eine quadratische Gleichung mit den beiden Lösungen $x_1 = 4$ und $x_2 = 7$. Diese beiden Lösungen **müssen** durch Einsetzen überprüft werden, und man sieht, dass nur $x = 4$ die ursprüngliche Gleichung löst.

(b) Man untersuche, für welche Werte von α die Gerade $y = \alpha - x$ die nach rechts geöffnete Halbparabel schneidet. In der untenstehenden Figur ist die Situation für $\alpha = 4$ gezeichnet. Man sieht sofort, dass genau für $\alpha \geq 3$ eine Lösung (Schnittpunkt) entsteht.



Lösung zu Aufgabe 1–29 :

(a) Falls $b = 1$, ist x beliebig; sonst: $x = \pm a\sqrt{b(1+b)}$

(b) $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{4}$

Lösung zu Aufgabe 1–30 :

(a) $x^2 - x - 6 = 0$

(b) $x^2 - 3\,(a+b)\,x + 2\,a^2 + 5\,a\,b + 2\,b^2 = 0$

Lösung zu Aufgabe 1–31 : Biquadratische Gleichung: $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$

Lösung zu Aufgabe 1–32 : Wurzelgleichung: $x_1 = 5$, $x_2 = -3$. Lösungen unbedingt durch Einsetzen überprüfen!

Lösung zu Aufgabe 1–33 : Wurzelgleichung: $x_1 = 5$, $x_2 = -3$. Lösungen unbedingt durch Einsetzen überprüfen!

Lösung zu Aufgabe 1–34 : Wurzelgleichung: keine Lösungen. Lösungen unbedingt durch Einsetzen überprüfen!

Lösung zu Aufgabe 1–35 : Wurzelgleichung: $x = 2$. Lösungen unbedingt durch Einsetzen überprüfen!

Lösung zu Aufgabe 1–36 :

(a) Quadratische Gleichung

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -1/2 \\ 2 \end{cases}$$

(b) Substitution $z = x^4$

$$\begin{aligned} x^8 - 3\,x^4 - 4 &= 0 \\ z^2 - 3\,z - 4 &= 0 \\ (z-4)\,(z+1) &= 0 \\ z_1 = 4 & \qquad \text{und somit} \quad x_1 = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt{2} \\ z_2 = -1 & \qquad \text{führt zu keiner reelen Lösung} \end{aligned}$$

(c) Wegen $x^2 - 6\,x + 9 = (x-3)^2$ gilt $\sqrt{x^2 - 6\,x + 9} = |x-3|$. Dieser Ausdruck stimmt mit $(x-3)$ überein, falls $x - 3 \geq 0$. Somit ist die Lösungsmenge $L = \{x \geq 3\}$.

(d)

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x+1 > 0$$

Lösung zu Aufgabe 1–37 :

(a) Es liegt eine biquadratische Gleichung vor. Die Substitution $z = x^2 \geq 0$ führt auf

$$z^2 - z - 6 = 0$$

Wegen $z^2 - z - 6 = (z-3)\,(z+2)$ sind die Lösungen $z_1 = 3$ und $z_2 = -2$. Wegen der Bedingung $z \geq 0$ erhalten wir die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ der ursprünglichen Gleichung.

(b) Der Definitionsbereich besteht aus $x \geq 2$

$$\begin{aligned} x - 3 &= \sqrt{x-2} \\ (x-3)^2 &= x - 2 \\ x^2 - 7\,x + 11 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{1}{2}\,\left(7 \pm \sqrt{49-44}\right) \end{aligned}$$

Beide Lösungen liegen im Definitionsbereich. Da aber beim zweiten Rechenschritt quadriert wurde, sind die Lösungen durch einsetzen zu überprüfen. Man findet, dass nur $x = \frac{1}{2}\,\left(7 + \sqrt{5}\right)$ die ursprüngliche Gleichung löst.

(c) Zu untersuchen ist

$$f(x) = 3\,x^2 + 6\,x - 9 = 3\,\left(x^2 + 2\,x - 3\right) = 3\,(x+3)\,(x-1) > 0$$

Diese nach oben geöffnete Parabel hat die Nullstellen bei $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$. Somit ist die Lösungsmenge der Ungleichung gegeben durch

$$\mathbb{L} = (-\infty, -3) \cup (1, \infty) = \{x < -3\} \cup \{x > 1\}$$

(d) Ausser bei $x = 2$ ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{(x-2)^2} & \geq & 1 \\ (x-2)^2 & \leq & 1 \\ -1 \leq & (x-2) & \leq 1 \\ 1 \leq & x & \leq 3 \end{array}$$

Somit ergibt sich die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = [1,3] \setminus \{2\} \; = \; [1,2) \cup (2,3]$$

d.h alle Zahlen zwischen 1 und 3 (inklusive Grenzen), ohne die Zahl 2 .
Diese Teilaufgabe kann auch direkt gelöst werden: damit der Bruch grösser als 1 ist, muss der Nenner kleiner als 1 sein, ...

Lösung zu Aufgabe 1–38 : Seien a und b die Längen der beiden Katheten (in dm). Dann gilt

$$a = b + 2 \quad \text{und} \quad a \cdot b = 48$$

Daraus folgt

$$\begin{array}{rcl} (b+2) \cdot b & = & 48 \\ b^2 + 2\,b - 48 & = & 0 \\ (b-6) \cdot (b+8) & = & 0 \end{array}$$

Von den beiden Lösungen $b_1 = 6$ und $b_2 = -8$ kommt nur die erste in Frage. Somit betragen die Längen der beiden Katheten $b = 6$ dm und $a = 8$ dm .

Lösung zu Aufgabe 1–39 : Aufgrund der Beschreibung gilt

$$\pi\,(2\,r)^2 = 2\,\pi\,r^2$$

und somit

$$2\,r^2 = r^2$$

d.h. $r = 0$.

Lösung zu Aufgabe 1–40 : Aufgrund der Beschreibung gilt

$$\pi\,(r+3)^2 = 2\,\pi\,r^2$$

und somit

$$r^2 + 6\,r + 9 = 2\,r^2$$

und die einzige strikt positive Lösung ist

$$r = \frac{6 + 6\sqrt{2}}{2} \approx 7.25$$

Lösung zu Aufgabe 1–41 : Nun noch 4 Stunden .

Lösung zu Aufgabe 1–42 : Ungefähr 151 m.

1.5 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- die Äquivalenztransformationen für Gleichungen kennen und anwenden können.
- Gleichungen lösen können.
- die Äquivalenztransformationen für Ungleichungen kennen und anwenden können.
- Ungleichungen lösen können und die Lösungsmenge graphisch darstellen.

Kapitel 2

Funktionen, Abbildungen, Graphen

2.1 Einleitung

Es handelt sich um eines des wichtigsten Konzepte der Mathematik. Es spielt eine wichtige Rolle in allen Zweigen der Mathematik und Informatik. Die Worte *Funktion*, *Abbildung* und *Transformation* sind Synonyme. Hier folgt diese wichtige Definition.

2–1 Definition : Seien A, B zwei Mengen. Man sagt, dass f eine **Funktion** oder **Abbildung** von A auf B ist, falls jedem Wert einer Variablen $x \in A$ genau ein zugehöriger Wert $y \in B$ zugeordnet ist.

Die Menge A heisst **Definitionsbereich** und die Menge B wird **Bildbereich** genannt. Die Menge aller Werte von f heisst **Bild** und wird mit $Im\,(f)$ bezeichnet. $Im\,(f)$ ist eine Teilmenge von B, und es kann eine echte Teilmenge sein.

2–2 Beispiel : Der Radius eines Kreises sei r. Dann berechnet sich die Fläche als πr^2. Die Fläche ist eine Funktion des Radius mit $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}$ und $Im\,(f) = \mathbb{R}^+$. ◊

2–3 Definition :

- $f : A \longrightarrow B \; , x \mapsto f\,(x) \; .$
- A = Definitionsbereich der Funktion.
- B = Wertebereich der Funktion.
- $x \in A$ unabhängige Variable der Funktion.
- $y \in B$ abhängige Variable der Funktion.
- $f\,(A) = \{f\,(x) \in B \mid x \in A\} \subset B$ Bild der Funktion.
- $x \mapsto f\,(x) \qquad x$ geht über in $f\,(x)$.

Wichtig : Man muss nicht immer die Platzhalter x und y für die unabhängige und abhängige Variable wählen. Man sollte die Notation der gegebenen Situation anpassen.

Eine Funktion kann definiert werden

(a) durch eine Tabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22

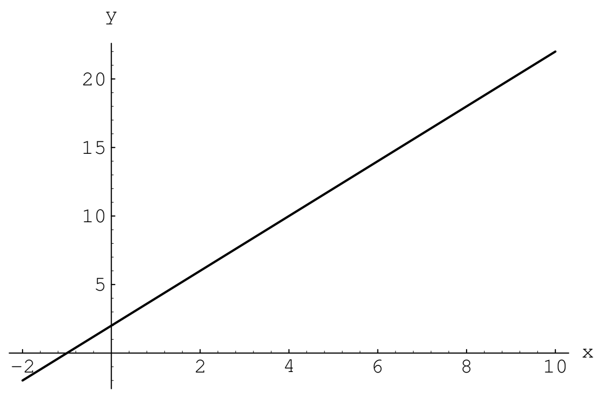


Abbildung 2.1: Graph der Funktion $y = 2 + 2x$

(b) durch eine Gleichung oder Formel, z.b. $y = 2 + 2x$.

(c) durch einen Graphen :

Die obigen Beziehungen erlauben es, zu gegebenem x das zugehörige y zu berechnen. Trotzdem gibt es einen Unterschied zwischen den obigen Beispielen (a), (b) und (c).
Tip: Definitionsbereich.

2–4 Beispiel : Sei f die Funktion welche jedem europäischen Land seine Hauptstadt zuordnet. Beschreiben Sie Definitionsbereich, Bildbereich und Bild dieser Funktion. Geben Sie einige Beispiele von Funktionswerten. ♢

2–5 Beispiel : Sei f die Funktion, welche jeder natürlichen Zahl ihr Quadrat zuordnet. Beschreiben Sie Definitionsbereich, Bildbereich und Bild dieser Funktion. Geben Sie einige Beispiele von Funktionswerten. ♢

2.2 Injektion, Surjektion und invertierbare Abbildung

2–6 Definition : Sei $f : A \to B$ eine Funktion.

- die Funktion heisst **injektiv** genau dann, wenn zwei verschiedene Elemente von A nie auf dasselbe Element in B abgebildet werden. Man kann auch sagen: aus $f(a) = f(a')$ folgt $a = a'$. Eine solche Funktion heisst **Injektion**.
- Die Funktion heisst **surjektiv** genau dann, wenn jedes Element von B im Bild von A auftritt, d.h. $f(A) = B$. Eine solche Funktion heisst **Surjektion**.
- Die Funktion ist **bijektiv** genau dann, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Man kann auch sagen: zu jedem $b \in B$ gibt es genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Eine solche Funktion heisst **Bijektion**.

2–7 Beispiel : Untersuche die folgenden Funktionen und entscheide, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Bestimme $Im(f)$.

(a) $f : [0, 5] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$

(b) $f : [0, \infty) \to [0, \infty) \qquad f(x) = x^2$

(c) $f : [-2, 5] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3 - x$

♢

2–8 Beispiel : Für jeden Schweizer gibt es eine 11 stellige AHV–Nummer. Diskutieren Sie die entsprechende Funktion. ♢

2.3 Operationen mit reellen Funktionen

Ist der Bildbereich von zwei Funktionen $\mathbb{R}$, so kann man diese Funktionen addieren, subtrahieren, multiplizieren, usw.

2–9 Definition : Sei X eine beliebige Menge und

$$f : X \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g : X \to \mathbb{R}$$

Dann sind die üblichen Operationen wie folgt definiert

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) &:= f(x) - g(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \\ (f/g)(x) &:= f(x)/g(x) \end{aligned}$$

wobei die die letzte Operation natürlich nur möglich ist, falls $g(x) \neq 0$.

2–10 Beispiel : Seien drei Funktionen f, g und h definiert durch

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad h(x) = \frac{1}{x} \quad .$$

Bestimme für die folgenden Funktionen je den maximal möglichen Definitionsbereich, das Bild und eine möglichst einfache Formel für die Funktion. $f \cdot g$, $f + g$, $g - 2 \cdot f$, $g \cdot g$, $g \cdot f - h$ ♢

2.4 Komposition und inverse Funktion

2–11 Definition : Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, wobei der Bildbereich von f im Definitionsbereich von g liegt. Man kann eine neue Funktion $h : A \to C$ definieren durch

$$h = g \circ f \qquad h(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad .$$

Diese neue Funktion heisst **Komposition** von f und g.

Achtung: die Komposition von Funktionen ist klar zu unterscheiden von der Multiplikation von Funktionen.

2–12 Satz : *Die Komposition ist eine assoziative Operation, d.h. falls*

$$f : A \to B, \qquad g : B \to C, \qquad h : C \to D$$

so gilt

$$\begin{gathered} (h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x) \quad \text{für alle} \quad x \in A \\ h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \end{gathered}$$

Die Komposition ist im allgemeinen **nicht kommutativ**

$$g \circ f \neq f \circ g \qquad .$$

2–13 Satz : *Sei $f : A \to B$ eine bijektive Funktion. Dann gibt es eine* **inverse Funktion** $f^{-1} : B \to A$ *mit*

$$f \circ f^{-1} = I_B, \qquad f^{-1} \circ f = I_A \quad ,$$

wobei I_A die Identität in A ist, d.h. $I_A(a) = a$.

2–14 Beispiel : Seien drei Funktionen f, g und h definiert durch

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad h(x) = \frac{1}{x} \quad .$$

Bestimme für die folgenden Funktionen je den maximal möglichen Definitionsbereich, das Bild und eine möglichst einfache Formel für die Funktion.

(a) $f \cdot g$

(b) $f \circ g$

(c) $g \circ f$

(d) $g \circ g$

(e) $g \circ f \circ h$

(f) $h \circ g \circ f$

$\diamondsuit$

2–15 Beispiel : Der Wert von $y = \sqrt{x}$ ist bestimmt durch die Bedingungen $y \geq 0$ und $y^2 = x$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Bild der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$. Verifizieren Sie, dass diese Funktion invertierbar ist und finden Sie die inverse Funktion.

Für welche x gilt $\sqrt{x^2} = x$? $\diamondsuit$

2.5 Der Graph einer reellen Funktion

Wir beschränken uns hier auf Funktionen, deren Definitions– und Bildbereich Teilmengen der reellen Zahlen sind.

2–16 Definition : Der Graph einer Funktion $y = f(x)$ besteht aus allen Punkten (x, y) in der xy–Ebene für die gilt $y = f(x)$.

In Abbildung 2.1 finden Sie einen Teil des Graphen der Funktion $y = 2x + 2$.

In Abbildung 2.2 ist der Graph der Funktion $y = x^2$ mit dem Definitionsbereich $(-1.5, 2.0)$ gezeigt.

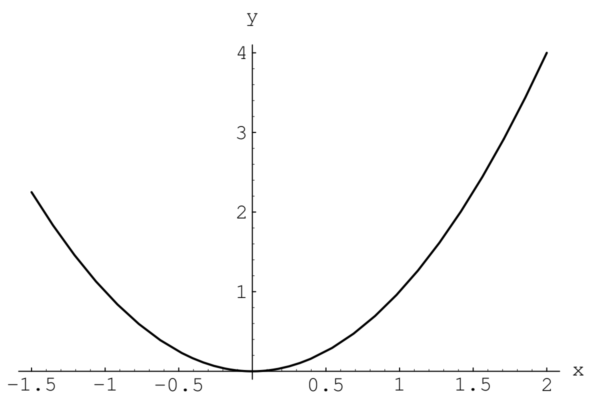


Abbildung 2.2: Graph der Funktion $y = x^2$

2–17 Beispiel : Zeichne den Graphen der Funktion

$$f:[-5,5]\to\mathbb{R} \qquad f(x)=1+\frac{x}{2}$$

$\diamondsuit$

2–18 Beispiel : Zeichne den Graphen der Funktion

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=1+\frac{x}{2}$$

$\diamondsuit$

2–19 Beispiel : Zeichne den Graphen der durch die folgende Tabelle gegebenen Funktion.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	6	8	4	6	8	4	6	8	4

Es sind verschiedene Lösungen zu finden und die zusätzlich gemachten Annahmen sind zu spezifizieren. $\diamondsuit$

2–20 Beispiel : Zeichne den Graphen der Funktion

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{falls} \quad -1\le x\le 1 \\ x^2 & \text{falls} \quad 1<x\le 4 \end{cases}$$

$\diamondsuit$

2–21 Beispiel : Zeichne den Graphen der Funktion

$$f(x)=|x|$$

$\diamondsuit$

2–22 Beispiel : Zeichne den Graphen der Funktion

$$f(x)=|x-2|^3$$

$\diamondsuit$

2–23 Definition : Hier sind einige grundlegende Begriffe, die immer wieder verwendet werden. Sei $A\subset\mathbb{R}$ und $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ eine Funktion.

- Der Punkt $x_0\in A$ heisst **Nullstelle** von f, falls $f(x_0)=0$.
- Der Punkt $x_0\in A$ heisst **Maximalstelle** der Funktion f, falls $f(x_0)\ge f(x)$ für alle $x\in A$. $f(x_0)$ heisst **Maximalwert**.
- Der Punkt $x_0\in A$ heisst **Minimalstelle** der Funktion f, falls $f(x_0)\le f(x)$ für alle $x\in A$. $f(x_0)$ heisst **Minimalwert**.
- Die Funktion $y=f(x)$ ist **wachsend**, falls für alle $x_0<x$ gilt: $f(x_0)\le f(x)$.
- Die Funktion $y=f(x)$ ist **streng wachsend**, falls für alle $x_0<x$ gilt: $f(x_0)<f(x)$.
- Die Funktion $y=f(x)$ ist **fallend**, falls für alle $x_0<x$ gilt: $f(x_0)\ge f(x)$.
- Die Funktion $y=f(x)$ ist **streng fallend**, falls für alle $x_0<x$ gilt: $f(x_0)>f(x)$.
- Die Funktion $y=f(x)$ ist **monoton**, falls sie wachsend oder fallend ist.

- Die Funktion $y = f(x)$ ist **gerade**, falls für alle $x \in A$ gilt: $-x \in A$ und $f(-x) = f(x)$.
- Die Funktion $y = f(x)$ ist **ungerade**, falls für alle $x \in A$ gilt: $-x \in A$ und $f(-x) = -f(x)$.
- Die Funktion $y = f(x)$ ist **periodisch** mit Periode p, falls $A = \mathbb{R}$ und $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Die Funktion $y = f(x)$ ist **beschränkt**, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt so, dass für alle $x \in A$ gilt: $|f(x)| < M$.

2–24 Beispiel : Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen gerade, ungerade, wachsend, fallend oder/und periodisch sind. Als Definitionsbereich ist immer die grösstmögliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu wählen. Zeichnen sie die Graphen dieser Funktionen.

(a) $f(x) = x^2 - 1$

(b) $f(x) = 2x + 7$

(c) $f(x) = x^3 - 1$

(d) $f(x) = x^3 - x^2 - 1$

(e) $f(x) = |x|$

(f) $f(x) = [x]$ =nächst kleinere, oder gleich grosse ganze Zahl

(g) $f(x) = [|x|]$

(h) $f(x) = |[x]|$

(i) $f(x) = [x] - x$

(j) $f(x) = ([x] - x)^2$

(k) $f(x) = ([2x] - 2x)^3$

♢

2–25 Beispiel : Von einer Funktion f ist bekannt, dass sie periodisch ist mit Periode 2 und auch gerade. Für Werte von x zwischen 0 und 1 gilt $f(x) = 2 - x$. Zeichne die Funktion. ♢

2–26 Satz : *Einige einfache Resultate über monotone Funktionen*

- *Sind f und g wachsende Funktionen, so ist die Funktion $f + g$ wachsend.*
- *Sind f und g wachsende, positive Funktionen, so ist die Funktion $f \cdot g$ wachsend und positiv.*
- *Ist f wachsende und positiv, g fallend und positiv, so ist die Funktion f/g wachsend und positiv.*
- *Sind f und g gerade Funktionen, so sind die Funktionen $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und f/g gerade.*
- *Sind f und g ungerade Funktionen, so sind die Funktionen $f + g$,$f - g$ ungerade, aber die Funktionen $f \cdot g$ und f/g gerade.*
- *Die meisten Funktionen sind weder gerade noch ungerade, z.B. $f(x) = x^2 - x$. Es gibt genau eine Funktion die sowohl gerade als auch ungerade ist.*
- *Sind zwei Funktionen f und g periodisch mit derselben Periode p, so haben auch $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und f/g die Periode p.*
- *Sind zwei Funktionen f und g periodisch, aber nicht mit derselben Periode, so können die Funktionen $f + g$, $f - g$,$f \cdot g$ und f/g periodisch sein oder auch nicht.*

Um den Graph einer Funktion zeichnen zu können, sollten Sie versuchen, die Nullstellen, Maxima und Minima zu bestimmen. Finden Sie auch die Bereiche in denen die Funktion wachsend oder fallend ist. Dies kann Ihnen viel Information über den Graphen geben, ohne dass Sie allzuviele Werte berechnen müssen.

2–27 Satz : *Jede strikt monotone Funktion $f : A \to Im(f)$ ist bijektiv und somit invertierbar.*

2–28 Beispiel :

$$f(x) = x^5 + x \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

♢

2.6 Gleichungen in expliziter, impliziter und Parameter–Form

Gleichungen können in verschiedenen Formen vorliegen. Um die Notation zu vereinfachen, betrachten wir hier nur Beziehungen (Gleichungen) zwischen den Variablen x und y. In Beispielen werden meistens andere Namen verwendet.

	Form	Beispiel
(a)	explizit $y = f(x)$	$y = x^2\,(7-x)$
(b)	implizit $f(x,y) = 0$	$y^2 + x^2 = 9$
(c)	Parameterform t : Parameter $x = x(t) \quad y = y(t)$	$0 \le t < 2\pi$ $x(t) = 3\cos(t), \quad y(t) = 3\sin(t)$

In den Fällen (b) und (c) ist es nicht immer möglich, zu gegebenem x genau ein zugehöriges y zu finden, d.h. man erhält nicht immer y als eine Funktion von x.

2–29 Beispiel : Die Gleichung

$$F(x,y) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4 = 0$$

ist in impliziter Form. Ein Versuch nach y aufzulösen führt auf

$$y^2 = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$$

oder auch

$$y = \pm\sqrt{4-(x-1)^2} \quad \text{für} \quad -1 \le x \le 3$$

Somit wurde aus einer impliziten Gleichung die zwei expliziten Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{4-(x-1)^2} \quad \text{für} \quad -1 \le x \le 3 \\ y_2(x) &= -\sqrt{4-(x-1)^2} \quad \text{für} \quad -1 \le x \le 3 \end{aligned}$$

Ebenso kann die obige implizite Gleichung auch nach x als expliziter Funktion von y aufgelöst werden mit dem Resultat

$$\begin{aligned} x_1(y) = 1 + \sqrt{4-y^2} \quad \text{für} \quad -2 \le y \le 2 \\ x_2(y) = 1 - \sqrt{4-y^2} \quad \text{für} \quad -2 \le y \le 2 \end{aligned}$$

♢

2–30 Beispiel : Die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= t+2 \\ y &= 5-\frac{1}{2}\,t^2 \end{aligned}$$

mit Definitionsbereich $t \in \mathbb{R}$ beschreiben eine Gleichung in Parameterform. Mittels der ersten Gleichung kann der Parameter t eliminiert werden durch $t = x-2$, und wir erhalten die explizite Darstellung von

$$y = 5-\frac{1}{2}\,(x-2)^2 \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

♢

2.7 Einfache Koordinatentransformationen

2–31 Beispiel : Betrachten Sie den Graphen 2.3 der Funktion $y = f(x) = x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$. Er gleicht der Standardparabel $v = u^2$, aber mit einer Verschiebung nach links und nach oben. Falls wir die neuen Koordinaten $u = x+1$ und $v = y-2$ verwenden, so wird aus $y = x^2+2x+3$ plötzlich $v = u^2$.

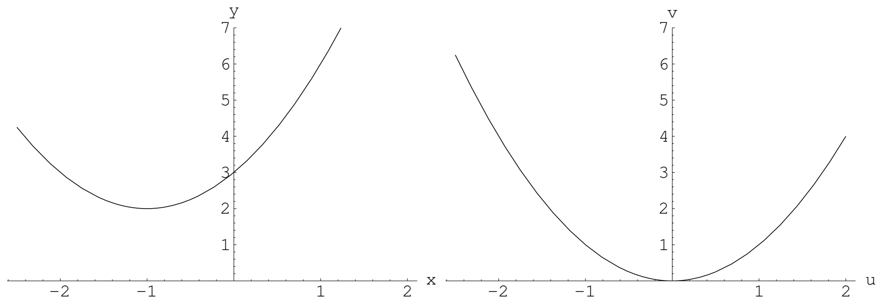


Abbildung 2.3: Verschiebung einer Parabel

♢

2–32 Beispiel : Betrachten Sie den Graphen 2.4 der impliziten Gleichung $x^2+4y^2 = 4$. Das ist eine Ellipse, die dem Kreis $u^2+v^2 = 1$ gleicht. Falls die neuen Koordinaten $u = x/2$ und $v = y$ verwendet werden, so wird aus $x^2+4y^2 = 4$ neu $u^2+v^2 = 1$. Die Situation ist in Abbildung 2.4 gezeichnet.

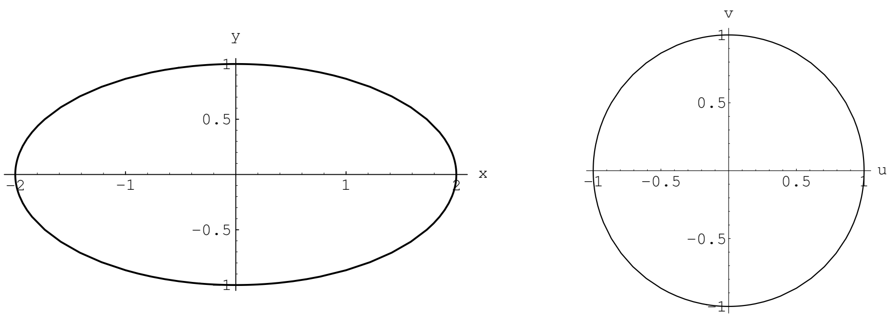


Abbildung 2.4: Transformations einer Ellipse in einen Kreis

♢

Translationen, Spiegelungen und Streckungen sind einfache Transformationen, die aber nützlich sind. Oft ist es einfacher, einen Graphen zu zeichnen, wenn man realisiert, dass eine verschobene oder gestreckte Version eines einfacheren Graphen vorliegt.

2–33 Beispiel : Der Graph 2.5 der Gleichung $4y^2 + x^2 - 4y + 6x = -1$

$$\begin{aligned}
4y^2 + x^2 - 4y + 6x &= -1 \\
4y^2 - 4y + 1 + x^2 + 6x + 9 &= -1 + 1 + 9 \quad \text{Vervollständigung der Quadrate} \\
(2y-1)^2 + (x+3)^2 &= 9 \\
v^2 + u^2 &= 3^2 \\
v = 2y - 1 & \qquad u = x + 3
\end{aligned}$$

Die Gleichung $v^2 + u^2 = 3^2$ liefert einen Kreis mit Radius 3 und Zentrum im Koordinatenursprung. Die Transformationen $x = u - 3$ und $y = (v+1)/2$ sagen, dass man um 3 nach links und um 1 nach oben zu verschieben hat, anschliessend eine Streckung mit Faktor 0.5 (d.h. eine Kompression) in y–Richtung. Dies ist der Weg vom uv–Bild zum xy–Bild. Selbstverständlich kann man auch zuerst in y–Richtung mit den Faktor 0.5 strecken und dann um 0.5 nach oben und 3 nach links schieben. Grund: $y = (v+1)/2 = 0.5v + 0.5$.

Will man vom xy–Bild zum uv–Bild gehen, so zeigen die Transformationen $v = 2y - 1$ und $u = x + 3$, dass zuerst mit dem Faktor 2 in die y–Richtung gestreckt werden muss, dann um 3 nach rechts und um 1 nach unten verschoben.

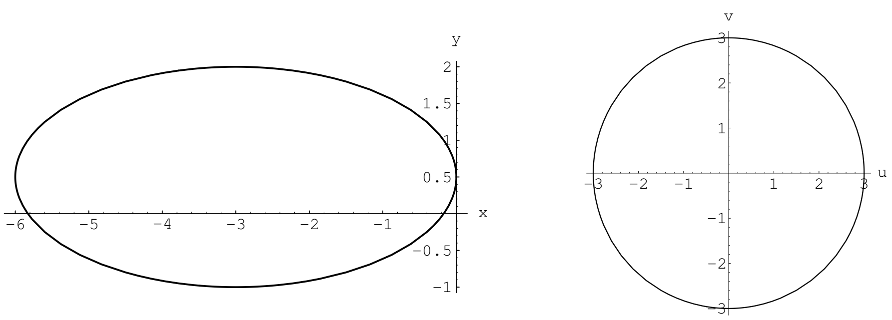


Abbildung 2.5: Transformation einer zweiten Ellipse in einen Kreis

◇

2.8 Tabelle von einfachen Transformationen

Für die folgende Tabelle von Transformationen wird beschrieben, was mit dem Graphen im xy–Bild zu machen ist, um ihn im uv–Bild zu zeichnen. Selbstverständlich ist in beiden Bildern derselbe Masstab zu verwenden.

Transformation	Bedingung	Effekt
$u = x + c$	$c > 0$	Verschiebung nach rechts
	$c < 0$	Verschiebung nach links
$v = y + c$	$c > 0$	Verschiebung nach oben
	$c < 0$	Verschiebung nach unten
$u = kx$	$k > 1$	Streckung um Faktor k in x–Richtung
	$0 < k < 1$	Stauchung um Faktor k in x–Richtung
	$k < -1$	Streckung um Faktor k in x–Richtung und Spiegelung an der y–Achse
	$-1 < k < 0$	Stauchung um Faktor k in x–Richtung und Spiegelung an der y–Achse
$v = ky$	$k > 1$	Streckung um Faktor k in y–Richtung
	$0 < k < 1$	Stauchung um Faktor k in y–Richtung
	$k < -1$	Streckung um Faktor k in y–Richtung und Spiegelung an der x–Achse
	$-1 < k < 0$	Stauchung um Faktor k in y–Richtung und Spiegelung an der x–Achse
$u = y$ $v = x$		Spiegelung an der Geraden $x = y$

2.9 Aufgaben

• Aufgabe 2–1:
Untersuchen Sie die Funktionen

$$f(x) = x^2 - 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{und/et} \quad h(x) = x^3$$

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$\begin{aligned} a(x) &= (f \cdot g)(x) + h(x) \\ b(x) &= (f \circ g)(x) + h(x) \\ c(x) &= (g \circ f)(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d(x) &= \frac{h(x)}{f(x)} \\ e(x) &= (h \circ (f \cdot f))(x) \end{aligned}$$

• Aufgabe 2–2:
Über eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weiss man, dass sie ungerade ist und periodisch mit Periodenlänge 4. Für $0 \leq x \leq 2$ entspricht der Graph von f einer Standardparabel, welche so verschoben und gespiegelt ist, dass sie durch die Punkte $(1, 1)$ und $(2, 0)$ geht.

(a) Zeichne den Graphen für $-4 < x < 6$.

(b) Bestimme $f(-2.5)$.

• Aufgabe 2–3:
Betrachten Sie die folgende implizite Gleichung.

$$y^2 + 4y + 11 - x = 0$$

(a) Finden Sie **eine** explizite Gleichung, die genau der obigen Gleichung entspricht.

(b) Zeichnen Sie die Menge der Punkte (x, y), welche die obige Gleichung erfüllen.

• Aufgabe 2–4:
Sei

$$f(x) = x^3 + x + 1 \quad , \quad g(x) = \frac{1}{x-1}$$

Finden Sie / Trouver

(a) den Definitionsbereich von $g \cdot f$

(b) den Definitionsbereich von $g \circ f$

(c) den Wert von $f^{-1}(11)$

• Aufgabe 2–5:
Für die Funktion $f(x) = \frac{2-x}{x-1}$ bestimme man

(a) den maximalen Definitionsbereich und das Bild.

(b) die Intervalle auf denen f monoton fällt, bzw wächst.

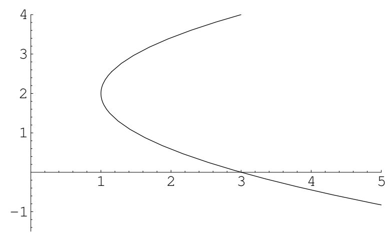
(c) die Intervalle auf denen $f > 0$.

Man zeige

$$\frac{u+v}{2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f(u) + f(v)}{2} = -1$$

Welche Symmetrie des Graphen von f drückt sich hierin aus?

• Aufgabe 2–6:
Die rechtsstehende Parabel hat ihren Scheitel bei $(1, 2)$ und geht durch den Punkt $(3, 0)$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte dieser Parabel mit der Geraden $g(x) = y = 2\,x - 1$.



• Aufgabe 2–7:
Eine Ellipse mit Mittelpunkt bei $x = 3$ berührt die y–Achse auf der Höhe $y = 2$ und sie berührt auch horizontale Gerade $y = 6$.

(a) Skizzieren Sie diese Ellipse.

(b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ellipse mit der x-Achse. Das Resultat ist **exakt** anzugeben.

• Aufgabe 2–8:
Gegeben ist eine Ellipse mit Zentrum $(-2, 3)$. Der Durchmesser in x–Richtung ist 5 und in y–Richtung ist er 8.

(a) Finden Sie eine Gleichung in x und y, welche diese Ellipse beschreibt.

(b) Finden Sie die **exakten** Koordinaten der Schnittpunkte der Ellipse mit der y–Achse.

• Aufgabe 2–9:
Eine Ellipse ist gegeben durch die Gleichung

$$x^2 - 4x + 4y^2 + 4y = 16$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke exakt

(a) Zentrum der Ellipse.

(b) Längen der Halbachsen.

(c) Koordinaten der vier Scheitelpunkte.

• Aufgabe 2–10:
Eine Ellipse mit achsenparallelen Halbachsen hat bei $(6, -2)$ einen Scheitelpunkt. Die Ellipse hat genau einen Punkt auf der x–Achse und genau einen Punkt auf der y–Achse.

(a) Bestimmen Sie die Ellipsengleichung in impliziter Form.

(b) Bestimmen Sie die **exakten** Koodinaten diser Ellipse mit der vertikalen Geraden bei $x = 2$.

• Aufgabe 2–11:
Die Halbachsen einer Ellipse sind parallel zu den Koordinatenachsen, und zwei Scheitelpunkte sind gegeben durch $(-1, 2)$ und $(1, 5)$. Die Ellipse schneidet die x–Achse.

(a) Finden Sie die Gleichung dieser Ellipse.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit der y–Achse.

(c) Berechnen Sie die Fläche dieser Ellipse mit Hilfe von geeigneten Transformationen und der bekannten Formel für die Kreisfläche.

• Aufgabe 2–12:
Die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 - 8\,x + 8\,y + 4\,y^2 + 11 = 0$$

entspricht einer Ellipse.

(a) Bestimmen Sie die relevanten Daten dieser Ellipse und skizzieren Sie die Ellipse.

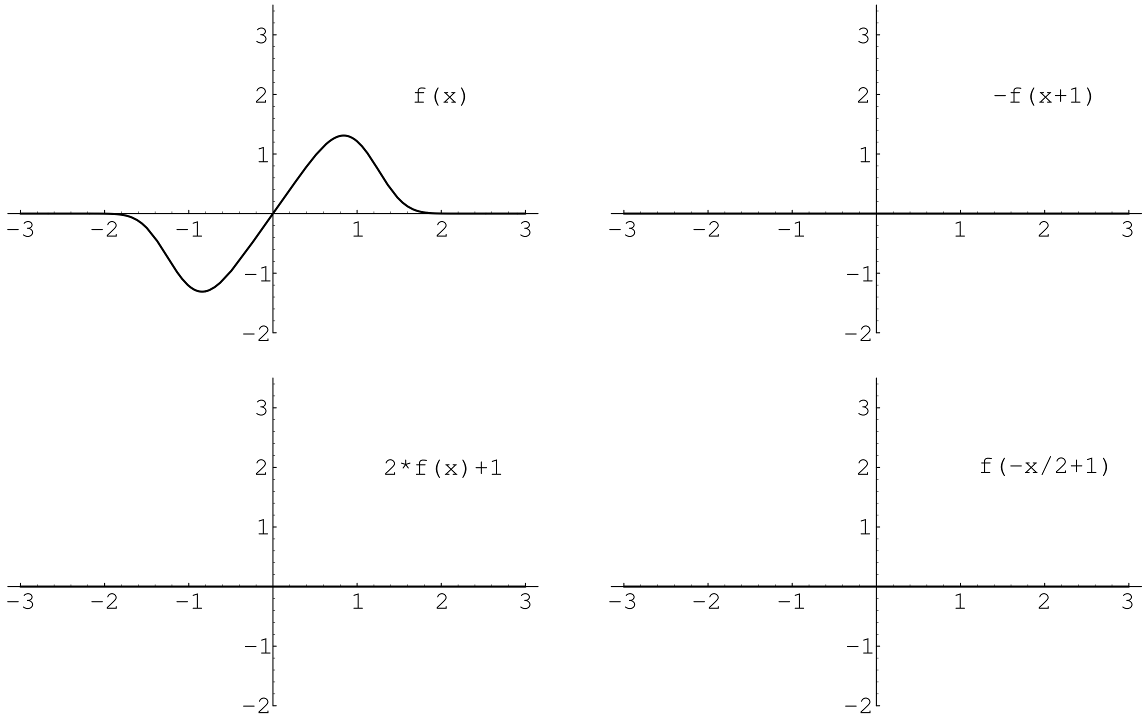
(b) Die obige Ellipse ist um drei Einheiten nach links zu schieben. Zu bestimmen sind die Koordinaten der Schnitpunkte mit der y–Achse.

• Aufgabe 2–13:
Eine Ellipse mit achsenparallelen Halbachsen hat bei $(3, 3)$ und $(7, 1)$ Scheitelpunkte. Die Ellipse schneidet keine der Koordinatenachsen.

(a) Bestimmen Sie die Ellipsengleichung in impliziter Form.

(b) Die obige Ellipse ist um 4 Einheiten nach links zu schieben, dann sind die Schnittpunkte mit der y-Achse zu bestimmen.

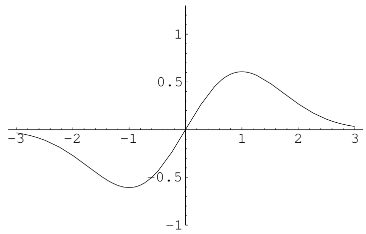
• Aufgabe 2–14:
Unten finden Sie den Graphen einer Funktion $f(x)$. Zu zeichnen sind die Graphen der drei angegebenen Funktionen.



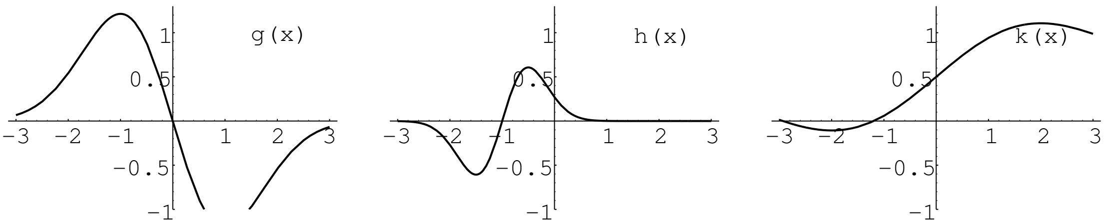
• Aufgabe 2–15:

Der Graph der Funktion $f(x)$ ist rechts zu sehen.

$$f(x) = x\, e^{-x^2/2}$$



Die drei untenstehenden Graphen entstehen durch einfache Koordinatentransformationen aus der obigen Graphik. Finden Sie die Formeln für die Funktion $g(x)$, $h(x)$ und $k(x)$.



• Aufgabe 2–16:
(etwas schwieriger als üblich)
Zeichnen Sie den Lösungsbereich der Ungleichung

$$2\,x\,y \leq |x+y| \leq x^2+y^2$$

Tip: Unterscheiden Sie zwei Fälle

(a) $x+y \geq 0$

(b) $x+y < 0$

und verwenden Sie Vervollständigung des Quadrates. Quelle: [Blum84, p. 21].

• Aufgabe 2–17:
Skizzieren Sie den Lösungsbereich des folgenden Systems von Ungleichungen in der xy–Ebene.

$$y > |x^2 + 4\,x - 1| \quad \text{und / et} \quad y - x \leq 6$$

2.9.1 Lösung zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 2–1 :

$$\begin{aligned}
a(x) &= (f \cdot g)(x) + h(x) = (x^2 - 1) \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + x^3 \\
b(x) &= (f \circ g)(x) + h(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)^2 - 1 + x^3 \\
c(x) &= (g \circ f)(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2 + 1} \\
d(x) &= \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{x^3}{x^2 - 1} \\
e(x) &= (h \circ (f \cdot f))(x) = \big((x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)\big)^3 = (x^2 - 1)^6
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–2 : $f\,(-2.5) = 3/4$.

Lösung zu Aufgabe 2–4 :

(a)

$$(g \cdot f)\,(x) = g\,(x) \cdot f\,(x) = (x^3 + x + 1)\;\frac{1}{x - 1}$$

Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b)

$$(g \circ f)\,(x) = g\,(f\,(x)) = \frac{1}{(x^3 + x + 1) - 1} = \frac{1}{x\,(x^2 + 1)}$$

Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) $y = f^{-1}\,(11)$ genau dann wenn $f\,(y) = 11$. Somit ist die Gleichung $y^3 + y + 1 = 11$ zu lösen. Die Lösung ist $y = 2$.

Lösung zu Aufgabe 2–6 : Die Parabelgleichung ist $x = 1 + \frac{1}{2}\,(y - 2)^2$. Diese Information kann in der Geradengleichung $y = 2\,x - 1$ eingesetzt werden. Das führt auf eine quadratische Gleichung.

$$\begin{aligned}
y &= 2\,x - 1 = 2\,(1 + \frac{1}{2}\,(y - 2)^2) - 1 = y^2 - 4\,y + 5 \\
y^2 - 5\,y + 5 &= 0 \\
y_{1,2} &= \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \begin{cases} \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

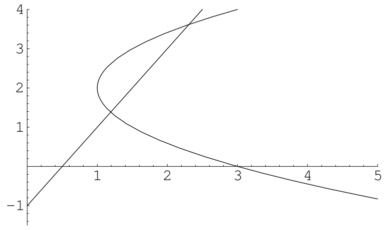
Daraus lassen sich die x–Werte bestimmen mit Hilfe der Geradengleichung $x = \frac{y+1}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{y_{1,2} + 1}{2} = \frac{+5 \pm \sqrt{5}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Somit habe wir die zwei Schnittpunkte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7+\sqrt{5}}{4} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.30902 \\ 3.61803 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7-\sqrt{5}}{4} \\ \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.19098 \\ 1.38197 \end{pmatrix}$$

Dieses Resultat wird bestättigt durch die Graphik.

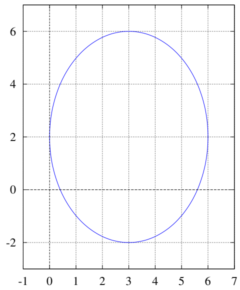


Lösung zu Aufgabe 2–7 :

(a)

Der Mittelpunkt liegt bei $(3\,,\,2)$. Die Längen der Halbachsen sind 3 in x-Richtung und 4 in y-Richtung. Die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 1$ kann verschoben und gestreckt werden und somit ist die Ellipsengleichung

$$\frac{1}{3^2}\,(x-3)^2 + \frac{1}{4^2}\,(y-2)^2 = 1$$



(b) Entlang der x–Achse ist $y = 0$ und somit erhalten wir eine quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^2}\,(x-3)^2 + \frac{1}{4^2}\,(0-2)^2 &= 1 \\ \frac{1}{3^2}\,(x-3)^2 + \frac{1}{4} &= 1 \\ \frac{1}{3^2}\,(x-3)^2 &= \frac{3}{4} \\ (x-3)^2 &= \frac{27}{4} \\ x-3 &= \pm\sqrt{\frac{27}{4}} = \pm\frac{3\,\sqrt{3}}{2} \\ x &= 3 \pm \frac{3\,\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Die numerischen Werte sin $x_1 \approx 0.40192$ und $x_2 = 5.59808$, was durch die obige Graphik bestätigt wird.

Lösung zu Aufgabe 2–8 :

(a)

$$\left(\frac{2}{5}\,(x+2)\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\,(y-3)\right)^2 = 1$$

(b) Schnitt mit der y–Achse entspricht $x=0$ setzen und somit der Gleichung

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{4}{5}\right)^2+\left(\tfrac{1}{4}\,(y-3)\right)^2 &= 1\\ (y-3)^2 &= 16\,\left(1-\tfrac{16}{25}\right)=\tfrac{16\cdot 9}{25}\\ y &= 3\pm\tfrac{4\cdot 3}{5}\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–9 :

$$x^2-4x+4y^2+4y=(x-2)^2-4+(2y+1)^2-1=16$$

oder

$$(x-2)^2+(2y+1)^2=21$$

(a) Koordinaten des Zentrums : $(x,y)=(2\,,\,-1/2)$

(b) Halbachse in x–Richtung : $\sqrt{21}$, Halbachse in y–Richtung : $\sqrt{21}/2$

(c) Scheitel bei $(2\pm\sqrt{21},-1/2)$ und $(2,-1/2\pm\sqrt{21}/2)$

Lösung zu Aufgabe 2–10 :

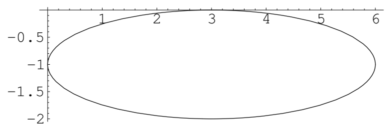
(a)

Eine Skizze zeigt, dass der Mittelpunkt bei $(3,-2)$ liegt und die Länge der Halbachsen 3 und 2 sein muss. Somit erhält man

$$\frac{(x-3)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{2^2}=1$$

oder auch

$$4\,(x-3)^2+9\,(y+2)^2=36$$



(b) In der obigen Gleichung muss $x=2$ gesetzt werden und dann nach y auflösen. Man erhält

$$\begin{aligned}4\,(2-3)^2+9\,(y+2)^2 &= 36\\ 9\,(y+2)^2 &= 36-4\\ (y+2)^2 &= \frac{32}{9}\\ y &= -2\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}\approx -2\pm 1.88562\end{aligned}$$

Eine zweite mögliche Lösung hat den Mittelpunkt bei $(6\,,\,-1)$ und Halbachsen der Längen 6 und 1. Somit ergibt sich die Gleichung

$$(x-6)^2+36\,(y+1)^2=36$$

und die Schnittpunkte sind bei

$$\begin{aligned}4^2+36\,(y+1)^2 &= 36\\ 36\,(y+1)^2 &= 20\\ (y+1)^2 &= \frac{20}{36}=\frac{5}{9}\\ y &= -1\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\approx -1\pm 0.745356\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–11 : Der untere Scheitel muss bei $(1,-1)$ sein mit Halbachsen der Längen 2 und 3 . Der Mittelpunkt ist bei $(1,2)$.

(a) Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{1}{2^2}\,(x-1)^2+\frac{1}{3^2}\,(y-2)^2=1$$

(b) Die Schnittpunkte mit der y–Achse sind bestimmt durch die Bedingung $x=0$ und somit durch die Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\,(y-2)^2 &= 1\\
\frac{1}{9}\,(y+1)^2 &= \frac{3}{4}\\
(y-2)^2 &= \frac{27}{4}\\
y-2 &= \pm\sqrt{\frac{27}{4}}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\\
y &= 2\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2\pm 2.5981
\end{aligned}$$

(c) Der Einheitskreis hat eine Fläche von π. Die obige Ellipse entsteht durch Verschieben des Kreises und einer Streckung um den Faktor 2 in x–Richtung und um den Faktor 3 in y–Richtung. Deshalb ist die Fläche gegeben durch $3\cdot 2\cdot\pi=6\,\pi$.

Lösung zu Aufgabe 2–12 :

(a) Quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}
x^2-8\,x+4\,y^2+8\,y+11 &= 0\\
(x-4)^2-16+4\,(y+1)^2-4+11 &= 0\\
(x-4)^2+4\,(y+1)^2 &= 3^2\\
\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+\left(\frac{2\,(y+1)}{3}\right)^2 &= 1
\end{aligned}$$

Ellipse mit Zentrum bei $(4\,,\,-1)$ und Halbachsen der Länge 3 in x–Richtung und $3/2$ in y–Richtung.

(b) Statt $(x-4)$ neu $(x-1)$ schreiben, dann x=0 setzen.

$$\begin{aligned}
(x-1)^2+4\,(y+1)^2 &= 3^2\\
1+4\,(y+1)^2 &= 9\\
(y+1)^2 &= 8/4=2\\
y &= -1\pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–13 :

(a) Zentrum bei $(7,3)$ und Halbachsen der Länge 4 und 2.

$$\frac{(x-7)^2}{4^2}+\frac{(y-3)^2}{2^2}=1$$

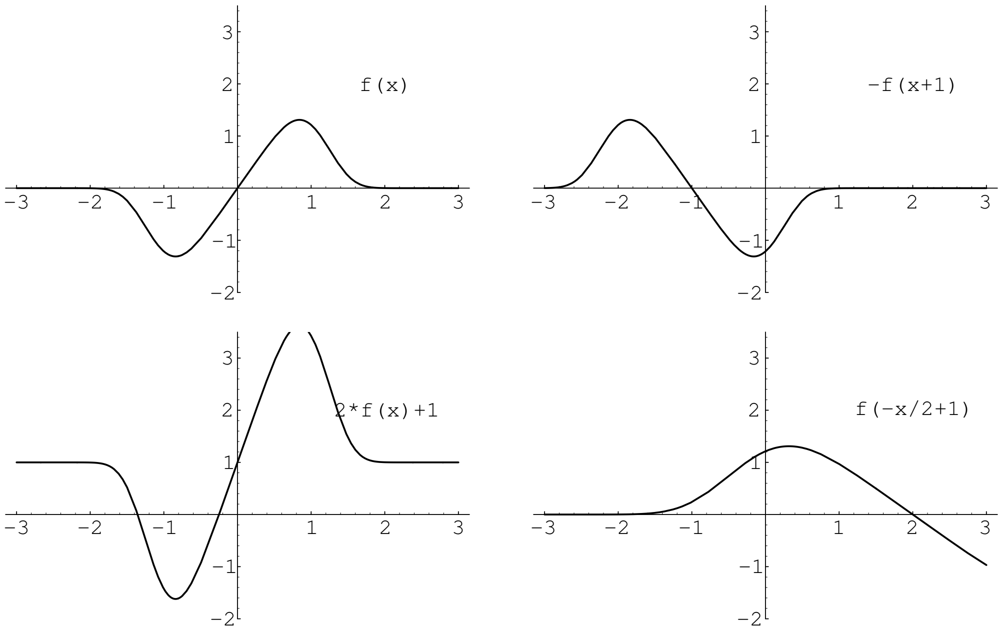
(b) Schieben nach links

$$\frac{(x-3)^2}{4^2}+\frac{(y-3)^2}{2^2}=1$$

dann $x = 0$ setzen

$$\begin{aligned}
\frac{(3)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} &= 1 \\
\frac{(y-3)^2}{2^2} &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\
(y-3)^2 &= 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4} \\
y &= 3 \pm \sqrt{\frac{7}{4}}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–14 :



Lösung zu Aufgabe 2–15 :

$$\begin{aligned}
g(x) &= -2\,f(x) &&= -2\,x\,e^{-x^2/2} \\
h(x) &= f(2\,x+2) &&= (2\,x+2)\,e^{-(2\,x+2)^2/2} \\
k(x) &= f(x/2) + \tfrac{1}{2} &&= \tfrac{x}{2}\,e^{-x^2/8} + \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–16 :

In der oberen rechten Halbebene $x + y > 0$ (d.h. $y > -x$) ist die Lösungemenge von

$$2\,x\,y \le x + y \le x^2 + y^2$$

zu untersuchen. Die erste Ungleichung kann umgeformt werden mit Hilfe der Transformationen

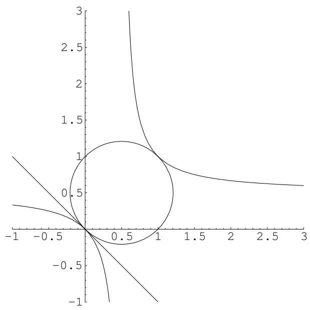
$$2\,x\,y = x + y \qquad \Leftrightarrow \qquad (2\,x-1)\,y = x \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{x}{2\,x-1}$$

Diese Grenzkurve ist eine rationale Funktion mit vertikaler Asymptote $y = 0$ und vertikaler Asymptote $x = 1/2$. Die zweite Ungleichung wird mit Hilfe von quadratischer Ergänzung umgeformt zu

$$x + y \ \le\ x^2 + y^2$$

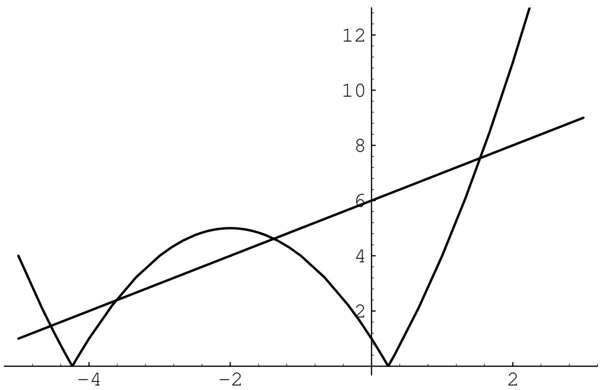
$$\begin{aligned}
0 &\leq x^2 - 2\,\frac{x}{2} + y^2 - 2\,\frac{y}{2} \\
0 &\leq x^2 - 2\,x\,\frac{1}{2} + y^2 - 2\,y\,\frac{1}{2} \\
\frac{1}{4} + \frac{1}{4} &\leq \left(x^2 - 2\,x\,\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - 2\,y\,\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \\
\frac{1}{2} &\leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Somit besteht die Lösungsmenge dieser Ungleichung aus allen Punkten ausserhalb der Kreises mit Mittelpunkt $(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2})$ und Radius $1/\sqrt{2}$. Die Kurven sind in der untenstehenden Figur illustriert.



Die andere Halbebene $y + x < 0$ ist analog zu untersuchen.

Lösung zu Aufgabe 2–17 : Die Gleichung $y = x^2 + 4\,x - 1 = (x + 2)^2 - 5$ entspricht einer nach oben geöffneten Parabel mit Scheitel bei $(-2, -5)$. Die Nullstellen liegen bei $x = -2 \pm \sqrt{5}$. Für $y = |x^2 + 4\,x - 1|$ muss der unter der x–Achse liegende Teil an der x–Achse gespiegelt werden. Der gesuchte Bereich liegt strikt oberhalb dieser Kurve und unterhalb der Geraden $y = x + 6$. Die beiden Geradenabschnitte zwischen den Parabelbogen gehören zum Bereich, die Parabelstücke aber nicht.



2.10 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- die grundlegenden Begriffe und Notationen kennen.
- die Graphen von Funktionen verschiedenster Arten angeben können.
- Gleichungen in expliziter, impliziter und Parameter–Form kennen.
- einfache Koordinatentransformationen durchführen können.

Kapitel 3

Polynome und rationale Funktionen

Ziel dieses Kapitels ist es, Methoden zu finden, um Werte von Polynomen zu berechnen, Nullstellen zu finden, mit Polynomen zu rechnen und Graphen von Polynomen zu diskutieren. Im zweiten Teil werden auch rationale Funktionen betrachtet.

3–1 Definition : Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **Polynom** vom Grade $n \in \mathbb{N}$, falls es Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt mit $a_n \neq 0$ und

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Wir untersuchen hier nur reelle Polynome, d.h. $a_i \in \mathbb{R}$.

3–2 Definition : Das obige Polynom f ist vom **Grade** n (falls $a_n \neq 0$).

3–3 Beispiel :

$f(x)$	$= x^5 - 7x + 5$	Grad 5
$f(x)$	$= 2\,(x-2)\,(x+2) = 2\,x^2 - 8$	Grad 2

$\diamondsuit$

3–4 Satz : *Seien f ein Polynom vom Grad n und g ein Polynom vom Grad m. Durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Komposition entstehen wiederum Polynome.*

1. *$f + g$ ist ein Polynom vom Grade $\leq \max\{n, m\}$.*
2. *$f \cdot g$ ist ein Polynom vom Grade $n + m$.*
3. *$f \circ g$ ist ein Polynom vom Grade $n \cdot m$.*

Die Menge der Polynome ist abgeschlossen unter diesen Operationen. Die Division zweier Polynome ergibt im allgemeinen kein Polynom.

3–5 Beispiel : Sei $f(x) = x^3 - 1$ und $g(x) = x^2 + 1$. Dann gilt

(a) $f(x) + g(x) = x^3 + x^2$

(b) $f(x) \cdot g(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$

(c) $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 3\,x^4 + x^6$

(d) $(g \circ f)(x) = 2 - 2\,x^3 + x^6$

$\diamondsuit$

3.1 Nullstellen von Polynomen

Wir versuchen, die Lage der Nullstellen von Polynomen zu untersuchen. Alle Resultate dieses Abschnitten wären leichter zu formulieren mit Hilfe von komplexen Zahlen. Selbst für reelle Polynome zweiten Grades können die Nullstellen bereits komplex sein.

3.1.1 Grad 1

Ein Polynom ersten Grades ist von der Form

$$f(x) = a_1\, x + a_0$$

Somit ist der Graph eine Gerade mit Steigung a_1. Die einzige Lösung der Gleichung $a_1\, x + a_0 = 0$ ist $x = -a_0/a_1$.

3.1.2 Grad 2

Ein Polynom zweiten Grades ist von der Form

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit $a_2 \neq 0$. Diese Funktion kann umgeschrieben werden zu

$$f(x) = a_2(x^2 + bx + c) \qquad \text{mit} \qquad b = \frac{a_1}{a_2} \qquad c = \frac{a_0}{a_2}$$

Die Lösungen der Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ sind

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\,(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})$$

- Ist $b^2 - 4c > 0$, so ergeben sich zwei verschiedene, reelle Lösungen.
- Ist $b^2 - 4c = 0$, so ergibt sich eine (doppelte) reelle Lösung.
- Ist $b^2 - 4c < 0$, so ergeben sich zwei verschiedene, komplexe Lösungen.

In jedem Falle gilt

$$\begin{aligned} a_2(x - x_1)\,(x - x_2) &= a_2(x - \frac{1}{2}\,(-b + \sqrt{b^2 - 4c}))\,(x - \frac{1}{2}\,(-b - \sqrt{b^2 - 4c})) \\ &= a_2(x^2 + bx + \frac{1}{4}(-b + \sqrt{b^2 - 4c})\,(-b - \sqrt{b^2 - 4c})) \\ &= a_2(x^2 + bx + c) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

und man spricht von der **Faktorisierung**

$$f(x) = a_2(x - x_1)\,(x - x_2)$$

des Polynoms. Die Formeln von Vieta können leicht verifiziert werden.

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= c \\ x_1 + x_2 &= -b \end{aligned}$$

3.1.3 Grad 3

Ein Polynom vom Grad 3 ist von der Form

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit $a_3 \neq 0$. Dies kann umgeschrieben werden zu

$$f(x) = a_3(x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$$

Die Formeln von Cardano[1] erlauben es Ihnen, exakte Werte x_1, x_2, x_3 für die drei Nullstellen des kubischen Polynoms anzugeben. In jeder guten Formelsammlung sind diese angegeben. Die Formeln von Vieta können verifiziert werden.

$$x_1 x_2 x_3 = -b_0$$
$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = b_1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = -b_2$$

Es gilt die Faktorisierung

$$f(x) = a_3(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3) \qquad .$$

3.1.4 Grad ≥ 4

Für Polynome vom Grad 4 gibt es Formeln (von Ferrari[2]) um die Nullstellen exakt zu bestimmen. Allerdings dürfen diese mit gutem Gewissen als kompliziert bezeichnet werden. Für Polynome vom Grad ≥ 5 gibt es keine allgemein gültigen Formeln, um die Nullstellen exakt zu bestimmen, auch wenn dies in Spezialfällen möglich ist.

3.2 Graphen von Polynomen

3.2.1 Lineare Funktion

Der Graph eines Polynoms vom Grad 1

$$f(x) = a\,x + b$$

ist eine Gerade mit **Steigung** a_1 und y-**Achsenabschnitt** b

3.2.2 Quadratische Funktion

Ein Polynom vom Grade 2

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

kann immer in der Form

$$\begin{aligned} f(x) &= a\,(x^2 + 2\frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a} + c \\ f(x) &= a\,(x - x_s)^2 + y_s \end{aligned}$$

geschrieben werden (Vervollständigung des Quadrates). Es gilt

$$x_s = -\frac{b}{2a} \quad \text{und} \quad y_s = c - \frac{b^2}{4a}$$

Somit ist der Graph von $y = f(x)$ eine Parabel. Falls $a > 0$, so öffnet sich die Parabel nach oben, falls $a < 0$ nach unten. Die Koordinaten des **Scheitelpunktes** sind (x_s, y_s).

[1] Geronimo Cardano (1501–1576), italienischer Mathematiker. In Wahrheit hat Nicolo Fontano Tartaglia (1500–1557) die allgemeinen Formeln für die Lösungen einer kubischen Gleichung gefunden. Cardano hat sie publiziert.

[2] Ludovico Ferrari (1522–1565)

3–6 Beispiel : Die Funktion

$$f(x) = 1 + 3\,x - 2\,x^2$$

kann umgeschrieben werden zu

$$f(x) = -2\,\left(x^2 - 2\,\frac{3}{4}\,x - \frac{1}{2}\right) = -2\,\left(x^2 - 2\,\frac{3}{4}\,x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - \frac{1}{2}\right) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$$

Somit befindet sich der Scheitel bei $(\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$ und die Parabel ist nach unten geöffnet. Die Abbildung 3.1 kann mit *Octave* oder `MATLAB` erzeugt werden mittels

Octave

```
x=linspace(-1.5,3);
y=1+3*x-2*x.^2;
plot(x,y)
```

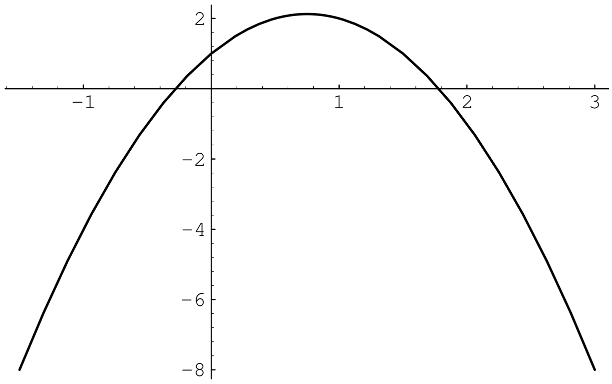


Abbildung 3.1: Der Graph von $f(x) = 1 + 3\,x - 2\,x^2$

◇

3.2.3 Polynome vom Grad ≥ 3

Zuerst sehen wir uns einige sehr einfache Polynome an.

3–7 Beispiel : Zeichnen und vergleichen Sie die Graphen von

$$y(x) = x^2 \quad , \quad y(x) = x^4 \quad , \quad y(x) = x^6 \quad , \quad y(x) = x^8 \ldots$$

◇

3–8 Beispiel : Zeichnen und vergleichen Sie die Graphen von

$$y(x) = x^1 \quad , \quad y(x) = x^3 \quad , \quad y(x) = x^5 \quad , \quad y(x) = x^7 \ldots$$

◇

Die Graphen von Polynomen vom Grad n

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

können ohne lange Rechnung skizziert werden für $|x| \ll 1$ und für $|x| \gg 1$.

Für $|x| \ll 1$

kann man die Eigenschaft $|x^2| = |x \cdot x| \ll |x|$ verwenden und erhält die Approximation

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \approx a_1 x + a_0$$

Somit kann der Graph von $y = f(x)$ approximiert werden durch die Gerade $y = a_1 x + a_0$ für $|x| \ll 1$. Man spricht von einer **linearen Approximation**.

Berücksichtigt man noch einen weiteren Term, so erhält man

$$f(x) \approx a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{für} \quad |x| \ll 1$$

und man spricht von einer **quadratischen Approximation**.

Die beiden obigen Approximationen sind nur richtig für Werte von x „genügend nahe" bei Null. Das Schema von Horner wird es uns später erlauben, solche Approximationen auch für andere Werte von x zu finden.

Für $|x| \gg 1$

kann man die Eigenschaft $|x^n| \gg |x^{n-1}|$ verwenden und erhält die Approximation

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \approx a_n x^n$$

oder auch

$$\frac{f(x)}{x^n} \approx a_n \quad \text{pour} \quad |x| \gg 1$$

Somit ist die qualitative Form des Graphen gegeben durch $y = a_n x^n$ für $|x| \gg 1$.

3.3 Das Schema von Horner

Wenn Sie auf ihrem Taschenrechner den Wert des Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$

für $x = 2.345$ berechnen, so scheint es, dass man den Wert des Ausdrucks $a_i x^i$ bestimmen muss. Hierzu sind i Multiplikationen nötig. Somit braucht man insgesamt

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Multiplikationen und n Additionen. Bei $n = 10$ braucht es zum Beispiel 55 Multiplikationen und 10 Additionen. Die Terme können auch umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} f(x) &= a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= (((a_4 x + a_3) x + a_2) x + a_1) x + a_0 \end{aligned}$$

Bei $n = 4$ benötigt man nur noch 4 Multiplikationen und 4 Additionen, statt 10 Multiplikationen und 4 Additionen. Bei $n = 10$ benötigt man nur 10 Multiplikationen und 10 Additionen, statt 55 Multiplikationen und 4 Additionen.

Bestimmt man alle Zwischenresultate bei der obigen Rechnung, so entsteht das Schema

$$\begin{aligned} b_3 &= a_4 \\ b_2 &= b_3 x + a_3 \\ b_1 &= b_2 x + a_2 \\ b_0 &= b_1 x + a_1 \\ f(x) &= b_0 x + a_0 \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} f(x) &= a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= (((a_4 x + a_3)\, x + a_2)\, x + a_1)\, x + a_0 \\ &= (((b_3 x + a_3)\, x + a_2)\, x + a_1)\, x + a_0 \\ &= ((b_2 x + a_2)\, x + a_1)\, x + a_0 \\ &= (b_1 x + a_1)\, x + a_0 \\ &= b_0 x + a_0 \end{aligned}$$

Allgemein kann man

$$b_{i-1} = b_i x + a_i$$

verwenden und kommt auf das folgende Rechenschema

$$\begin{array}{r|ccccc} & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ x_0 = \ldots & 0 & b_3 x_0 & b_2 x_0 & b_1 x_0 & b_0 x_0 \\ \hline & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & f(x_0) \end{array}$$

Man erstellt zuerst die Zeile mit den Koeffizienten a_i und fügt eine Leerzeile mit $x_0 = \ldots$ an. Dann wird a_4 an die Stelle von b_3 geschrieben. Bei einem Schritt nach rechts oben wird mit x_0 multipliziert und der Wert $b_3 x$ eingetragen. Um b_2 zu erhalten werden die beiden darüberliegenden Zahlen addiert. Dieser Rechenschritt wird repetiert bis man ganz rechts ankommt. In der rechten unteren Ecke werden Sie den Wert von $f(x_0)$ finden.

3–9 Beispiel : Um den Wert des Polynoms

$$f(x_0) = 3x_0^4 - 2x_0^3 + 5x_0^2 - 7x_0 - 12$$

für $x_0 = -2$ zu berechnen, können Sie das untenstehende **Horner Schema** einsetzen

$$\begin{array}{r|ccccc} & 3 & -2 & 5 & -7 & -12 \\ x_0 = -2 & & -6 & 16 & -42 & 98 \\ \hline & 3 & -8 & 21 & -49 & 86 \end{array}$$

Somit ist $f(-2) = 86$. ♢

3.4 Division eines Polynoms durch einen linearen Faktor

Seien x_0 und x zwei Zahlen und für das Polynom $f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ bestimmen wir das Horner Schema für x_0. Dann gilt

$$\begin{gathered} (x - x_0)\,(b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) + f(x_0) \\ = b_3 x^4 + (b_2 - b_3 x_0)\, x^3 + (b_1 - b_2 x_0)\, x^2 + (b_0 - b_1 x_0)\, x + f(x_0) - b_0 x_0 \\ = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = f(x) \end{gathered}$$

und somit

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\left(b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0\right)$$

Führt man dieselben Rechnungen für ein beliebiges Polynom vom Grad n aus, so ergibt sich

3–10 Theorem : *Ist $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $x_0 \in \mathbb{R}$, so erzeugt das Horner–Schema Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_n$ mit*

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

3–11 Beispiel : Für $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12$ und $x_0 = -2$ erhalten Sie

$$f(x) - 86 = (x - (-2))\left(3x^3 - 8x^2 + 21x - 49\right)$$

oder auch

$$\frac{f(x)}{x+2} = 3x^3 - 8x^2 + 21x - 49 + \frac{86}{x+2}$$

$\diamondsuit$

Das Horner–Schema erlaubt es Ihnen, ein Polynom durch einen Linearfaktor $(x - x_0)$ zu **dividieren**. Im allgemeinen ist die Division von zwei Polynomen etwas mühsamer und das Horner–Schema lässt sich nicht einsetzen. Auf die allgemeine Polynomdivision werden wir im nächsten Abschnitt eingehen.

Das obige Beispiel führt auch auf die Identität

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12 = 86 + (x+2)\left(3x^3 - 8x^2 + 21x - 49\right)$$

Wiederholt man dieselbe Rechnung für das Polynom $3x^3 - 8x^2 + 21x - 49$, so erhalten wir

$$3x^3 - 8x^2 + 21x - 49 = -147 + (x+2)\left(3x^2 - 14x + 49\right)$$

und somit

$$f(x) = 86 - 147\,(x+2) + (x+2)^2(3x^2 - 14x + 49)$$

Durch weiteres Wiederholen erhält man schliesslich

$$f(x) = 86 - 147\,(x+2) + 89\,(x+2)^2 - 26\,(x+2)^3 + 3\,(x+2)^4$$

In dieser Form kann man dem Polynom leicht ansehen, wie der Graph für x–Werte nahe bei -2 aussieht (Wieso?).

Die obigen Rechnungen können im **grossen Horner–Schema** zusammengestellt werden.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & -2 & 5 & -7 & -12 \\
x_0 = -2 & & -6 & 16 & -42 & 98 \\
\hline
 & 3 & -8 & 21 & -49 & \underline{86} \\
x_0 = -2 & & -6 & 28 & -98 & \\
\hline
 & 3 & -14 & 49 & \underline{-147} & \\
x_0 = -2 & & -6 & 40 & & \\
\hline
 & 3 & -20 & \underline{89} & & \\
x_0 = -2 & & -6 & & & \\
\hline
 & 3 & \underline{-26} & & & \\
x_0 = -2 & & & & & \\
\hline
 & \underline{3} & & & &
\end{array}
$$

3–12 Beispiel : Erstellen Sie das grosse Horner–Schema für das Polynom

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12$$

und $x_0 = -1$.

Überprüfen Sie ihre Rechnungen mittels der (richtigen) Formel

$$f(x) = 5 - 35\,(x+1) + 29\,(x+1)^2 - 14\,(x+1)^3 + 3\,(x+1)^4$$

In diesem Beispiel ist es leicht, den Graphen von $y = f(x)$ bei $x \approx -1$ zu skizzieren. ♢

3–13 Beispiel : Zeichnen Sie den Graphen des Polynoms $f(x) = 2x^3 - x + 4$ für $-2 \leq x \leq 2$, indem Sie die Werte der Funktion und die Steigung der Kurve für $x = -2, -1, 0, 1, 2$ berechnen und anschliessend zeichnen.

Lösung: Ein Teil des grossen Schemas von Horner für $x_0 = -2$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 0 & -1 & 4 \\
x_0 = -2 & & -4 & 8 & -14 \\
\hline
 & 2 & -4 & 7 & \underline{-10} \\
x_0 = -2 & & -4 & 16 & \\
\hline
 & 2 & -8 & \underline{23} &
\end{array}$$

Somit ist

$$f(x) = -10 + 23\,(x+2) + \ldots$$

und der Graph geht durch den Punkt $(-2, -10)$ mit einer Steigung von 23. Es ist nicht notwendig das vollständige Hornerschema zu erstellen, da nur die Resultate der ersten beiden Zeilen verwendet werden. Diese Rechnung muss nun wiederholt werden für $x_0 = -1, 0, 1$ und 2. Das führt zur Tabelle

x	-2	-1	0	1	2
Wert	-10	3	4	5	18
Steigung	23	5	-1	5	23

Nun ist es leicht, den Graphen qualitativ sehr genau zu zeichnen. Besondere Beachtung sollte der Wahl der Skalen geschenkt werden.

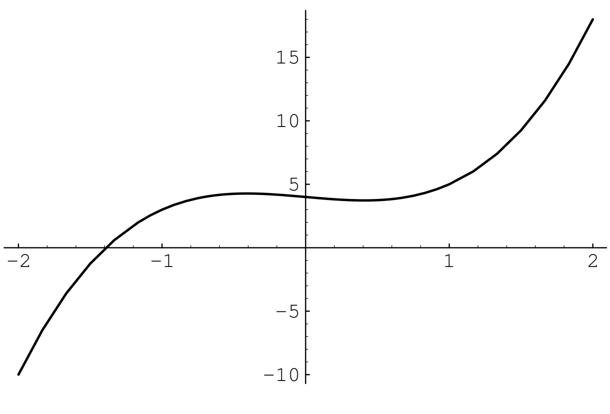


Abbildung 3.2: Der Graph von $f(x) = 2x^3 - x + 4$

♢

3.5 Division von Polynomen

Mit Hilfe der Horner–Schemas können Polynome nur durch lineare Faktoren dividiert werden, d.h. durch Polynome vom Grad 1. Um durch ein Polynom von höherem Grad zu dividieren, greifen wir auf das Schema zur Division von ganzen Zahlen zurück und modifizieren es entsprechend.

3–14 Beispiel : Um $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3$ durch $x^2 + 2x + 3$ zu dividieren, betrachten wir

$$
\begin{array}{rrrrrrcrrrcrrrr}
(x^5 & +3x^4 & +5x^3 & +4x^2 & +0x & +3) & / & (x^2 & +2x & +3) & = & x^3 & +x^2 & +0x & +1\\
x^5 & +2x^4 & +3x^3 \\ \cline{1-3}
 & x^4 & +2x^3 & +4x^2 \\
 & x^4 & +2x^3 & +3x^2 \\ \cline{2-4}
 & & & 1x^2 & +0x \\
 & & & 0x^2 & +0x \\ \cline{4-5}
 & & & x^2 & +0x & +3\\
 & & & x^2 & +2x & +3\\ \cline{4-6}
 & & & & -2x
\end{array}
$$

d.h.

$$\frac{x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3}{x^2 + 2x + 3} = x^3 + x^2 + 1 + \frac{-2x}{x^2 + 2x + 3}$$

Diese Rechnung sollte mit der Division von $135403 = 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3$ durch $123 = 10^2 + 2 \cdot 10 + 3$ verglichen werden. Es ist zu beachten, dass hier **nicht** genau die Primarschuldivision durchgeführt wird.

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
(1 \cdot 10^5 & +3 \cdot 10^4 & +5 \cdot 10^3 & +4 \cdot 10^2 & +0 \cdot 10 & +3) & / & (1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) = \\
 & & & & & & & = 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 1\\
1 \cdot 10^5 & +2 \cdot 10^4 & +3 \cdot 10^3 \\ \cline{1-3}
 & 1 \cdot 10^4 & +2 \cdot 10^3 & +4 \cdot 10^2 \\
 & 1 \cdot 10^4 & +2 \cdot 10^3 & +3 \cdot 10^2 \\ \cline{2-4}
 & & & 1 \cdot 10^2 & +0 \cdot 10 \\
 & & & 0 \cdot 10^2 & +0 \cdot 10 \\ \cline{4-5}
 & & & \cdot 10^2 & +0 \cdot 10 & +3\\
 & & & \cdot 10^2 & +2 \cdot 10 & +3\\ \cline{4-6}
 & & & & -2 \cdot 10
\end{array}
$$

d.h.

$$
\begin{aligned}
\frac{1 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3}{1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3} &= 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 1 + \frac{-2 \cdot 10}{1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3}\\
\frac{135403}{123} &= 1101 + \frac{-20}{123}
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

Mit Hilfe der obigen Überlegungen erhalten wir das folgende Theorem.

3–15 Theorem : *Seien f ein Polynom vom Grad n und g ein Polynom vom Grad m mit $m < n$. Dann gilt*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

h ist ein Polynom vom Grad $n-m$, und der Grad des Restpolynoms r ist $< m$. Die Division von f durch g ergibt h mit einem Rest von r.

Um Divisionen durch Null zu vermeiden, kann die obige Formel auch in einer anderen Form geschrieben werden.

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

Für das obige Beispiel ist

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3 \\ g(x) &= x^2 + 2x + 3 \\ h(x) &= x^3 + x^2 + 1 \\ r(x) &= -2x \end{aligned}$$

3–16 Satz : *Für $m = 1$ und $g(x) = x - x_0$ erhalten wir $f(x) = (x - x_0)\, h(x) + r(x)$. Der Rest $r(x)$ ist ein Polynom vom Grade 0, d.h.eine Konstante. Es gilt $r(x) = f(x_0)$. In diesem Spezialfall können die Koeffizienten von $h(x)$ mit dem Horner–Schema bestimmt werden.*

Mit Hilfe der Division von Polynomen kann Information über Nullstellen gewonnen werden.

3–17 Beispiel : Durch Zufall wissen wir, dass für das Polynom $g(x) = x^3 - 21x + 20$ gilt $g(1) = 0$. Nun dividieren wir $g(x)$ durch $(x-1)$ mit Hilfe der Horner–Schemas.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -21 & 20 \\ x_0 = 1 & & 1 & 1 & -20 \\ \hline & 1 & 1 & -20 & 0 \end{array}$$

Wir erhalten

$$g(x) = x^3 - 21x + 20 = (x-1)\,(x^2 + x - 20) \qquad .$$

Nun ist es leicht zu sehen, dass $x_2 = 4$ und $x_3 = -5$ auch Nullstellen des Polynoms sind, und es gilt

$$g(x) = x^3 - 21x + 20 = (x-1)\,(x-4)\,(x+5) \qquad .$$

Ist von einem Polynom vom Grade 3 also eine Nullstelle bekannt ($x_1 = 1$), so muss man nur noch eine quadratische Gleichung lösen, um alle Nullstellen zu bestimmen. ♢

Die obige Idee lässt sich leicht auf eine allgemeinere Situation übertragen. Ist von einem Polynom $g(x)$ eine Nullstelle x_1 bekannt, so ist das Polynom durch $(x - x_1)$ zu dividieren und vom Resultat, einem Polynom vom Grade $n-1$ sind die Nullstellen zu finden.

In weitergehenden Mathematikkursen kann das folgenden Resultat bewiesen werden.

3–18 Theorem : *Fundamentalsatz der Algebra*
Jedes Polynom $f(x)$ hat mindestens eine Nullstelle, reell oder komplex.

3–19 Definition : $x_0 \in \mathbb{R}$ heisst **Nullstelle der Ordnung** n des Polynoms $f(x)$, falls f geschrieben werden kann in der Form $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$ für ein Polynom $g(x)$ mit $g(x_0) \neq 0$. Man sagt auch x_0 sei eine Nullstelle mit **Multiplizität** n.

Mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra kann das folgende Resultat leicht bewiesen werden.

3–20 Theorem : *Jedes Polynom vom Grade n hat genau n Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, reell oder komplex. Das Polynom kann geschrieben werden in der Form*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n (x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_n) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$

Dieses Resultat ist nur richtig, falls reelle und komplexe Nullstellen inklusive Multiplizität berücksichtigt werden.

3–21 Beispiel : Leicht verifiziert man, dass

$$\begin{aligned} x^5 - 3x^4 - 10x^3 + 52x^2 - 72x + 32 &= (x-1)\,(x-2)\,(x-2)\,(x-2)\,(x+4) \\ &= (x-1)\,(x-2)^3 (x+4) \end{aligned}$$

Somit sind $x_1 = 1$ et $x_2 = -4$ einfache Nullstellen, und $x_3 = 2$ ist eine Nullstelle mit Multiplizität 3. Es gilt $1 + 1 + 3 = 5$. ♢

Verwendet man keine komplexen Nullstellen, so ist die Formulierung des Theorems anzupassen.

3–22 Theorem : *Jedes reelle Polynom f vom Grade n hat r reelle Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ mit $n - r = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Man kann das Polynom umformen zu*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = g(x)\,(x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_r)$$

mit einem Polynom $g(x)$ vom Grad $2m$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3–23 Beispiel :

$$x^5 + 3\,x^4 + 6\,x^3 + 10\,x^2 + 9x + 3 = (x+1)^3\,(x^2 + 3)$$

♢

Mit Hilfe der obigen Zerlegung von Polynomen können wir das folgende nützliche Resultat beweisen.

3–24 Theorem :
Stimmen die Werte von zwei Polynomen $f(x)$ und $g(x)$ vom Grad n an $n+1$ verschiedenen Stellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ überein, so sind die beiden Polynome identisch, d.h $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis : Sei $h\left(x\right)$ die Differenz der beiden Polynome.

$$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right) \quad .$$

h ist ein Polynom vom Grade $\leq n$ mit $h\left(x_i\right)=0$ für $i=1,2,\ldots,n$. Wir schreiben es in der Form

$$h\left(x\right)=A\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\ldots\left(x-x_n\right)$$

Wegen der Voraussetzung ist auch $h\left(x_0\right)=0$, aber in der obigen Form ist jeder der Linearfaktoren von Null verschieden. Somit muss die Konstante $A=0$ sein, d.h. $h\left(x\right)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, oder auch $f\left(x\right)=g\left(x\right)$.
□

Als leichte Konsequenz erhalten wir das folgende Resultat.

3–25 Theorem : *Identitätssatz für Polynome*
Sei

$$f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\;, \qquad g\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k$$

Die Bedingung

$$f\left(x\right)=g\left(x\right) \quad \textit{für alle} \quad x\in\mathbb{R}$$

ist genau dann richtig, wenn

$$a_k=b_k \quad \textit{für} \quad k=0,1,2,\ldots,n$$

Dies ist auch äquivalent zur Bedingung

$$f\left(x_i\right)=g\left(x_i\right) \quad \textit{für } n+1 \textit{ verschiedene Punkte} \quad x_i\in\mathbb{R}$$

Somit gibt es zu $n+1$ Punkten genau ein Polynom vom Grad n, dessen Graph durch alle gegebenen Punkte geht.

Beweis : Wir teilen den Beweis in zwei unabhängige Teile auf.

- Es ist klar, dass aus $a_k=b_k$ sofort $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ folgt.
- Ist $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ für alle $x\in\mathbb{R}$, so gilt sicher

  $$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(a_k-b_k\right)x^k=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k=0$$

  für $n+1$ verschiedene Werte $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ der unabhängigen Variablen. Somit können wir schreiben:

  $$h\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k=c_n(x-x_1)\left(x-x_2\right)\ldots\left(x-x_n\right)$$

  Verwendet man $h\left(x_0\right)=0$ und $x_0-x_k\neq0$ für $k=1,2,\ldots,n$ um zu sehen, dass $c_n=0$. Ebenso zeigt man $c_{n-1}=0$ und $c_{n-2}=0$, etc. Schliesslich hat man $c_k=0$ für $k=0,1,2,\ldots,n$. Das ist das gewünschte Resultat.

□

3–26 Satz : *Additionstheorem für Binomialkoeffizienten. Quelle: [Walt85, p41].*
Für natürliche Zahlen $n \le p+q$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} p \\ j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ n-j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ n \end{pmatrix}$$

Beweis : Offensichtlich gilt für natürliche Zahlen p und q

$$(1+x)^p \; (1+x)^q = (1+x)^{p+q}$$

Wegen der binomischen Formel gilt

$$\begin{aligned} (1+x)^p &= \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} x^k \\ (1+x)^q &= \sum_{k=0}^{q} \begin{pmatrix} q \\ k \end{pmatrix} x^k \\ (1+x)^{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} \begin{pmatrix} p+q \\ k \end{pmatrix} x^k \end{aligned}$$

In $(1+x)^{p+q}$ ist der Koeffizient von x^n also $\begin{pmatrix} p+q \\ n \end{pmatrix}$. In $(1+x)^p \; (1+x)^q$ tragen verschiedene Terme zu $x^n = x^n \cdot x^0 = x^{n-1} \cdot x^1 = x^{n-2} \cdot x^2 = \ldots = x^1 \cdot x^{n-1} = x^0 \cdot x^n$ bei. Diese sind zu summieren, was zum Beitrag

$$\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} p \\ j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ n-j \end{pmatrix}$$

führt. Da die beiden Polynome $(1+x)^p \; (1+x)^q$ und $(1+x)^{p+q}$ identisch sind, müssen die Koeffizienten von x^n gleich sein, d.h.

$$\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} p \\ j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ n-j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ n \end{pmatrix}$$

□

3.6 Polynom–Interpolation

Das Verfahren der Interpolation einer Anzahl $n+1$ von gegebenen Punkten (x_i, y_i) durch ein Polynom vom Grade n wird zuerst an einem Beispiel illustriert. Es gibt verschiedene Verfahren, dieses Polynom zu finden. Wir werden die Methoden von Lagrange[3] und Newton[4] kennenlernen.

3.6.1 Problemstellung

Finde ein möglichst einfaches Polynom $f(x)$ mit den Eigenschaften

$$f(-1) = 3 \;, \quad f(1) = -2 \;, \quad f(4) = 5 \;, \quad f(5) = 4 \;,$$

d.h. der Graph des Polynoms geht durch die Punkte $P_1 = (-1, 3)$, $P_2 = (1, -2)$, $P_3 = (4, 5)$ und $P_4 = (5, 4)$.

[3] Joseph Louis Lagrange (1736–1813),französischer Mathematiker
[4] Sir Isaac Newton (1642–1727), englischer Physiker, Mathematiker und Astronom

Die Bedingung „möglichst einfach“ heisst hier „von möglichst kleinem Grad“, in unserem Beispiel vom Grad 3. Das folgende Theorem zeigt, dass die gestellte Aufgabe eindeutig lösbar ist, und anschliessend stellen wir zwei praktische Verfahren vor, um das gesuchte Polynom zu bestimmen.

3–27 Theorem : *Sind $n+1$ verschiedene Punkte (x_i, y_i) mit $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ gegeben mit $x_i \neq x_j$ falls $i \neq j$, so gibt es genau ein Polynom $p(x)$ vom Grade n mit $p(x_i) = y_i$ für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.*

Beweis : Die Eindeutigkeitsaussage ist eine einfache Konsequenz des obigen Identitätssatzes für Polynome. Die untenstehenden Konstruktionen zeigen, dass es ein Polynom mit den gewünschten Eigenschaften gibt. □

Es muss klar herausgestrichen werden, dass es auch andere Zielsetzungen für die Interpolation von Datenpunkten gibt. Als Stichworte seien **Splines**, **Tschebyschew**–Polynome und **Regression** erwähnt. Hierbei sind nicht Polynome gesucht, die durch alle gegebenen Punkte gehen, sondern andere Eigenschaften haben. Das anwendungsorientierte Beispiel auf Seite 55 zeigt auch klar die Grenzen der hier vorgestellten Interpolationsmethode auf.

3.6.2 Vorgehen nach Lagrange

Wir untersuchen als Beispiel die obigen vier gegebenen Punkte und werden in einem ersten Schritte 4 Polynome $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ und $p_4(x)$ suchen mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{llll} p_1(-1) = 1 & p_1(1) = 0 & p_1(4) = 0 & p_1(5) = 0 \\ p_2(-1) = 0 & p_2(1) = 1 & p_2(4) = 0 & p_2(5) = 0 \\ p_3(-1) = 0 & p_3(1) = 0 & p_3(4) = 1 & p_3(5) = 0 \\ p_4(-1) = 0 & p_4(1) = 0 & p_4(4) = 0 & p_4(5) = 1 \end{array}$$

Ist diese Aufgabe mit Erfolg gelöst worden, so berechnet sich die Lösung des ursprünglichen Problems leicht durch eine Linearkombination der obigen Polynome

$$f(x) = 3\,p_1(x) - 2\,p_2(x) + 5\,p_3(x) + 4\,p_4(x)$$

Rechnungen

Damit für p_1 die Gleichungen

$$p_1(1) = 0 \qquad p_1(4) = 0 \qquad p_1(5) = 0$$

gelten, muss $p_1(x)$ von der Form

$$p_1(x) = A_1\,(x-1)\,(x-4)\,(x-5)$$

sein, wobei A_1 so zu wählen ist, dass $p_1(-1) = 1$. Somit ergibt sich

$$p_1(x) = \frac{1}{(-1-1)\,(-1-4)\,(-1-5)}\,(x-1)\,(x-4)\,(x-5) = \frac{-1}{60}\,(x^3 - 10x^2 + 29x - 20)$$

Mittels analoger Überlegungen erhält man wegen

$$p_2(-1) = 0 \qquad p_2(1) = 1 \qquad p_2(4) = 0 \qquad p_2(5) = 0$$

das Polynom p_2 als

$$p_2(x) = \frac{1}{(1+1)\,(1-4)\,(1-5)}\,(x+1)\,(x-4)\,(x-5) = \frac{1}{24}\,(x^3 - 8x^2 + 11x + 20)$$

$$p_3(x) = \frac{1}{(4+1)(4-1)(4-5)}(x+1)(x-1)(x-5) = \frac{-1}{15}(x^3-5x^2-x+5)$$

und

$$p_4(x) = \frac{1}{(5+1)(5-1)(5-4)}(x+1)(x-1)(x-4) = \frac{1}{24}(x^3-4x^2-x+4)$$

In Abbildung 3.3 sind die Graphen dieser 4 Polynome dargestellt. Speziell zu beachten ist die Lage der Nullstellen.

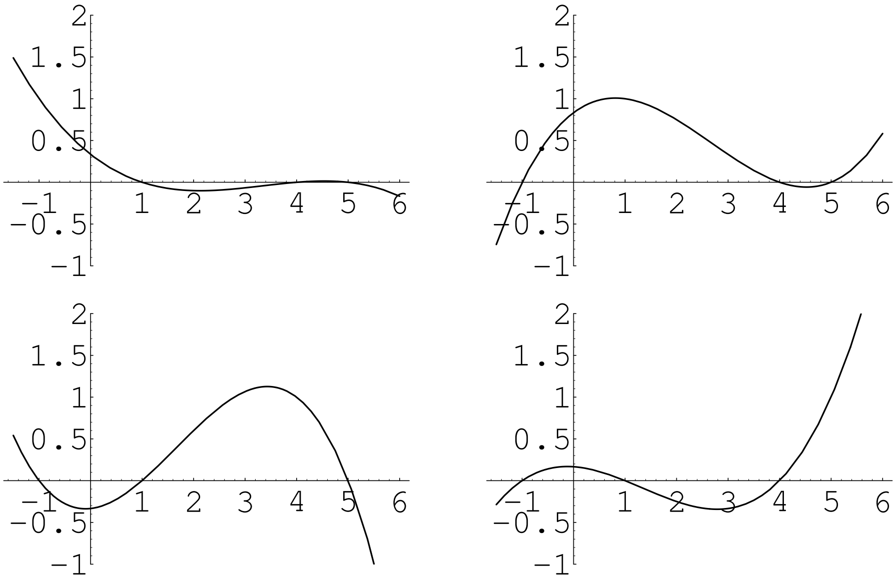


Abbildung 3.3: Basispolynome für die Lagrange–Interpolation

Somit erhalten wir das gesuchte Polynom $f(x)$; es ist in Abbildung 3.4 dargestellt.

$$\begin{aligned}
f(x) = \; & 3p_1(x) - 2p_2(x) + 5p_3(x) + 4p_4(x) \\
= \; & \tfrac{-3}{60}(x^3-10x^2+29x-20) + \tfrac{-2}{24}(x^3-8x^2+11x+20) \\
& + \tfrac{-5}{15}(x^3-5x^2-x+5) + \tfrac{4}{24}(x^3-4x^2-x+4) \\
= \; & \tfrac{1}{30}(-9x^3+65x^2-66x-50)
\end{aligned}$$

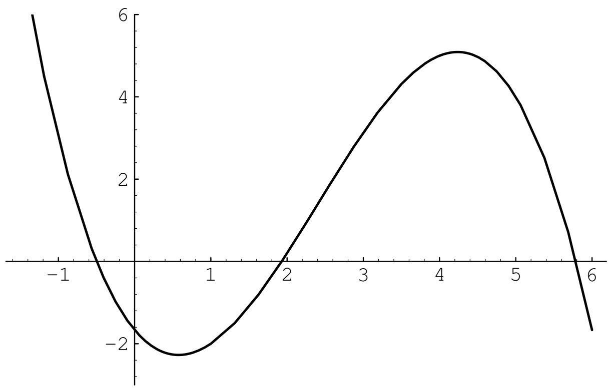


Abbildung 3.4: Interpolationspolynom

3.6.3 Newton–Interpolation

Es gibt ein zweites Rechenverfahren, um die Interpolationsaufgabe zu lösen. Gesucht wird ein Polynom vom Grade n mit den vorgegebenen $n+1$ Werten

$$f(x_0) = y_0 \quad , \quad f(x_1) = y_1 \quad , \quad f(x_2) = y_2 \quad \ldots \quad f(x_n) = y_n$$

Newton's Ansatz sagt, dass ein Polynom der Form

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)\,(x-x_1) + \alpha_3(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2) + \ldots \\ &\quad + \alpha_n(x-x_0)\,(x-x_1)\ldots(x-x_n) \end{aligned}$$

das Problem löst. Setzt man die obigen Bedingungen $p(x_i) = y_i$ in das Polynom p ein, so ergibt sich das folgende Gleichungssystem für die Unbekannten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha_0 \\ y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1(x_1-x_0) \\ y_2 &= \alpha_0 + \alpha_1(x_2-x_0) + \alpha_2(x_2-x_0)\,(x_2-x_1) \\ &\vdots \\ y_n &= \alpha_0 + \alpha_1(x_n-x_0) + \alpha_2(x_n-x_0)\,(x_n-x_1) + \ldots + \alpha_n(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1}) \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann leicht von oben nach unten gelöst werden.

Beim Newtonverfahren ist es leicht noch einen zusätzlichen Stützpunkt (x_{n+1}, y_{n+1}) zu berücksichtigen. Das ist beim Verfahren nach Lagrange nicht leicht möglich.

Wir betrachten noch einmal das vorangehende Beispiel, d.h.

$$p(-1) = 3 \qquad p(1) = -2 \qquad p(4) = 5 \qquad p(5) = 4$$

oder

$$\begin{array}{llll} x_0 = -1 & x_1 = 1 & x_2 = 4 & x_3 = 5, \\ y_0 = 3 & y_1 = -2 & y_2 = 5 & y_3 = 4 \end{array}$$

Das führt zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha_0 \\ -2 &= \alpha_0 + \alpha_1 2 \\ 5 &= \alpha_0 + \alpha_1 5 + \alpha_2 5 \cdot 3 \\ 4 &= \alpha_0 + \alpha_1 6 + \alpha_2 6 \cdot 4 + \alpha_3 6 \cdot 4 \cdot 1 \end{aligned}$$

Dieses System hat die eindeutige Lösung

$$\alpha_0 = 3, \quad \alpha_1 = -\frac{5}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{29}{30}, \quad \alpha_3 = -\frac{3}{10}$$

Dies führt auf die Lösung

$$\begin{aligned} p(x) = &\ 3 - \tfrac{5}{2}\,(x+1) + \tfrac{29}{30}\,(x+1)\,(x-1) - \tfrac{3}{10}\,(x+1)\,(x-1)\,(x-4) \\ = &\ \tfrac{1}{30}\,(-9x^3 + 65x^2 - 66x - 50) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir dieselbe Lösung wie mit dem Verfahren nach Lagrange, wie es sein muss.

Allerdings kann dies bei vielen Stützpunkten zu längeren Rechnungen führen. Eine systematische Darstellung dieses Lösungsweges wurde bereits von Newton im **Schema der dividierten Differenzen** angegeben.

Das Schema wird spaltenweise von links nach rechts aufgefüllt. Neben den Werten x_i und y_i stehen die ersten dividierten Differenzen

$$y_{0,1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad y_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad \ldots \qquad y_{n-1,n} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

In der nächsten Spalte stehen die zweiten dividierten Differenzen

$$y_{0,1,2} = \frac{y_{1,2} - y_{0,1}}{x_2 - x_0}, \qquad y_{1,2,3} = \frac{y_{2,3} - y_{1,2}}{x_3 - x_1}, \qquad \ldots \qquad y_{n-2,n-1,n} = \frac{y_{n-1,n} - y_{n-2,n-1}}{x_n - x_{n-2}},$$

dann die entsprechenden dritten dividierten Differenzen.

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & y_{0,1} & & & \\
x_1 & y_1 & & y_{0,1,2} & & \\
 & & y_{1,2} & & y_{0,1,2,3} & \\
x_2 & y_2 & & y_{1,2,3} & & \ldots \\
 & & y_{2,3} & & & \\
x_3 & y_3 & & & & \\
\vdots & \vdots & & & \ldots & \\
x_{n-1} & y_{n-1} & & y_{n-2,n-1,n} & & \\
 & & y_{n-1,n} & & & \\
x_n & y_n & & & &
\end{array}$$

Abbildung 3.5: Schema der dividierten Differenzen

Das Interpolationspolynom $p(x)$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} p(x) = {} & y_0 + y_{0,1}(x - x_0) + y_{0,1,2}(x - x_0)(x - x_1) + +y_{0,1,2,3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots \\ & \ldots + y_{0,1,\ldots,n}(x - x_0)\ \ldots\ (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Will man in diesem Rechenverfahren noch einen weiteren Stützpunkt berücksichtigen, so muss nur unten rechts eine weitere Diagonalzeile angefügt werden. Es ist nicht notwendig die x–Werte ihrer Grösse nach zu ordnen.

Angewandt auf das obige Beispiel ergibt dieses Schema

$$\begin{array}{r|cccc}
-1 & 3 & & & \\
 & & \frac{-5}{2} & & \\
1 & -2 & & \frac{29}{30} & \\
 & & \frac{7}{3} & & \frac{-3}{10} \\
4 & 5 & & \frac{-10}{12} & \\
 & & -1 & & \\
5 & 4 & & &
\end{array}$$

und die Lösung ist wie oben gegeben durch

$$p(x) = 3 - \frac{5}{2}(x+1) + \frac{29}{30}(x+1)(x-1) - \frac{3}{10}(x+1)(x-1)(x-4)$$

3.6.4 Gemeinsamkeiten

Das Lagrange- und das Newtonverfahren verwenden dieselbe Idee, um das Interpolationspolynom zu konstruieren.

Man verwendet linear unabhängige Polynome $p_i(x)$ und bildet die Summe

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i(x)$$

Hierbei sind die Koeffizienten α_i so zu bestimmen, dass

$$p(x_0) = y_0 \quad , \quad p(x_1) = y_1 \quad , \quad p(x_2) = y_2 \quad \ldots \quad p(x_n) = y_n \quad .$$

Beim Lagrangeverfahren sind die Polynome gegeben durch

$$\begin{aligned}
p_0(x) = &\ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) \\
p_1(x) = &\ (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) \\
p_2(x) = &\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n) \\
&\ \vdots \\
p_n(x) = &\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Es ergibt sich ein sehr einfaches System von Gleichungen für die Unbekannten α_i (welches?).

Beim Newtonverfahren sind die Polynome gegeben durch

$$\begin{aligned}
p_0(x) = &\ 1 \\
p_1(x) = &\ (x - x_0) \\
p_2(x) = &\ (x - x_0)(x - x_1) \\
p_2(x) = &\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&\ \vdots \\
p_n(x) = &\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Das System von Gleichungen für die Unbekannten α_i ist im vorangehenden Abschnitt angegeben.

3.6.5 Beispiele und Warnung

Bei der numerischen Berechnung von Integralen spielt die folgende Aufgabe eine wichtige Rolle. Sie bildet die Grundlage für das Verfahren von Simpson zur numerischen Berechnung des bestimmten Integrales.

3–28 Beispiel : Von einer Funktion $f(x)$ kennt man

$$f(-h) = y_{-1} \qquad , \qquad f(0) = y_0 \qquad , \qquad f(h) = y_1$$

und sucht ein Polynom zweiten Grades, welches durch die drei gegebenen Punkte geht.

Lösung: Wir geben drei unabhängige Lösungswege an.

1. Das gesuchte Polynom $p(x)$ ist von der Form

$$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

und wir müssen die drei Koeffizienten a, b und c bestimmen. Dazu verwenden wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rl} p\,(-h) = a\,h^2 & -b\,h \quad +c = y_{-1} \\ p\,(0) = & \qquad\quad\; +c = y_0 \\ p\,(-h) = a\,h^2 & +b\,h \quad +c = y_1 \end{array}$$

Hieraus kann man leicht die Lösungen

$$c = y_0 \qquad , \qquad a = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2\,h^2} \qquad , \qquad b = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$$

ablesen. Das obige lineare Gleichungssystem kann auch mittels Matrizen dargestellt werden und wir erhalten

$$\begin{bmatrix} (-h)^2 & -h & 1 \\ 0^2 & 0 & 1 \\ h^2 & h & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Dreht man die Reihenfolge der Unbekannten a, b und c um so kann man das selbe auch schreiben als

$$\begin{bmatrix} 1 & -h & (-h)^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & h & h^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Die in dieser Notation auftretende Matrix ist eine sogenannte **Vandermonde–Matrix**.

2. Die drei Basispolynome des Verfahrens von Lagrange sind

$$\begin{aligned} p_1\,(x) &= \tfrac{1}{2h^2}\; x\,(x-h) \\ p_2\,(x) &= \tfrac{-1}{h^2}\;(x+h)\,(x-h) \\ p_3\,(x) &= \tfrac{1}{2h^2}\;(x+h)\,x \end{aligned}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} p\,(x) &= y_{-1}\,p_1\,(x) + y_0\,p_2\,(x) + y_1\,p_3\,(x) \\ &= \tfrac{1}{2h^2}\;\left(y_{-1}\,x\,(x-h) - 2\,y_0\,(x+h)\,(x-h) + y_1\,(x+h)\,x\right) \\ &= \tfrac{1}{2h^2}\;\left((y_{-1} - 2\,y_0 + y_1)\,x^2 + h\,(y_1 - y_{-1})\,x + 2\,y_0\,h^2\right) \end{aligned}$$

3. Die drei Basispolynome des Verfahrens von Newton sind

$$\begin{aligned} p_0\,(x) &= 1 \\ p_1\,(x) &= x + h \\ p_2\,(x) &= (x+h)\,x \end{aligned}$$

und das Gleichungssystem für die Koeffizienten α_0, α_1 und α_2 ist

$$\begin{aligned} y_{-1} &= \alpha_0 \\ y_0 &= \alpha_0 + \alpha_1\,h \\ y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1\,2\,h + \alpha_2\,2\,h^2 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\alpha_0 = y_{-1} \qquad , \qquad \alpha_1 = \frac{1}{h}\,(y_0 - y_{-1}) \qquad , \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2\,h^2}\,(y_{-1} - 2\,y_0 + y_1)$$

somit ist

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_0\,p_0(x) + \alpha_1\,p_1(x) + \alpha_2\,p_2(x) \\ &= \tfrac{1}{2h^2}\,\left(2\,h^2\,y_{-1} + 2\,h\,(y_0 - y_{-1})\,(x+h) + (y_{-1} - 2\,y_0 + y_1)\,(x+h)\,x\right) \\ &= \tfrac{1}{2h^2}\,\left((y_{-1} - 2\,y_0 + y_1)\,x^2 + h\,(y_1 - y_{-1})\,x + 2\,y_0\,h^2\right) \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, dass alle drei Verfahren dasselbe Resultat liefern, was wegen der allgemeinen Theorie der Fall sein muss. ◇

3–29 Beispiel : Die Volkszählungen in den USA haben in diesem Jahrhundert die folgenden Daten ergeben

Jahr	1900	1910	1920	1930	1940
Bevölkerung	75.995	91.972	105.711	123.203	131.669
Jahr	1950	1960	1970	1980	1990
Bevölkerung	150.697	179.323	203.212	226.505	249.633

Tabelle 3.1: Bevölkerung der USA, 1900–1990

Für Zwischenjahre kann die Bevölkerung geschätzt werden, indem die beiden Nachbarpunkte durch eine Gerade verbunden werden. Dieses Verfahren heisst auch **stückweise lineare Interpolation** und führt zur Abbildung 3.6.

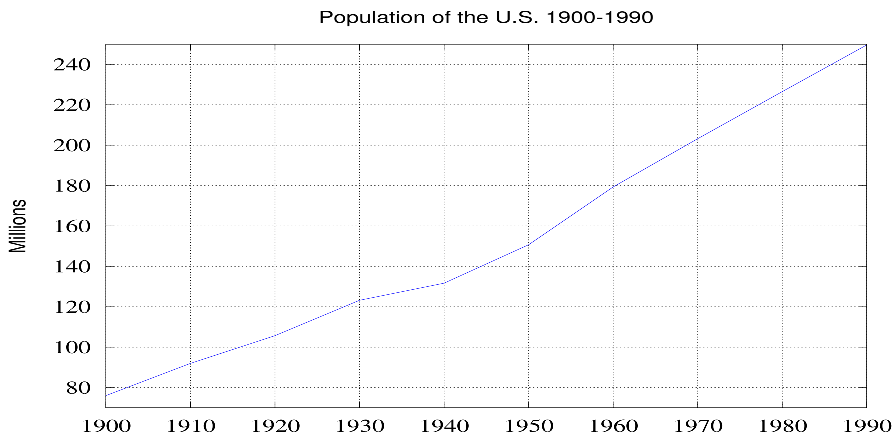


Abbildung 3.6: Stückweise lineare Interpolation für die Bevölkerung der USA

Durch diese zehn Datenpunkte kann auch ein Polynom vom Grade neun gelegt werden. Hierzu sind leider zehn Koeffizienten zu bestimmen, was aber mit den heutigen Rechenanlagen absolut kein Problem mehr ist.

Es sollte klar sein, dass Abbildung 3.7 für die Jahre nach 1990 völlig unbrauchbare Resultate liefert. Die oben vorgestellten Verfahren sind nur zur **Interpolation** geeignet und für **Extrapolation** absolut ungeeignet. Es kommt oft vor, dass die Extrapolation schlechter wird durch das Verwenden von Polynomen höherer Ordnung. Bei dieser Aufgabe ist eher ein Polynom niedrigeren Grades durch Regression möglichst gut (aber nicht notwendigerweise exakt) durch die Punkte zu legen. Für numerische Integration, Differentiation und das Lösen von Differentialgleichungen sind aber Interpolationspolynome von hoher Ordnung durchaus von Bedeutung.

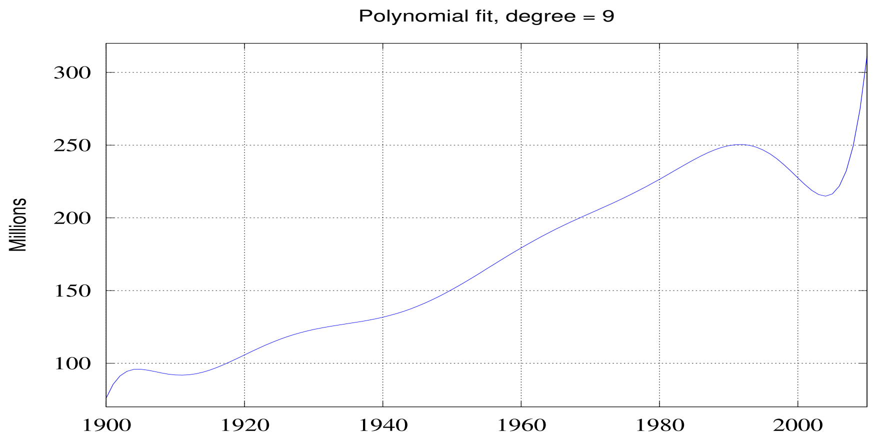


Abbildung 3.7: Polynominterpolation vom Grad neun für die Bevölkerung der USA

Hier ist ein Stück Code in *MATLAB* um dieses Problem numerisch zu lösen und die beiden Graphiken zu erzeugen.

Octave

```
% This example is older than MATLAB.  It started as an exercise in
% "Computer Methods for Mathematical Computations", by Forsythe,
% Malcolm and Moler, published by Prentice-Hall in 1977.
%
% Here is the US Census data from 1900 to 1990.

% Time interval
t = (1900:10:1990)';

% Population
p = [75.995 91.972 105.711 123.203 131.669 ...
     150.697 179.323 203.212 226.505 249.633]';

plot(t,p);
title('Population of the U.S. 1900-1990');
ylabel('Millions'); grid on

fprintf(stderr,"press any key to continue...\n"),pause() % Press any key.

% Let's fit the data with a polynomial in t and use it to
% extrapolate to t = 2000.  The coefficients in the polynomial
% are obtained by solving a linear system of equations involving
% a 10-by-10 Vandermonde matrix, whose elements are powers of
% scaled time, A(i,j) = s(i)^(n-j);

clear A
n = length(t);
s = (t-1900)/10;
A(:,n) = ones(n,1);
for j = n-1:-1:1
   A(:,j) = s .* A(:,j+1);
end

% The coefficients c for a polynomial of degree d that fits the
% data p are obtained by solving a linear system of equations
```

```
% involving the Vandermonde matrix:
%
%        A * c = p
c = A\p;

% Now we evaluate the polynomial at every year from 1900 to 2010,
% and plot the results.

v = (1900:2010)';
x = (v-1900)/10;
y = polyval(c,x);
z = polyval(c,10);

plot(v,y)
title('Polynomial fit, degree = 9');
ylabel('Millions'); grid on
```

♢

3.7 Rationale Funktionen

3–30 Definition : Seien $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ zwei Polynome vom Grad n und m. Die Funktion

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

heisst eine **rationale Funktion** Der natürliche Definitionsbereich der Funktion f besteht aus allen reellen Zahlen ausser den Nullstellen des Nennerpolynoms $Q(x)$.

3–31 Beispiel : Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)}{(x+1)}$$

In der ersten Form sind die Werte ± 1 nicht im Definitionsbereich. In der zweiten Form ist der Definitionsbereich $\text{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Diese Zweideutigkeit sollte eliminiert werden. ♢

Wichtig: Ist $P(x_0) = Q(x_0) = 0$, so muss der Zähler und Nenner durch $(x - x_0)$ dividiert werden. Man muss also zuerst alle **gemeinsamen Faktoren** von $P(x)$ und $Q(x)$ finden und durch diese dividieren. Die meisten Resultate in diesem Abschnitt sind abzuändern, falls diese Operation nicht zuerst ausgeführt wird.

Um durch die gemeinsamen Faktoren zu teilen, können Sie zuerst die Nullstellen des Nenners suchen und testen, ob sie gleichzeitig auch Nullstellen des Zählers sind. Anschliessend können Sie $P(x)$ und $Q(x)$ mit dem Schema von Horner durch $(x - x_0)$ teilen. Der möglicherweise schwierige Teil dieses Verfahrens ist das Finden der Nullstellen. Ist $\deg P \geq 4$, so müssen oft numerische Verfahren zu Hilfe genommen werden.

Es gibt ein zweites Verfahren, das auf dem Algorithmus von Eukild basiert. Hierzu sind einige Polynomdivisionen auszuführen. Unglücklicherweise wird die Anzahl der auszuführenden Rechenschritte schnell sehr gross.

3–32 Satz : *(Algorithmus von Eukild)*
Seien P und Q zwei Polynome. Dann erzeugen die folgenden Polynomdivisionen den **grössten gemeinsamen Teiler** *$R_n(x)$ der Polynome $P(x)$ und $Q(x)$.*

$$\begin{aligned}
P &= Q_1\,Q + R_1 && \textit{mit } \deg R_1 \neq 0 \textit{ mit } \deg R_1 < \deg Q \\
Q &= Q_2\,R_1 + R_2 && \textit{mit } \deg R_2 \neq 0 \textit{ mit } \deg R_2 < \deg R_1 \\
R_1 &= Q_3\,R_2 + R_3 && \textit{mit } \deg R_3 \neq 0 \textit{ mit } \deg R_3 < \deg R_2 \\
R_2 &= Q_4\,R_3 + R_4 && \textit{mit } \deg R_4 \neq 0 \textit{ mit } \deg R_4 < \deg R_3 \\
&\vdots \\
R_{n-2} &= Q_n\,R_{n-1} + R_n && \textit{mit } \deg R_n \neq 0 \textit{ mit } \deg R_n < \deg R_{n-1} \\
R_{n-1} &= Q_{n+1}\,R_n
\end{aligned}$$

Der ggT ist gegeben durch das Polynom R_n .

Beweis : Studieren Sie den Beweis des Algorithmus von Euklid für den ggT von ganzen Zahlen und ändern Sie die passenden Details ab. □

3–33 Beispiel : Für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18}$$

findet man (mit dem Algorithmus von Euklid) den grössten gemeinsamen Teiler $(x^2 - 2x - 3)$ und somit

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+2)\,(x-3)}$$

♢

Die folgenden Resultate in diesem Abschnitt sind formuliert für rationale Funktionen ohne gemeinsame Nullstelle des Zählers und Nenners.

3–34 Definition :
Sei $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine gebrochen rationale Funktion mit Zählergrad $\deg(P) = n$ und Nennergrad $\deg(Q) = m$.

(a) Die Nullstellen von $f(x)$ sind genau die Nullstellen von $P(x)$; die Multiplizität einer Nullstelle x_0 von $P(x)$ heisst auch **Ordnung der Nullstelle** von $f(x)$.

(b) Die Multiplizität einer Nullstelle x_0 von $Q(x)$ heisst **Ordnung des Pols** x_0 der Funktion $f(x)$.

(c) Ist $n < m$, so heisst $f(x)$ eine **echt gebrochen rationale Funktion**.

(d) Ist $n \geq m$, so heisst $f(x)$ eine **unecht gebrochen rationale Funktion**.

3–35 Beispiel :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)\,(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)}{(x-1)}$$

ist eine unecht gebrochen rationale Funktion mit einem Pol der Ordnung 1 bei $x = 1$ und einer Nullstelle der Ordnung 1 bei $x = -1$. ♢

3–36 Beispiel :

$$f(x) = \frac{-6 - x + 2x^2}{9 - 6x + 10x^2 - 6x^3 + x^4} = \frac{(x-2)(2x+3)}{(x^2+1)(x-3)^2}$$

ist eine echt gebrochen rationale Funktion mit einem Pol der Ordnung 2 bei $x = 3$ und zwei Nullstellen der Ordnung 1 bei $x = 2$ und $x = -3/2$. ♢

Ist f eine unecht gebrochen rationale Funktion, so kann sie mit Hilfe einer Polynomdivision umgeschrieben werden in die Form

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

mit Polynomen H und R. Der Grad von R ist kleiner als m. Kurz: man schreibt die unecht gebrochen rationale Funktion f als Summe eines Polynoms H und einer echt gebrochen rationalen Funktion.

3–37 Beispiel :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)}{(x-1)} = 1 + \frac{2}{(x-1)}$$

♢

Mit *Mathematica* kann man sehr leicht verifizieren, dass

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 + 2} = x^2 - 2 + \frac{3}{(x^2+2)}$$

Mathematica

```
PolynomialDivision[x^4-1,x^2+2,x]
.
  { -2+x^2  ,  3 }
```

Betrachten Sie eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Berechnet man den Wert von $R(x)/Q(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \gg 1$, so wird das Resultat sehr klein sein. Betrachtet man immer grössere Werte von $|x|$, so wird sich der Graph von $f(x)$ dem Graphen von $H(x)$ annähern.

3–38 Definition : Man sagt der Graph von $H(x)$ ist eine **Asymptote** des Graphen von

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Asymptoten und Polstellen sind sehr nützlich um Graphen von rationalen Funktionen zu skizzieren. Ist $x = b$ eine Polstelle der Ordnung k, so kann die Funktion umgeschrieben werden zu

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-b)^k \, Q_1(x)}.$$

Nun sieht man leicht, dass

$$f(x) \approx \frac{P(b)}{Q_1(b)} \, \frac{1}{(x-b)^k} \quad \text{für} \quad x \approx b$$

3–39 Beispiel : Zu finden ist eine rationale Funktion p mit Asymptote $y = 1 - x$ und einem Pol der Ordnung 2 bei $x = 3$ und auch $p(0) = 0$.

Lösung: Man weiss, dass

$$p(x) = 1 - x + \frac{g(x)}{(x-3)^2}$$

und $g(x) = a\,x + b$ ist ein Polynom vom Grad 1. Wegen $p(0) = 0$ gilt

$$p(0) = 1 - 0 + \frac{g(0)}{(0-3)^2} = 1 + \frac{b}{9} = 0$$

und somit $b = -9$. Der Wert von a kann nicht bestimmt werden, man weiss nur, dass $a \neq 3$ (wieso?). Für $a = 4$ entsteht der Graph in Abbildung 3.8

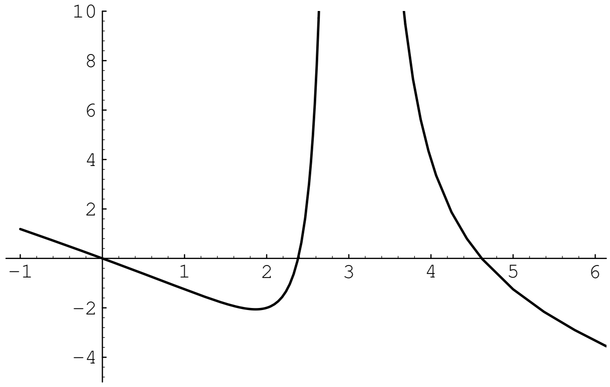


Abbildung 3.8: Graph einer gebrochen rationalen Funktion

♢

3.8 Aufgaben

3.8.1 Allgemeine Aufgaben

• Aufgabe 3–1:
Suchen Sie zwei Polynome f und g mit

(a) $f(1) \neq 0$ und $g(1) \neq 0$, aber für das Polynom $f + g$ gilt $(f + g)(1) = 0$.

(b) $f(1) \neq 0$ und $g(1) \neq 0$, aber für das Polynom $f \circ g$ gilt $(f \circ g)(1) = 0$.

(c) $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0$, aber $g \circ f$ hat keine reelle Nullstelle.

• Aufgabe 3–2:
Finden Sie alle Nullstellen der folgenden Polynome.

(a) $f(x) = -4 + 8x + 5x^2$

(b) $f(x) = 25 + 10\,x - 13\,x^2 + 2\,x^3$. Tip $x = -1$.

(c) $f(x) = -24 - 43\,x - 13\,x^2 + 7\,x^3 + x^4$. Tip $x = -1$.

• Aufgabe 3–3:
Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Polynome

(a) $f(x) = 3x - 2$

(b) $g(z) = (1 - z)/3$

(c) $f(s) = 2s^2 + 4s + 1$

(d) $A(r) = \pi r^2$

(e) $f(x) = x^2 - 9x + 2$

• Aufgabe 3–4:
Bestimmen Sie den Wert von $f(3)$ für das Polynom

$$f(x) = -24 + 10\,x + 27\,x^2 - 11\,x^3 - 3\,x^4 + x^5$$

Verwenden Sie das Schema von Horner.

• Aufgabe 3–5:
erstellen Sie das grosse Hornerschema für das Polynom

$$f(x) = 4 - 8\,x - 13\,x^2 + 2\,x^3 + 3\,x^4$$

mit $x_0 = 2$.

• Aufgabe 3–6:
Untersuchen Sie die Multiplizität der Nullstelle $x = 2$ des Polynoms

$$p(x) = x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72$$

• Aufgabe 3–7:
Mit den zwei Konstanten a und b konstruiert man das Polynom

$$g(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 + a\,x + b$$

Dividiert man $g(x)$ durch $(x^2 + 2)$, so ergibt sich ein Rest von $x + 9$. Bestimmen Sie a und b, anschliessend ist $g(x)/(2x + 6)$ zu berechnen.

• Aufgabe 3–8:
Finden Sie alle Nullstellen der folgenden Polynome

(a) $f(x) = x^2 - 16$

(b) $f(x) = x^2 + 16$

(c) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$

(d) $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x$

(e) $g(z) = 4z^6 - 8z^3 + 3$

(f) $h(a) = a^3 - 2a^2 - 5a + 6$

(g) $r(x) = -x^3 + 5x^2 - 11x + 15$

• Aufgabe 3–9:
Verifizieren Sie in der obigen Aufgabe die Formeln von Vieta.

• Aufgabe 3–10:
Verwenden Sie das Schema von Horner um die folgenden Polynome an den angegebenen Stellen zu berechnen.

(a) $f(x) = x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 3x$ für $x_0 = 2$ und $x_0 = -2$.

(b) $f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x - 10$ für $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ und $x_0 = 1.123$. Hier ist die Benutzung eines Taschenrechners angebracht.

• Aufgabe 3–11:
Zeichnen Sie den Graphen des Polynoms $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ für den Bereich $-2 \leq x \leq 2$, indem Sie mittels des Hornerschemas die Funktionswerte und Steigungen für $x = -2, -1, 0, 1, 2$ berechnen und dann zeichnen.

• Aufgabe 3–12:
Zeichnen Sie den Graphen des Polynoms $f(x) = x^4 - 3x^2 - 2$ für den Bereich $-2 \leq x \leq 2$, indem Sie mittels des Hornerschemas die Funktionswerte und Steigungen für $x = -2, -1, 0, 1, 2$ berechnen und dann zeichnen.

• Aufgabe 3–13:
Zeichnen Sie den Graphen des Polynoms $f(x) = x^5 - 3x^3 - x$ für den Bereich $-2 \leq x \leq 2$, indem Sie mittels des Hornerschemas die Funktionswerte und Steigungen für $x = -2, -1, 0, 1, 2$ berechnen und dann zeichnen.

• Aufgabe 3–14:
Zeichnen Sie den Graphen des Polynoms $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 3x$ für den Bereich $-2.1 \leq x \leq 2.1$, indem Sie mittels des Hornerschemas die Funktionswerte und Steigungen für $x = -2, -1, 0, 1, 2$ berechnen.

• Aufgabe 3–15:
Dividieren Sie das Polynom $f(x) = -2x^5 - x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 4x$ durch $2x^2 + x$. Verwenden Sie den üblichen Divisionsalgorithmus.

• Aufgabe 3–16:
Verwenden Sie das Schema von Horner um das Polynom $f(x) = x^6 + 2x^2 - 4$ durch $x + 2$ zu dividieren. Berechnen Sie anschliessend $f(-2)$.

• Aufgabe 3–17:
Verwenden Sie das Schema von Horner um das Polynom $f(x) = -2x^5 - x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 4x$ durch $2\,x + 1$ zu teilen. Bestimmen Sie anschliessend alle (oder möglichst viele) Nullstellen von f.

• Aufgabe 3–18:
Betrachten Sie $f(x) = x^5 + 1$ und $g(x) = x^2 - 1 = (x - 1)\,(x + 1)$. Dividieren Sie f durch g mit zwei verschiedenen Rechnungen.

(a) Übliche Division.

(b) Zuerst f durch $(x - 1)$ dividieren, dann das Resultat durch $(x + 1)$ dividieren. Achtung: der Rest ist richtig zu behandeln.

Die Schlussresultate für die beiden Rechenwege müssen dieselben sein.

• Aufgabe 3–19:
Führen Sie die Polynomdivision

$$\frac{a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0}{x - x_0} = \left(b_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + b_2\,x^2 + b_1\,x + b_0\right) + \text{ Rest}$$

durch die übliche Division aus um eine induktive Formel für die Koeffizienten $b_{n-1}, \ldots, b_0$ zu finden. Die Formel sollte Ihnen bekannt vorkommen.

• Aufgabe 3–20:
Die Division von $f(x) = x^4 - 2x^3 + ax + b$ durch $x^3 + 2x - 1$ ergibt einen Rest von $-2\,x^2$. Wie gross sind die Konstanten a und b.

• Aufgabe 3–21:
Betrachten Sie das Polynom $f(x) = x^4 + ax - 2x + 3$. Dieses Polynom ist ohne Rest durch $x - 3$ teilbar. Wie gross ist $f(3)$?

Hinweis: Denken, nicht rechnen!

• Aufgabe 3–22:
Das Polynom $f(x) = x^6 - 10x^5 + 35x^4 - 44x^3 - 9x^2 + 54x - 27$ hat einige kleine ganzzahlige Nullstellen. Benutzen Sie diese Information und Polynomdivision um alle Nullstellen zu finden, inklusive Multiplizität.

• Aufgabe 3–23:
Üblicherweise ergeben sich bei Divison von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten sehr schnell rationale Koeffizienten als Resultate.

Wie lassen sich ohne allzu grossen Aufwand Polynome f und g finden, so dass die Division f/g ganzzahlige Koeffizienten liefert (siehe obige Beispiele).

• Aufgabe 3–24:
Dieses Problem verlangt Kentnisse über komplexe Zahlen.

Das Polynom $f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} \ldots x^2 + x + 1$ kann durch eine Multiplikation mit einem geeigneten Polynom ersten Grades in eine ganz einfache Form gebracht werden. Dann kann man alle Nullstellen von f bestimmen.

• Aufgabe 3–25:

(a) Finden Sie die exakten Lösungen der Gleichung $6\,x^3 - 11\,x^2 - 17\,x + 30 = 0$, ohne Taschenrechner. Tipp: $x = 2$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $|2\,x - 4| \leq 6 - x$

• Aufgabe 3–26:
Finden Sie alle Nullstellen des Polynomes ohne Taschenrechner

$$f(x) = x^4 + 5\,x^3 + 6\,x^2 - x - 3$$

Tip : $f(-3) = 0$

• Aufgabe 3–27:
Das Polynom

$$f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 25x^2 + ax + b$$

hat bei $x = 2$ eine mehrfache Nullstelle.

(a) Bestimmen Sie a und b.

(b) Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms.

(c) Bestimmen Sie den Wert der Funktion und die Steigung des Graphen bei $x = 1$.

(d) Skizzieren Sie den Graphen des Polynoms qualitativ richtig.

• **Aufgabe 3–28:**
Verwenden SIe den Taschenrechner um die Werte von

$$p(t) = t^2 - 12345678\,t - 12345678$$

für $t = 12345679$ zu bestimmen. verwenden Sie

(a) den Befehl x^yfür t^2

(b) die Operation $t \cdot t$ für t^2

(c) das Schema von Horner.

Welche Resultate sind richtig?

• **Aufgabe 3–29:**
Berechnen Sie

$$x^2 - 11223344551\,x - 11223344550$$

für $x = 11223344552$.

• **Aufgabe 3–30:**
Zeichnen Sie den Graphen des Polynoms $f(x) = x^4 - x^3 + x - x^2$ für $-2 \leq x \leq 2$ indem Sie die Werte der Funktion und die Steigung der Kurve berechnen für $x = -2, -1, 0, 1, 2$ mit Hilfe des Horner–Schemas. Anschliessend ist der Graph zu zeichnen.

• **Aufgabe 3–31:**
Der Graph des Polynoms

$$p(x) = 2\,x^4 + 5\,x^3 + a\,x^2 - 2\,x + b$$

geht durch den Punkt $(\frac{-1}{2}, \frac{3}{4})$ und hat dort die Steigung $\frac{-1}{4}$. Bestimmen Sie a und b mit Hilfe eines Hornerschemas. Die Rechnungen sind ohne Taschenrechner auszuführen.

• **Aufgabe 3–32:**
Diese Aufgabe ist mit Hilfe des **Hornerschemas** zu lösen. Untersuchen Sie das folgende Polynom.

$$p(x) = 2\,x^4 - 6\,x^3 + x^2 + 6\,x$$

(a) Bestimmen Sie den Wert von p bei $x = -2$ und die Steigung des Graphen an dieser Stelle.

(b) Das Polynom $p(x)$ hat zwei kleine, ganzahlige Nullstellen. Bestimmen Sie alle Nullstellen **exakt** mittels Horner Schema.

3.8.2 Interpolationsprobleme

• **Aufgabe 3–33:**
Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Lagrange um ein Polynom $g(x)$ von minimalem Grad zu finden das durch die Punkte $P_1 = (-1, 4)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (4, 1.5)$ und $P_4 = (5, 0)$ geht.

• **Aufgabe 3–34:**
Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Lagrange um ein Polynom $g(x)$ von minimalem Grad zu finden das durch die Punkte $P_1 = (-2, 4)$, $P_2 = (-1, -1)$, $P_3 = (1, -1)$ und $P_4 = (2, 4)$ geht.

• **Aufgabe 3–35:**
Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Lagrange um ein Polynom $g(x)$ von minimalem Grad zu finden das durch die Punkte $P_1 = (-2, 4)$, $P_2 = (-1, -1)$, $P_3 = (1, 1)$ und $P_4 = (2, -4)$ geht.

• **Aufgabe 3–36:**
Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Lagrange um ein Polynom $g(x)$ von minimalem Grad zu finden das durch die Punkte $P_1 = (-2, 4)$, $P_2 = (-1, -1)$, $P_3 = (1, 0)$ und $P_4 = (2, 0)$ geht.

• **Aufgabe 3–37:**
Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Lagrange um ein Polynom $g(x)$ von minimalem Grad zu finden das durch die Punkte $P_1 = (-2, 4)$, $P_2 = (-1, -1)$ und $P_3 = (2, -4)$ geht.

• **Aufgabe 3–38:**
Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Lagrange um ein Polynom $g(x)$ von minimalem Grad zu finden das durch die Punkte $P_1 = (-3, 0)$, $P_2 = (-2, 0)$, $P_3 = (-1, 3)$, $P_4 = (0, 0)$ $P_5 = (3, 0)$, $P_6 = (2, 0)$ und $P_7 = (1, 3)$ geht. Zeichnen Sie dieses Polynom.

• **Aufgabe 3–39:**
Lösen Sie einige der obigen Interpolationsaufgaben auch mit der Methode von Newton.

• **Aufgabe 3–40:**
Sei $h > 0$ fest gegeben. Vom einem Polynom $f(x)$ weiss man, dass

$$f(-h) = a \quad , \quad f(0) = b \quad \text{und} \quad f(h) = c$$

(a) Finden Sie das einfachste Polynom, das durch die obigen drei Punkte geht und schreiben Sie es in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

d.h. bestimmen Sie n, a_0, a_1, a_2,…,a_n.

(b) Berechnen Sie die Steigung dieses Polynoms bei $x = 0$.

(c) Finden Sie **alle** Polynome vom Grad 3 durch die drei obigen Punkte.

• **Aufgabe 3–41:**
Von einer Funktion $y = f(x)$ sind die folgenden Werte bekannt:

$$f(-1) = -0.69315 \quad , \quad f(0) = 0 \quad \text{und/et} \quad f(1) = 0.40547$$

(a) Bestimmen Sie den Wert von $f(0.5)$ mit Hilfe einer stückweise linearen Interpolation.

(b) Bestimmen Sie ein Polynom $p(x)$ geeigneter Ordnung durch die drei Punkte.

(c) Approximieren Sie den Wert von $f(0.5)$ mit Hilfe des obigen Polynoms $p(x)$.

(a) Trouver la valeur de $f(0.5)$ à l'aide d'une interpolation linéaire par morceau.

(b) Trouver un polynôme $p(x)$ de l'ordre correcte par les trois points donnés.

(c) Approximer la valeur de $f(0.5)$ à l'aide du polynôme $p(x)$ ci–dessus.

• **Aufgabe 3–42:**
Von einer Funktion $y = f(x)$ sind die folgenden Werte bekannt:

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(0.5) = 0.462117 \quad \text{und} \quad f(1) = 0.761594$$

(a) Bestimmen Sie den Wert von $f(0.25)$ mit Hilfe einer stückweise linearen Interpolation.

(b) Bestimmen Sie den Wert von $f(0.25)$ mit Hilfe einer quadratischen Funktion.

(c) Skizzieren Sie in einer einfachen Graphik die stückweise lineare Interpolationsfunktion und die quadratische Interpolationsfunktion qualitativ richtig.

• Aufgabe 3–43:
Für eine Funktion $f(x)$ weiss man, dass

$$f(0) = 1 \quad , \quad f(0.5) = 1.1276 \quad \text{und} \quad f(1) = 1.543081$$

(a) Schätzen Sie $f(0.4)$ mit Hilfe einer linearen Interpolation der Werte bei den Punkten 0 und $\frac{1}{2}$.

(b) Die Funktion $f(x)$ ist im Intervall $[0,1]$ zu ersetzen durch eine Parabel $p(x)$, die mit $f(x)$ übereinstimmt bei $x = 0$, $\frac{1}{2}$ und 1. Bestimmen Sie dieses Polynom $p(x)$.

(c) Berechne $p(0.4)$ und vergleiche mit dem wahren Wert $f(0.4) = 1.0811$.

• Aufgabe 3–44:
Einer vierstelligen Wertetabelle für die Fehlerfunktion $y =$ erf x entnimmt man

x	0	0.5	1	1.5
erf x	0.0000	0.5205	0.8427	0.9661

(a) Finden Sie ein passendes Interpolationspolynom $p\,(x)$.

(b) Vergleichen Sie dann erf $(0.9) = 0.7969$ und $p\,(0.9)$.

(c) Vergleichen Sie dann erf $(2.0) = 0.9953$ und $p\,(2)$.

• Aufgabe 3–45:
Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ zu ersetzen durch eine Parabel $p(x)$, die mit $f(x)$ übereinstimmt bei $x = 0$, $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$.

(a) Bestimmen Sie das Polynom $p(x)$.

(b) Berechne $p(\frac{\pi}{3})$ und vergleiche mit $\sin(\frac{\pi}{3})$

(c) Berechnen Sie $g(\frac{\pi}{3})$ mit Hilfe einer linearen Interpolation der Werte bei den Punkten 0 und $\frac{\pi}{2}$. Vergleichen Sie mit $\sin(\frac{\pi}{3})$.

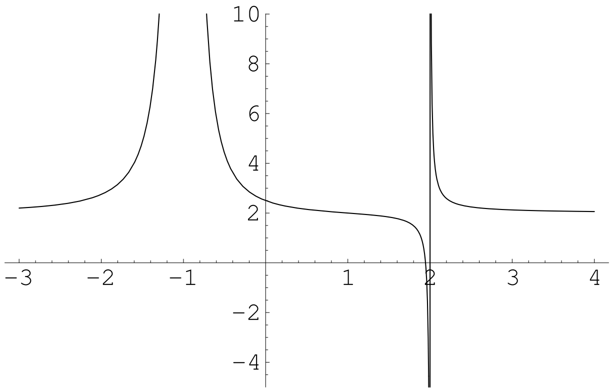
• Aufgabe 3–46:
Für die Fliessgrenze F in (in $100kg/cm^2$) eines kohlenstoffarmen Stahls in Abhängigkeit von der Temperatur T (in $100C^\circ$) ergibt ein Versuch die folgende Tabelle.

T	1	2	3	4	5	6
F	30	27	25	24	21	19

Zu bestimmen ist ein Polynom $p\,(x) = \sum\limits_{k=0}^{4} a_k x^k$ mit $p\,(T_i) = F_i$ für $0 \le i \le 4$.

3.8.3 Gebrochen rationale Funktionen

• Aufgabe 3–47:
Unten sehen Sie den Graphen einer unecht gebrochen rationalen Funktion $f(x)$. Verwenden Sie $f(1) = 2$. Finden Sie eine mögliche Formel für die Funktion $f(x)$.



• Aufgabe 3–48:
Von einer gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ weiss man, dass $f(1) = 0$, und man kennt die Asymtote

$$g(x) = x - 3$$

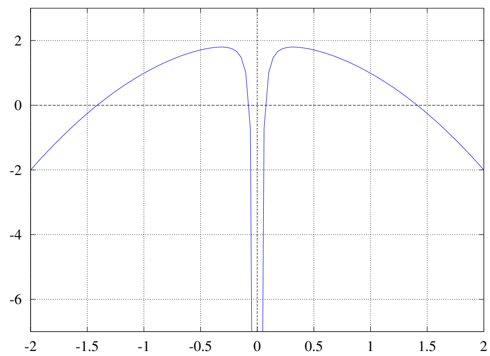
Nähert sich x an 2 an (von rechts oder links), so wächst der Funktionswert $f(x)$ über alle Schranken. Finde die Funktion $f(x)$.

• Aufgabe 3–49:

Für die rechts stehende Funktion ist bekannt

- Es ist eine rationale Funktion
- Der obere Bogen ist fast eine Parabel
- $f(\pm 0.1) = 0.99$

Finden Sie eine geeignete Formel für $f(x)$.

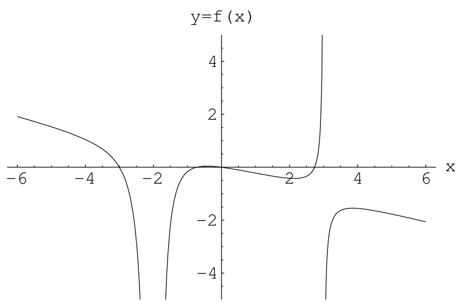


• Aufgabe 3–50:

(a) In der unten links gegebenen rationalen Funktion $h(x)$ haben Zähler und Nenner eine gemeinsame Nullstelle. Schreiben Sie zuerst die Funktion $h(x)$ ohne gemeinsame Nullstelle, anschliessend ist $h(x)$ als Summe eines Polynoms plus eine echt gebrochen rationale Funktion zu schreiben.

(b) Finden Sie eine möglichst einfache Formel für die gebrochen rationale Funktion $f(x)$, deren Graph unten rechts gezeigt ist.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + x^3 - 2\,x^2 + 4\,x - 24 \\ Q(x) &= (x+7)\,(x-2) \\ h(x) &= \frac{P(x)}{Q(x)} \end{aligned}$$

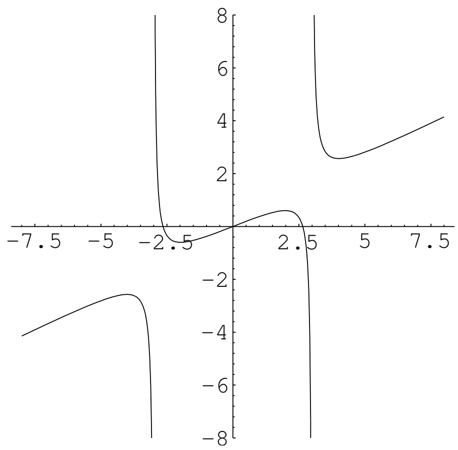


• Aufgabe 3–51:

Rechts sehen Sie den Graphen einer unecht gebrochen rationalen Funktion $f(x)$.

(a) Finden Sie eine mögliche Formel für die Funktion $f(x)$

(b) Geben Sie den Definitionsbereich und das Bild der Funktion an.

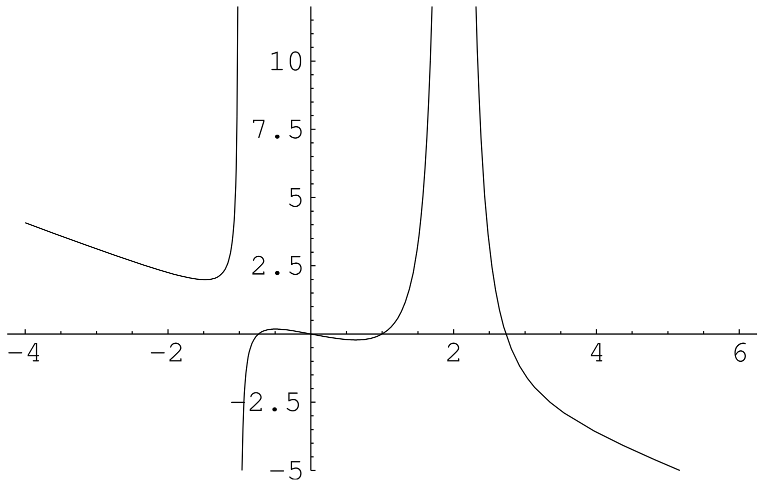


• Aufgabe 3–52:

Unten sehen Sie den Graphen einer unecht gebrochen rationalen Funktion $f(x)$. Es gilt $f(0) = f(1) = 0$.

(a) Finden Sie eine mögliche Formel für die Funktion $f(x)$

(b) Geben Sie den Definitionsbereich und das Bild der Funktion an.

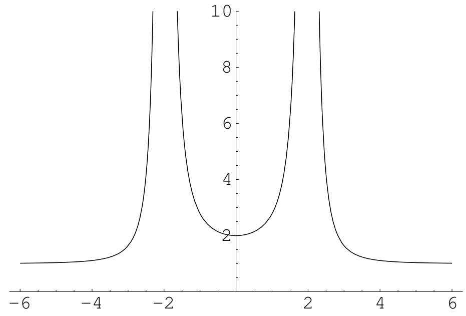


• Aufgabe 3–53:

Rechts sehen Sie den Graphen einer unecht gebrochen rationalen Funktion $f(x)$. Die Werte der Funktion $f(x)$ approximieren 1, falls $|x|$ immer grösser wird. Es gilt $f(0) = 2$.

(a) Finden Sie eine mögliche Formel für die Funktion $f(x)$

(b) Geben Sie den Definitionsbereich und das Bild der Funktion an.



• Aufgabe 3–54:

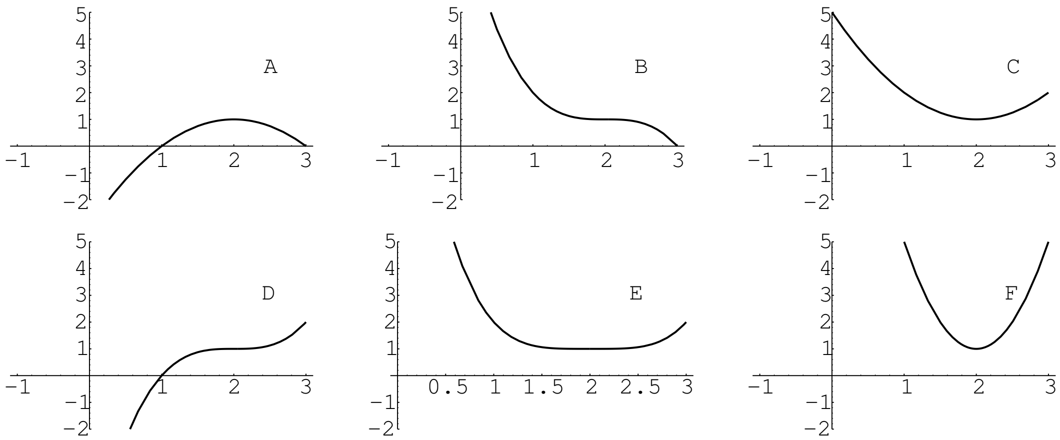
Finden Sie eine Funktion $y = f(x)$ mit folgenden Eigenschaften

- für grosse Werte von $|x|$ gilt $f(x) \approx -x$

- für Werte von x nahe bei -1 sind die Werte von y sehr gross (positiv) und bei $x = -1$ tritt eine Division durch 0 ein.
- $f(0) = 1/2$

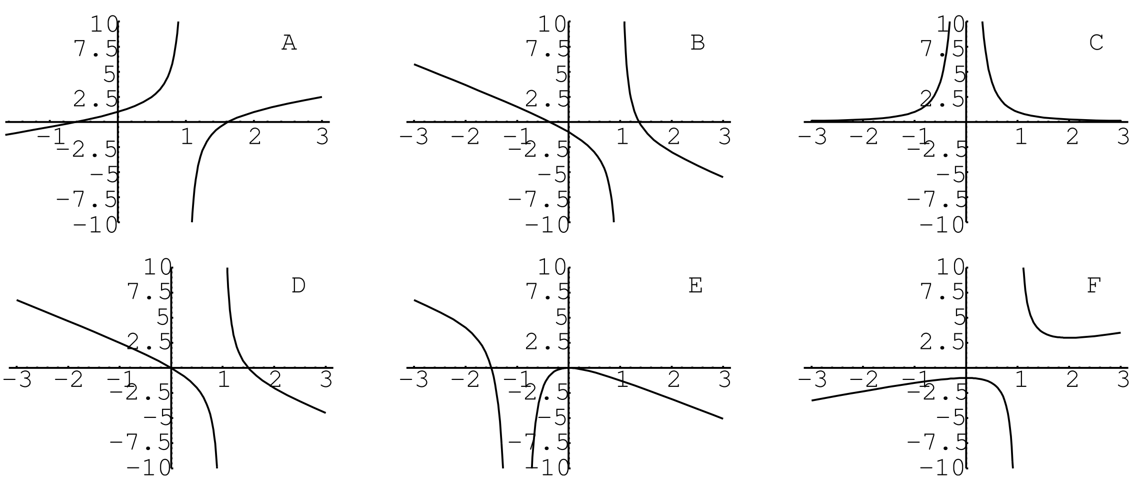
• Aufgabe 3–55:
Von den folgenden acht Funktionen sind die Graphen von sechs Funktionen unten gezeigt. Bestimmen Sie die sechs zusammengehörenden Paare.

$$\begin{array}{llll}
1: & f(x) = 1 + (x-3)^2 & 2: & f(x) = 1 + 4\,(x-2)^2 \\
3: & f(x) = 1 - (x-2)^3 & 4: & f(x) = x^2 - 4\,x + 5 \\
5: & f(x) = (x-2)^2 - 1 & 6: & f(x) = (x-2)^3 + 1 \\
7: & f(x) = (x-2)^4 + 1 & 8: & f(x) = 1 - (x-2)^2
\end{array}$$



• Aufgabe 3–56:
Von den folgenden acht Funktionen sind die Graphen von sechs Funktionen unten gezeigt. Bestimmen Sie die sechs zusammengehörenden Paare.

$$\begin{array}{llll}
1: & f(x) = x - \dfrac{1}{x-1} & 2: & f(x) = x + \dfrac{1}{x-1} \\
3: & f(x) = -2\,x + \dfrac{1}{x-1} & 4: & f(x) = \dfrac{1}{x^2} \\
5: & f(x) = \dfrac{1}{x-1} & 6: & f(x) = -2\,x + 1 + \dfrac{1}{x-1} \\
7: & f(x) = -2\,x + 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} & 8: & f(x) = -2\,x - \dfrac{1}{(x-1)^2}
\end{array}$$



3.8.4 Lösungen zu einigen Aufgaben

Setzen Sie Ihren Taschenrechner geschickt ein. Die Antworten zu den Interpolationsproblemen können alle leicht verifiziert werden, indem man die bekannten Werte einsetzt.

Lösung zu Aufgabe 3–2 :

(a) $x_1 = -2$, $x_2 = 2/5$

(b) $x_1 = -1$, $x_2 = 5/2$, $x_3 = 5$

(c) $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -8$

Lösung zu Aufgabe 3–4 : $f(3) = -48$.

Lösung zu Aufgabe 3–5 :

$$f(x) = 60\,(-2+x) + 71\,(-2+x)^2 + 26\,(-2+x)^3 + 3\,(-2+x)^4$$

Lösung zu Aufgabe 3–6 : Erstellen Sie das grosse Horner–Schema, und man kann ablesen, dass $x = 2$ ist eine dreifache Nullstelle ist.

Lösung zu Aufgabe 3–14 :

x	-2	-1	0	1	2
Valeur	-14	2	0	-2	14
Pente	79	-8	3	-8	79

Lösung zu Aufgabe 3–19 : Die Formel ist auch durch das Hornerschema gegeben.

Lösung zu Aufgabe 3–24 : Division durch $(x-1)$.

Lösung zu Aufgabe 3–25 :

(a) Division durch den Faktor $(x-2)$ mit Hilfe des Hornerschemas

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -11 & -17 & 30 \\ x_0 = 2 & & 12 & 2 & -30 \\ \hline & 6 & 1 & -15 & \underline{0} \end{array}$$

und somit gilt

$$f(x) = 6\,x^3 - 11\,x^2 - 17\,x + 30 = (x-2)\,(6\,x^2 + x - 15)$$

und die exakten Nullstellen sind gegeben durch

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot 6\cdot 15}}{12} = \frac{-1 \pm 19}{12} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{3} \end{cases}$$

(b) Diese Aufgabe sollte graphische gelöst werden. Es ergibt sich wegen der Betragsfunktion eine Fallunterscheidung:

- $x \le 2$:
  $|2\,x - 4| = -2\,x + 4 \le 6 - x$ kann vereinfacht werden zu $-2 \le x$ und es ergibt sich ein Beitrag von $-2 \le x \le 2$ zur Lösungsmenge.

- $2 \leq x$:
  $|2\,x-4| = 2\,x-4 \leq 6-x$ kann vereinfacht werden zu $3\,x \leq 10$ und es ergibt sich ein Beitrag von $2 \leq x \leq \frac{10}{3}$ zur Lösungsmenge.

Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge $L = [-2\,,\ 10/3]$.

Lösung zu Aufgabe 3–26 :

$$\{-3,-1,\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$$

Lösung zu Aufgabe 3–27 :

(a) Das Polynom hat bei $x=2$ eine mindestens doppelte Nullstelle. Somit muss bei den ersten beiden Phasen des Horner–Schemas jeweils ein Rest 0 entstehen. Das wird zwei Geichungen für die beiden Unbekannten a und b liefern.

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & 2 & -13 & 25 & a & b \\
x_0=2 & & 4 & -18 & 14 & 2a+28 \\
\hline
 & 2 & -9 & 7 & a+14 & \underline{b+2a+28} \\
x_0=2 & & 4 & -10 & -6 & \\
\hline
 & 2 & -5 & -3 & \underline{a+8} &
\end{array}$$

Somit sind die Gleichungen

$$a+8=0 \quad \text{und} \quad b+2a+28=0$$

zu lösen und man erhält sofort $a=-8$ und $b=-12$.

(b) Weiter weiss man, dass

$$f\,(x) = (x-2)^2\,(2x^2-5x-3)$$

und somit sind zwei Nullstellen gegeben als Lösungen der Gleichung $2x^2-5x-3=0$. Das ergibt die vier Nullstellen

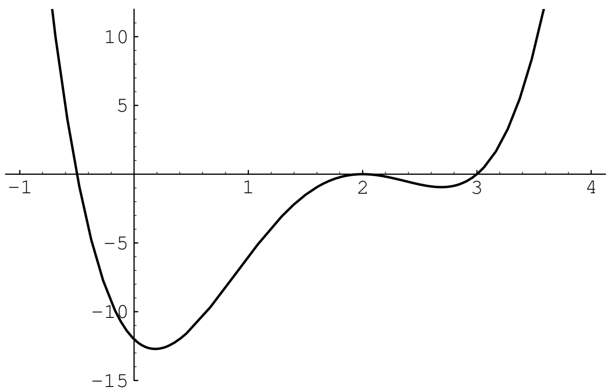
$$x_1=2 \quad , \quad x_2=2 \quad , \quad x_3=3 \quad , \quad x_4=\frac{-1}{2}$$

(c) Hornerschema mit $x_0=1$

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & 2 & -13 & 25 & -8 & -12 \\
x_0=1 & & 2 & -11 & 14 & 6 \\
\hline
 & 2 & -11 & 14 & 6 & \underline{-6} \\
x_0=1 & & 2 & -9 & 5 & \\
\hline
 & 2 & -9 & 5 & \underline{11} &
\end{array}$$

Somit ist $f\,(1)=-6$ und die Steigung ist 11.

(d) Es ist $f\,(0)=-12$ und die Steigung bei $x=0$ ist -8.



Lösung zu Aufgabe 3–28 :

(a) Stellenauslöschung.

(b) Stellenauslöschung.

(c)

	1	-12345678	-12345678
t=12345679		12345679	12345679
	1	1	1

Diese Rechnungen sind exakt, auch wenn der Taschenrechner nur mit 10 Stellen rechnet.

Lösung zu Aufgabe 3–29 : Unbedingt das Hornerschema verwenden (liefert das richtige Ergebnis) oder den Ausdruck umschreiben zu

$$x^2 - (x-1)\,x - (x-2) = 2$$

Lösung zu Aufgabe 3–30 : Es ist zu beachten, dass die erste Zeile des Hornerschemas die Zahlen 1, -1, -1, 1 und 0 enthalten muss, in dieser Reihenfolge.

Wert von x	Wert von $f(x)$	Steigung
-2	18	-39
-1	0	-4
0	0	+1
1	0	0
2	6	17

Mathematica

```
f[x_] := x^4-x^3+x-x^2
Table[{x,f[x],f'[x]},{x,-2,2,1}]//TableForm
Plot[f[x],{x,-2,2}]
```

Lösung zu Aufgabe 3–31 : Der einfachste Rechenweg beruht auf dem Hornerschema.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & 5 & a & -2 & b \\
x_0 = \frac{-1}{2} & & -1 & -2 & 1 - a/2 & \frac{2+a}{4} \\ \hline
 & 2 & 4 & a-2 & -1 - a/2 & \underline{b + \frac{2+a}{4}} \\
x_0 = \frac{-1}{2} & & -1 & -3/2 & \frac{-2\,a+7}{4} & \\ \hline
 & 2 & 3 & a - 7/2 & \underline{3/4 - a} &
\end{array}$$

Somit erhalten wir die zwei Gleichungen

$$b + \frac{2+a}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad 3/4 - a = -1/4$$

mit den Lösungen $a = 1$ und $b = 0$.

Lösung zu Aufgabe 3–32 :

(a) Verwende das grosse Horner Schema mit $x_0 = -2$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -6 & 1 & 6 & 0 \\
x_0 = -2 & & -4 & 20 & -42 & 72 \\
\hline
 & 2 & -10 & 21 & -36 & \underline{72} \\
x_0 = -2 & & -4 & 28 & -98 & \\
\hline
 & 2 & -14 & 49 & \underline{-134} &
\end{array}$$

Somit ist $p(-2) = 72$ und die Steigung ist -134 .

(b) Offensichtlich ist $x_1 = 0$ eine Nullstelle und

$$f(x) = x\,(2\,x^3 - 6\,x^2 + x + 6)$$

Taschenrechner oder Raten zeigen eine zweite Nullstelle bei $x_2 = 2$ und das Hornerschema

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -6 & 1 & 6 \\
x_0 = 2 & & 4 & -4 & -6 \\
\hline
 & 2 & -2 & -3 & \underline{0}
\end{array}$$

impliziert

$$f(x) = x\,(2\,x^3 - 6\,x^2 + x + 6) = x\,(x-2)\,(2\,x^2 - 2\,x - 3)$$

Die Nullstellen des quadratischen Ausdrucks sind

$$x_{3,4} = \frac{1}{4}\,\left(2 \pm \sqrt{4+24}\right) = \frac{1}{2}\,\left(1 \pm \sqrt{7}\right)$$

Somit haben wir die vier Nullstellen gefunden.

Lösung zu Aufgabe 3–40 :

Mit dem Interpolationsverfahren von Newton ergibt sich das Schema rechts. Somit ist die Funktion gegeben durch

$$f\,(x) = a + \frac{b-a}{h}\,(x+h) + \frac{c-2\,b+a}{2\,h^2}\,(x+h)\,x$$

$$\begin{array}{r|lll}
-h & a & & \\
 & & \frac{b-a}{h} & \\
0 & b & & \frac{c-b-b+a}{2h\,h} \\
 & & \frac{c-b}{h} & \\
h & c & &
\end{array}$$

(a) Durch sorgfältiges Ausmultiplizieren erhalten wir daraus

$$f\,(x) = b + \frac{c-a}{2\,h}\,x + \frac{c-2\,b+a}{2\,h^2}\,x^2$$

(b) Die Steigung bei $x = 0$ ist $\frac{c-a}{2\,h}$.

(c) Mit den Ideen der Lagrange–Interpolation erhalten wir alle solchen Polynome durch

$$f\,(x) + k\,(x+h)\,x\,(x-h)$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Lösung zu Aufgabe 3–41 :

(a) Durch Geradenstück verbinden

$$f\,(0.5) \approx \frac{f\,(0) + f\,(1)}{2} \approx 0.2027$$

(b) Durch eine Lagrange Interpolation ist das Polynom der Ordnung 2 gegeben durch

$$\begin{aligned} p(x) &= f(-1)\,\frac{x\,(x-1)}{(-1)\,(-1-1)} + 0 + f(1)\,\frac{(x+1)\,x}{(1+1)\,1} \\ &= f(-1)\,\frac{x^2-x}{2} + f(1)\,\frac{x^2+x}{2} \\ &= \frac{f(-1)}{2}\,(x^2-x) + \frac{f(1)}{2}\,(x^2+x) \\ &= \frac{f(-1)+f(1)}{2}\,x^2 + \frac{-f(-1)+f(1)}{2}\,x \\ &\approx -0.1438\,x^2 + 0.5493\,x \end{aligned}$$

(c)

$$p(0.5) \approx 0.2387$$

Die interpolierten Werte können mit den „richtigen“ Werten verglichen werden, da die Zahlen mit Hilfe der Funktion $f(x) = \ln(1 + \frac{x}{2})$ konstruiert wurden. Es gilt $f(0.5) \approx 0.2231$.

Lösung zu Aufgabe 3–42 :

(a) Durch Geradenstück verbinden

$$f\,(0.25) \approx \frac{f\,(0) + f\,(0.5)}{2} \approx 0.231085$$

(b) Der Ansatz $f\,(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 0\,a & + & 0\,b & + & c & = & 0 \\ \frac{1}{4}\,a & + & \frac{1}{2}\,b & + & c & = & 0.462117 \\ a & + & b & + & c & = & 0.761594 \end{array}$$

Dieses System von linearen Gleichungen lässt sich mit dem Taschenrechner lösen. Man kann auch aus der ersten Gleichung ablesen, dass $c = 0$. Dann kann man das doppelte der zweiten Gleichung von der dritten subtrahieren und erhält

$$\frac{1}{2}\,a = 0.761594 - 2 \cdot 0.462117 \quad \text{oder} \quad a \approx -0.32528$$

Aus der dritten Gleichung folgt dann

$$b = 0.761594 - a \approx 1.08687$$

Nun haben wir

$$f\,(x) = -0.32528\,x^2 + 1.08687\,x$$

und somit

$$f\,(0.25) = \frac{a}{16} + \frac{b}{4} + c \approx 0.251388$$

Die Aufgabe könnte auch durch eine Interpolation gemäss der Methode von Lagrange gelöst werden. Hier die Rechnungen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0.5)\,\frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)} + f(1)\,\frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)} \\
&= f(0.5)\,\frac{x^2-x}{-1/4} + f(1)\,\frac{x^2-x/2}{1/2} \\
&= f(0.5)\,(-4\,x^2+4\,x) + f(1)\,(2\,x^2-x) \\
&= 0.462117\,(-4\,x^2+4\,x) + 0.761594\,f(1)\,(2\,x^2-x) \\
&= -0.32528\,x^2 + 1.08687\,x
\end{aligned}$$

(c) Zwei Geradenstücke, beziehungsweise eine Parabel.

Die interpolierten Werte können mit den „richtigen“ Werten verglichen werden, da die Zahlen mit Hilfe der Funktion $\tanh x$ konstruiert wurden. Es gilt $\tanh 0.25 \approx 0.244919$.

Lösung zu Aufgabe 3–43 :

(a) Verwende lineare Interpolation, d.h ein Geradenstück, und die Werte $f(0) = 1$ und $f(0.5) = 1.1276$.

$$f(0.4) \approx f(0) + 0.4 \cdot \frac{f(0.5) - f(0)}{0.5} = 0.2 \cdot f(0) + 0.8 \cdot f(0.5) = 1.1021$$

(b) Der Ansatz $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\,a & + & 0\,b & + & c & = & f(0) & = & 1 \\
\frac{1}{4}\,a & + & \frac{1}{2}\,b & + & c & = & f(\frac{1}{2}) & = & 1.1276 \\
a & + & b & + & c & = & f(1) & = & 1.543081
\end{array}$$

Dieses System von linearen Gleichungen lässt sich mit dem Taschenrechner lösen. Man kann auch aus der ersten Gleichung ablesen, dass $c = 1$. Dann kann man das doppelte der zweiten Gleichung von der dritten subtrahieren und erhält

$$\frac{1}{2}\,a - 1 = 1.543081 - 2 \cdot 1.1276 \quad \text{oder} \quad a \approx 0.575657$$

Aus der dritten Gleichung folgt dann

$$b = 1.543081 - a - 1 \approx -0.032577$$

Nun haben wir

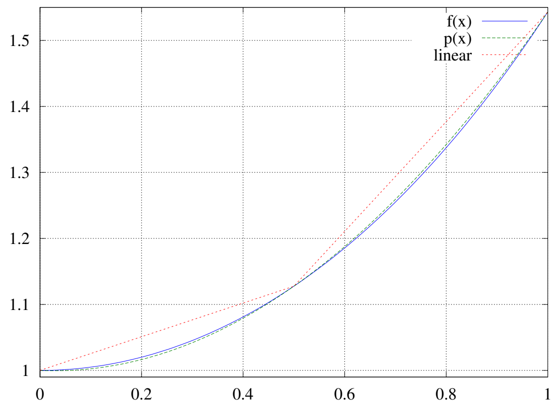
$$f(x) = 0.575657 \cdot x^2 - 0.032577 \cdot x + 1$$

Die Aufgabe könnte auch durch eine Interpolation gemäss der Methode von Lagrange gelöst werden.

$$p(x) = \frac{(x-0.5)\,(x-1)}{(0-0.5)\,(0-1)}\,f(0) + \frac{x\,(x-1)}{0.5\,(0.5-1)}\,f(0.5) + \frac{x\,(x-0.5)}{1\,(1-0.5)}\,f(1)$$

(c) Verwende das Resultat der vorangehenden Aufgabe $p(0.4) = 1.07907$. Dieser Wert ist sehr nahe bei $f(0.4) = 1.0811$.

Für diese Aufgabe wurde die Funktion $f(x) = \cosh(x)$ verwendet. Die untenstehende Figur zeigt, dass die Approximation durch eine Parabel erheblich besser ist als die Approximation durch zwei Geradenstücke.



Lösung zu Aufgabe 3–45 : Verwende Lagrange–Interpolation und die Werte $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

(a) Wegen $\sin 0 = 0$ sind nur zwei Beiträge zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(x-0)\,(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{4}-0)\,(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})} + 1\,\frac{(x-0)\,(x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{2}-0)\,(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{x\cdot(x-\frac{\pi}{2})}{\frac{-\pi^2}{16}} + 1\,\frac{x\cdot(x-\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi^2}{8}} \\ &= \frac{8\,x}{\pi^2}\left(-\sqrt{2}\,(x-\frac{\pi}{2}) + (x-\frac{\pi}{4})\right) \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \sin(\tfrac{\pi}{3}) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} &\approx 0.866025 \\ p(\tfrac{\pi}{3}) &= \tfrac{2+4\sqrt{2}}{9} &\approx 0.850762 \end{aligned}$$

Der Unterschied ist klein ≈ 0.016 .

(c) Die Gerade geht durch den Ursprung $(0\,,\,0)$ und den Punkt $(\frac{\pi}{2}\,,\,1)$ und somit ist die Geradengleichung gegeben durch $g(x) = \frac{2}{\pi}\,x$. Es gilt $g(\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$. Dieser Wert ist erheblich weiter von $\sin\frac{\pi}{3}$ entfernt als der obige.

Man kann durchaus auch auf die Idee kommen die Punkte $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{\pi}{2}$ zu verwenden. Auch hier sind zwei Punkte auf der Geraden $y = g(x)$ sind bekannt. Somit kann die Geradengleichung angeschrieben werden

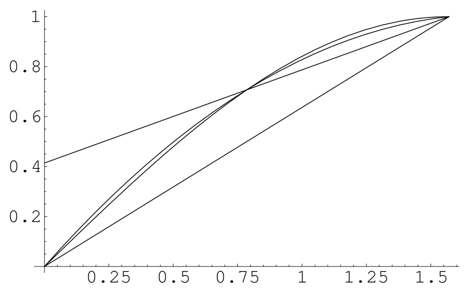
$$g(x) = 1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}}\,(x - \frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\,(x - \frac{\pi}{2})$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sin(\tfrac{\pi}{3}) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} &\approx 0.866025 \\ g(\tfrac{\pi}{3}) &= \tfrac{1+\sqrt{2}}{3} &\approx 0.804738 \end{aligned}$$

Der Unterschied ist auch hier erheblich grösser, nämlich ≈ 0.042 .

Die untenstehende Graphik zeigt alle vier Funktionen in Intervall $0 \le x \le \pi/2$. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die Parabel sehr gut an die Kurve anschmiegt, die Gerade hingegen erheblich abweicht.



Lösung zu Aufgabe 3–46 :

$$p(x) = \frac{-1}{8}\,x^4 + \frac{5}{4}\,x^3 - \frac{31}{8}\,x^2 + \frac{7}{4}\,x + 31$$

Dieses Polynom weicht beim sechsten Messpunkt erheblich ab $p(6) = 10$.
Quelle: [MeybVach90, p. 67]

Lösung zu Aufgabe 3–47 : Die Funktion hat die horizontale Asymptote 2, Polstellen bei -1 (doppelt) und $+2$ (einfach). Eine einfache mögliche Lösung ist somit

$$f(x) = 2 + \frac{A \cdot x + B}{(x+1)^2\,(x-2)}$$

- Wegen $f(1) = 2$ muss der Zähler eine Nullstelle haben bei $x = 1$.
- Da die beiden Zweige des Pols bei $x = -1$ nach oben gehen muss der Zähler bei $x = -1$ negativ sein.
$$x \approx -1 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \approx 2 + \frac{A \cdot (-1) + B}{(x+1)^2\,(-3)}$$
- Da der rechte Zweig des Pols bei $x = +2$ nach oben gehen muss der Zähler bei $x = +2$ positiv sein.
$$x \approx +2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \approx 2 + \frac{A \cdot 2 + B}{(3)^2\,(x-2)}$$

Eine einfache Lösung ist gegeben durch

$$f(x) \approx 2 + \frac{x-1}{(3)^2\,(x-2)}$$

Lösung zu Aufgabe 3–48 : Eine mögliche Lösung ist

$$f(x) = x - 3 + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 10}{x^2 - 4x + 4}$$

Lösung zu Aufgabe 3–49 :

- Die Funktion ist gerade.
- Der parabelförmige Anteil ist gegeben durch $2 - x^2$.
- Die Polstelle bei $x = 0$ ist von gerader Ordnung und der Zähler bei $x = 0$ muss negativ sein.

Somit haben wir

$$f(x) = 2 - x^2 - \frac{c}{x^2}$$

und aus der Bedingung $f(\pm 0.1) = 0.99$ erhalten wir

$$0.99 = 2 - 0.01 - \frac{c}{0.01} = 1.99 - 100\,c$$

und somit $c = \frac{1}{100} = 0.01$. Damit ist die einfachste Funktion

$$f(x) = 2 - x^2 - \frac{0.01}{x^2}$$

Lösung zu Aufgabe 3–50 :

(a) $x = 2$ ist auch eine Nullstelle des Nenners und somit kann der Faktor $(x-2)$ gekürzt werden. Mittels Hornerschema erhalten wir

$$\begin{array}{r|ccccc} & 1 & 1 & -2 & 4 & -24 \\ x_0 = +2 & & +6 & +2 & +8 & +24 \\ \hline & 1 & +3 & +4 & +12 & 0 \end{array}$$

und somit

$$h(x) = \frac{x^4 + x^3 - 2\,x^2 + 4\,x - 24}{(x+7)\,(x-2)} = \frac{x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 12}{x+7}$$

Um durch den linearen Faktor $(x+7)$ zu teilen kann das Schema von Horner verwendet werden.

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 3 & 4 & 12 \\ x_0 = -7 & & -7 & 28 & -224 \\ \hline & 1 & -4 & 32 & -212 \end{array}$$

und somit

$$h(x) = \frac{x^4 + x^3 - 2\,x^2 + 4\,x - 24}{(x+7)\,(x-2)} = \frac{x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 12}{x+7} = x^2 - 4\,x + 32 + \frac{-212}{x+7}$$

(b) In der Graphik sind die folgenden Facts abzulesen:

- Asymptote $-x/3$
- Polstelle gerader Ordnung bei $x = -2$, nach unten
- Polstelle ungerader Ordnung bei $x = +3$
- Nullstelle bei $x = 0$

Somit kann abgelesen werden, dass die Funktion die Form

$$f(x) = \frac{-1}{3}\,x + \frac{H(x)}{(x+2)^2(x-3)}$$

haben muss, wobei der Nenner $H(x)$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich 2 sein muss. Aufgrund des Graphen von $f(x)$ gilt

- $H(0) = 0$
- $H(-2) > 0$ (Pol nach unten) und $H(3) < 0$

Die einfachste Funktion mit diesen Eigenschaften ist $H(x) = -c\,x$, wobei $c > 0$.

$$f(x) = \frac{-1}{3}\,x - \frac{c\,x}{(x+2)^2(x-3)}$$

Lösung zu Aufgabe 3–51 : Die Funktion hat die Asymptote $y = x/2$, Polstellen bei ± 3 und ist ungerade. Eine einfache mögliche Lösung ist somit

$$f\,(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{(x-3)\,(x+3)} = \frac{x\,(x^2-9) + 2\,x}{2\,(x^2-9)}$$

Der Definitionsbereich dieser Funktion ist $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$ und das Bild ist $\mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 3–52 :

(a) Die Funktion hat die Asymptote $-x$, Polstellen bei -1 (einfach) und $+2$ (doppelt). Eine einfache mögliche Lösung ist somit

$$f\,(x) = -x + \frac{A \cdot x + B}{(x+1)\,(x-2)^2}$$

Wegen $f(0) = f(1) = 0$ muss gelten

$$\begin{aligned} 0 &= -0 + \frac{A \cdot 0 + B}{(0+1)\,(0-2)^2} = \frac{B}{4} \\ 0 &= -1 + \frac{A \cdot 1 + B}{(1+1)\,(1-2)^2} = -1 + \frac{A+B}{2} \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $B = 0$ und mit Hilfe der zweiten Gleichung findet man $A = 2$. Somit ist die Lösung

$$f\,(x) = -x + \frac{2\,x}{(x+1)\,(x-2)^2}$$

Dies ist nicht die einzig mögliche Lösung.

(b) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{-1\,,\,+2\}$, das Bild ist $\mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 3–53 :

(a) Die Funktion hat die Asymptote $y = 1$, Polstellen bei ± 2 (je doppelt) und ist gerade. Eine einfache mögliche Lösung ist somit

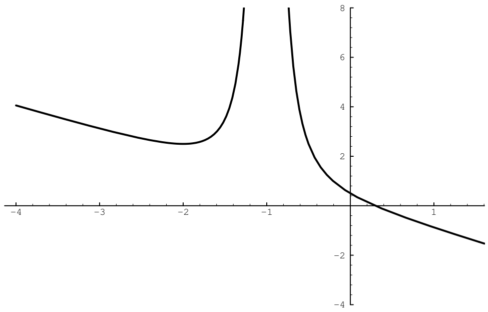
$$f\,(x) = 1 + \frac{A}{(x-2)^2\,(x+2)^2} = 1 + \frac{16}{(x-2)^2\,(x+2)^2}$$

Der Wert von $A = 16$ kann aus der Bedingung $f(0) = 2$ bestimmt werden.

(b) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, das Bild ist $(1\,,\,\infty)$.

Lösung zu Aufgabe 3–54 : Es kann eine gebrochen rationale Funktion gewählt werden mit Asymptote $-x$ und einer doppelten Polstelle bei $x = -1$

$$f\,(x) = -x + \frac{0.5}{(x+1)^2}$$



Lösung zu Aufgabe 3–55 :

$$A \leftrightarrow 8 \quad , \quad B \leftrightarrow 3 \quad , \quad C \leftrightarrow 4 \quad , \quad D \leftrightarrow 6 \quad , \quad E \leftrightarrow 7 \quad , \quad F \leftrightarrow 2$$

Lösung zu Aufgabe 3–56 : Zu beachten sind das asymtotische Verhalten und die Lage und Typ der Polstellen.

$$A \leftrightarrow 1 \quad , \quad B \leftrightarrow 3 \quad , \quad C \leftrightarrow 4 \quad , \quad D \leftrightarrow 6 \quad , \quad E \leftrightarrow 7 \quad , \quad F \leftrightarrow 2$$

3.9 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- Nullstellen von Polynomen zweiter Ordnung bestimmen können.
- in einfachen Situationen Nullstellen von Polynomen höherer Ordnung bestimmen können.
- Graphen von Polynomen qualitativ richtig skizzieren können (ohne Taschenrechner).
- das kleine und grosse Schema von Horner verstehen.
- Polynome mit dem Schema von Horner durch lineare Faktoren dividieren können.
- die allgemeine Division von Polynomen durchführen können.
- Interpolationspolynome bestimmen können und diese verwenden, aber nicht missbrauchen.
- Pole, Nullstellen und Asymtoten von rationalen Funktionen bestimmen können und deren Graph skizzieren.
- Ihren Taschenrechner für die Bearbeitung von Polynomen einsetzen können.

Kapitel 4

Trigonometrische Funktionen

4.1 Das Bogenmass

Im täglichen Leben wird oft das Gradmass verwendet, um Winkel zu messen. Ein rechter Winkel entspricht hierbei 90° und eine volle Umdrehung 360°. Für technisch–naturwissenschaftliche Berechnungen ist ist das sogenannte **Bogenmass** viel besser geeignet.

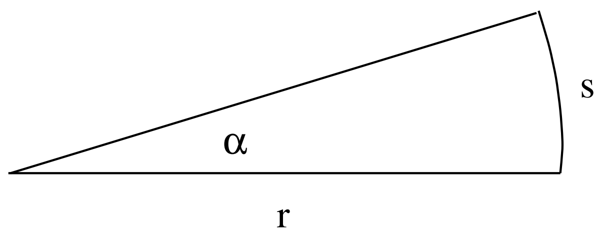


Abbildung 4.1: Winkel im Bogenmass

Hierbei ist

$$\begin{array}{rcl} s & = & \text{Länge des Bogenstücks} \\ r & = & \text{Radius} \\ \alpha & = & \text{Winkel} \end{array}$$

Das Bogenmass ist so gewählt, dass die Beziehung

$$\boxed{s = r \cdot \alpha}$$

richtig ist. Diese fundamentale Beziehung definiert das Bogenmass. Betrachten wir nämlich einen Vollkreis, so bestimmt sich der Umfang (Länge des Bogenstücks) durch $s = r \cdot 2\pi$. Somit muss gelten $360^\circ = 2\pi$. Man erhält die Umrechnungsformeln.

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \alpha^\circ \, \frac{\pi}{180^\circ} \\ \alpha^\circ & = & \alpha \, \frac{180^\circ}{\pi} \end{array}$$

Es ist zu beachten, dass Winkelangaben im Gradmass immer mit dem Grad–Zeichen geschrieben werden müssen. **Winkelangaben durch reine Zahlen entsprechen immer einem Winkel im Bogenmass**. Ein Winkel von 90 und ein Winkel von 90° sind somit nicht der selbe Winkel.

4.2 Definition der Kreisfunktionen

Die einfachste Interpretation der Funktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ ist gegeben durch ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypothenusenlänge 1, gezeigt in Figur 4.2. Diese Figur hat den wesentlichen Nachteil, dass sie nur für Winkel zwischen 0 und $\pi/2$ wirklich aussagekräftig ist. Wir werden aber trigonometrische Funktionen für beliebige Argumente verwenden. Somit benötigen wir eine zusätzliche Veranschaulichung.

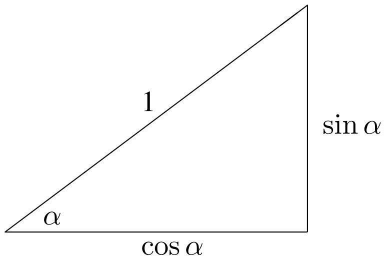


Abbildung 4.2: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ im Dreieck

Die trigonometrischen Funktionen werden oft auch **Kreisfunktionen** genannt. Der Grund hierfür ist ihre einfache Interpretation an einem Einheitskreis, siehe Figur 4.3.

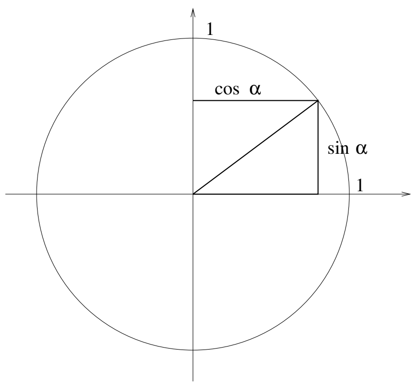


Abbildung 4.3: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ am Einheitskreis

In Figur 4.3 kann man die Vorzeichen von sin und cos in den vier Quadranten leicht ablesen.

Quadrant	Winkel α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
erster	$0 < \alpha < \pi/2$	+	+
zweiter	$\pi/2 < \alpha < \pi$	+	-
dritter	$\pi < \alpha < 3\pi/2$	-	-
vierter	$3\pi/2 < \alpha < 2\pi$	-	+

Ebenso verifiziert man die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\pi) &= -\sin(\alpha)\\
\cos(\alpha+\pi) &= -\cos(\alpha)\\
\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha)\\
\cos(-\alpha) &= \cos(\alpha)\\
\sin(\alpha+2\pi) &= \sin(\alpha)\\
\cos(\alpha+2\pi) &= \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

d.h. $\sin(\alpha)$ ist eine ungerade, 2π–periodische Funktion und $\cos(\alpha)$ ist eine gerade, 2π–periodische Funktion. Der Lehrsatz von **Pythagoras**[1] ergibt

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad .$$

Man kann auch eine Tabelle von Werten für spezielle Winkel aufstellen:

Winkel α	im Gradmass	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
0	$0°$	0	1
$\pi/6$	$30°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$45°$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/3$	$60°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	$90°$	1	0

Das führt uns zu den Graphen der beiden trigonometrischen Grundfunktionen in Abbildungen 4.4 und 4.5.

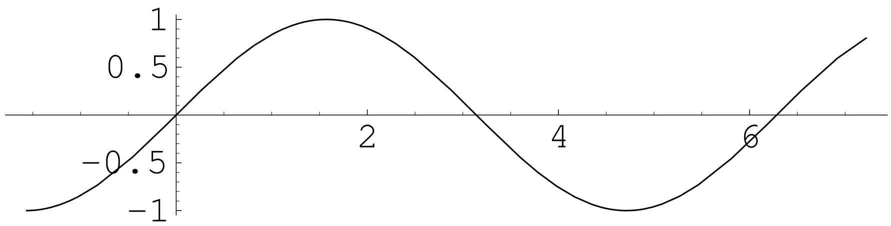


Abbildung 4.4: Graph von $\sin\alpha$

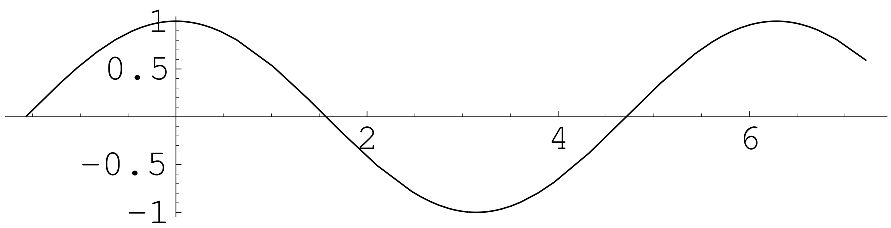


Abbildung 4.5: Graph von $\cos\alpha$

4.3 Eigenschaften der Kreisfunktionen

Durch genaues Studium des Einheitskreises und der Graphen von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ kann man noch weitere Eigenschaften am Einheitskreis ablesen, wie zum Beispiel

$$\sin(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha \quad \text{und} \quad \cos(\alpha + \pi/2) = -\sin\alpha$$

Gute Formelsammlungen werden Ihnen eine lange Liste von solchen Eigenschaften geben. Eine wichtige Klasse von Eigenschaften sind die sogenannten Additionstheoreme.

[1]Pythagoras (ca. 580–500 v. Chr.), griechischer Mathematiker

4.3.1 Beweis eines Additionstheorems

Wir versuchen die Eigenschaft $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ für positive Werte von x und y mit $x + y < \pi/2$ zu beweisen. Zu untersuchen ist die Abbildung 4.6.

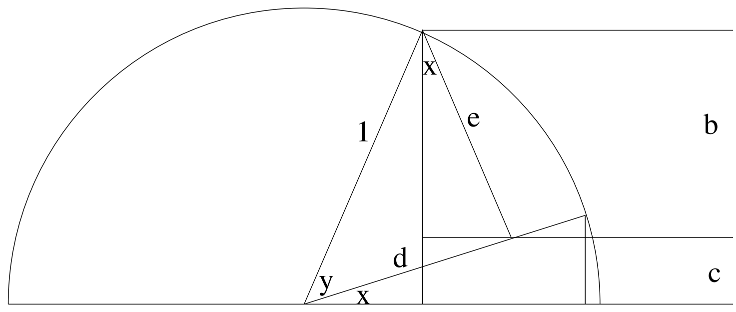


Abbildung 4.6: Additionstheorem

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \tfrac{c}{d} \\ \cos(x) &= \tfrac{b}{e} \\ \sin(y) &= e \\ \cos(y) &= d \end{aligned}$$

Somit ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= b + c = \tfrac{b}{e}\, e + \tfrac{c}{d}\, d \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

Aus diesem ersten Additionstheorem und Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen können nun weitere abgeleitet werden. Ausführliche Sammlungen von diesen und ähnlichen Identitäten finden Sie in jeder guten Formelsammlung.

4–1 Satz :

$$\begin{array}{lrl}
\textit{(a)} & \sin(x-y) & = \sin(x+(-y)) \\
 & & = \sin x \cos(-y) + \cos(x)\sin(-y) \\
 & & = \sin x \cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\
\textit{(b)} & \sin(2x) & = 2\sin(x)\cos(x) \\
\textit{(c)} & \cos(x+y) & = \sin(x+y+\pi/2) \\
 & & = \sin(x)\cos(y+\pi/2) + \cos(x)\sin(y+\pi/2) \\
 & & = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\textit{(d)} & \cos(x-y) & = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\
\textit{(e)} & \cos(2\,x) & = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{array}$$

4–2 Satz : *Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\ \sin\frac{x+y}{2}\ \cos\frac{x-y}{2}$$

Beweis : Dieser Beweis beruht auf einer geschickten Verwendung der obigen Additionstheoreme.

$$\begin{array}{rclcl}
\sin(x) & = & \sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right) & = & \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\
\sin(y) & = & \sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right) & = & \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}
\end{array}$$

Addieren der beiden Gleichungen ergibt das gewünschte Resultat. □

4–3 Satz : *Bei „richtiger" Wahl des Vorzeichens gilt*

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

Beweis : Die Behauptung ist äquivalent zu

$$2\,\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x$$

Setzen wir $\alpha = \frac{x}{2}$ und verwenden die Doppelwinkelformel für $\cos(2\alpha)$ so erhalten wir

$$1-\cos x = 1-\cos(2\alpha) = 1-1+2\sin^2\alpha = 2\,\sin^2\frac{x}{2}$$

und somit ist die Behauptung verifiziert. □

4.4 Die Tangensfunktion

Die tan–Funktion ist definiert durch die Beziehung

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad .$$

Dadurch sind der Definitions– und Bildbreich bereits gegeben. Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, ausser für die Nullstellen von $\cos x$, d.h. für $x \neq k\pi + \pi/2$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für diese speziellen x–Werte ergibt sich jeweils eine Polstelle. Der Graph von $\tan x$ kann leicht aus den Graphen von $\sin x$ und $\cos x$ erzeugt werden.

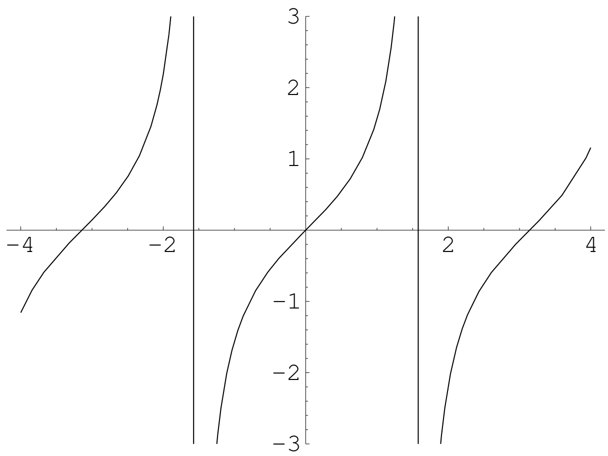


Abbildung 4.7: Graph der Funktion $\tan x$

Eigenschaften dieser Funktion können aus entsprechenden Eigenschaften der sin– und cos–Funktion abgeleitet werden und sind auch in Formelsammlungen aufgeführt.

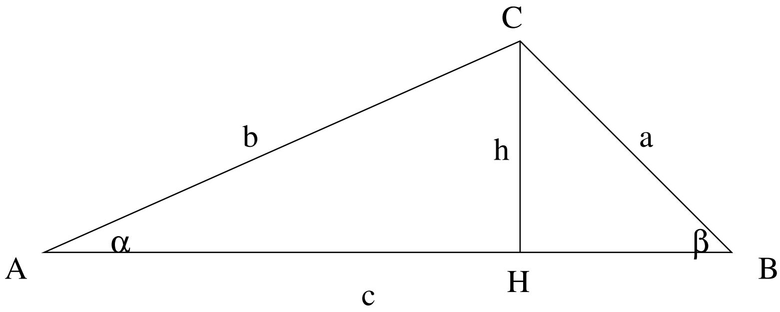


Abbildung 4.8: Sinussatz

4.5 Dreiecksberechnungen

Bei allgemeinen Dreiecken sind zwei Sätze mit trigonometrischen Funktionen von grosser Bedeutung, der **Sinussatz** und der **Cosinussatz**.

Sei $\alpha = \angle CAB$ und $\beta = \angle ABC$, dann liest man in der Figur 4.8 leicht ab, dass

$$\sin\alpha = \frac{h}{b} \quad , \quad \sin\beta = \frac{h}{a} \qquad .$$

Somit gilt

$$h = b\ \sin\alpha = a\ \sin\beta$$

woraus leicht der Sinussatz folgt.

4–4 Theorem : *Sinussatz*
In einem beliebigen Dreieck gilt

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Der Satz von Pythagoras, angewandt auf das rechtwinklige Teildreieck HBC ergibt

$$a^2 = b^2 \sin^2\alpha + (c - b\ \cos\alpha)^2 \qquad .$$

Daraus ergibt sich

$$a^2 = b^2\ (1 - \cos^2\alpha) + (c^2 - 2cb\ \cos\alpha + b^2\cos^2\alpha) = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha.$$

somit ergibt sich: et puis

4–5 Theorem : *Cosinussatz*
In einem beliebigen Dreieck gilt

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\ \cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma \end{aligned}$$

Mit Sinus– und Cosinussatz können in geometrisch bestimmten Dreiecken die jeweils fehlenden Angaben berechnet werden. Sehen Sie sich einige Übungaufgaben am Ende des Kapitels an.

4–6 Beispiel : Sind in einem Dreieck die Winkel α und β und die Länge c der dazwischenliegenden Seite gegeben, so erlaubt der Sinussatz, die Längen a und b zu berechnen. ♢

4.6 Inverse trigonometrische Funktionen

Ist von einem Winkel α nur der Wert von $\sin(\alpha)$ gegeben, so kann man trotzdem versuchen, α zu bestimmen. Man sucht also die **Umkehrfunktion** einer trigonometrischen Funktion.

Die Funktion $\sin(x)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ist **nicht invertierbar**. Um eine invertierbare Funktion zu erhalten, ist der Definitionsbereich einzuschränken. Für $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ wächst $\sin(x)$ monoton von -1 zu 1 an, und somit gibt es für jedes $-1 \leq y \leq 1$ genau ein $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ mit $\sin(x) = y$.

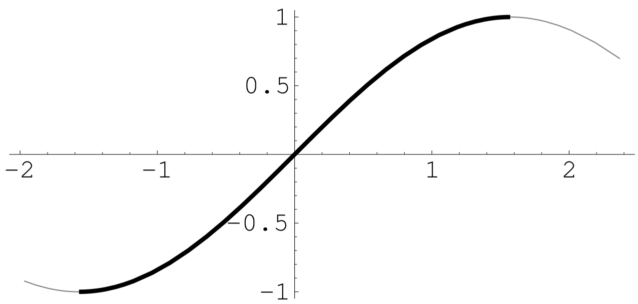


Abbildung 4.9: $\sin(x)$ mit eingeschränktem Definitionsbereich

Es ist zu beachten, dass diese Einschränkung Willkür enthält. Glücklicherweise halten sich aber alle an die selbe Konvention. Das führt zur Definition der **Arcussinus–Funktion**

$$y = \arcsin(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(y) = x \quad \text{und} \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

und zum Graphen von $\arcsin\, x$. Er entsteht durch Spiegelung der Graphen der eingeschränkten sin–Funktion an der 45°–Geraden.

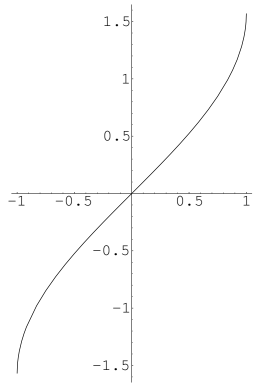


Abbildung 4.10: Graph von $\arcsin(x)$

Hier sind einige spezielle Werte der arcsin–Funktion

$$\arcsin(0) = 0 \quad , \quad \arcsin(1) = \pi/2 \quad , \quad \arcsin(-1) = -\pi/2 \quad , \quad \arcsin(1/2) = \pi/6$$

Diese Funktion ist eine ungerade, streng wachsende Funktion.

Für die cos–Funktion wird der Definitionsbereich auf $0 \leq x \leq \pi$ eingeschränkt, und man erhält durch die selben Überlegungen den Graphen der **Arcuscosinus–Funktion** als inverse Funktion zur cos–Funktion. Man erhält eine streng fallende Funktion. Die arccos–Funktion ist weder gerade noch ungerade. Man sieht aber im Graphen, dass die Funktion $f(x) = \arccos(x) - \pi/2$ ungerade ist.

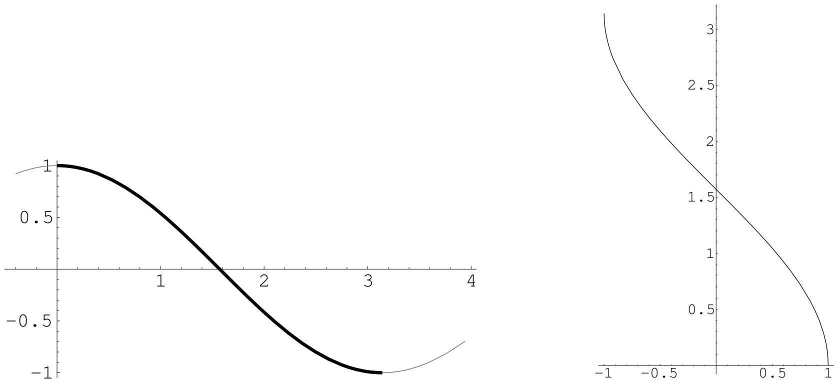


Abbildung 4.11: Graph der eingeschränkten cos–Funktion und von $\arccos(x)$

Aufgrund derselben Überlegungen wird für die tan–Funktion der Definitionsbereich $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ verwendet; so ergibt sich der Graph für die **Arcustangens–Funktion**. Da die tan–Funktion streng wachsend ist, gilt die selbe Eigenschaft für die Umkehrfunktion.

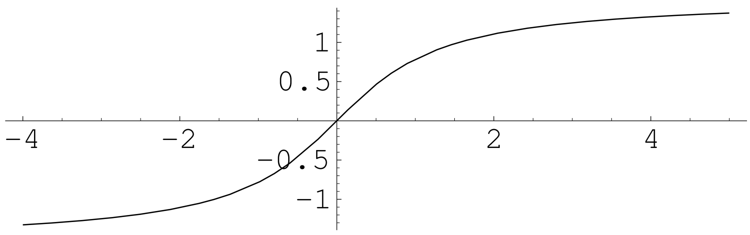


Abbildung 4.12: Graph von $\arctan(x)$

Die obigen Resultate sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Funktion	Definitionsbereich	Bild	Symmetrie	Monotonie
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	ungerade	
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	gerade	
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$	$\mathbb{R}$	ungerade	
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	ungerade	wachsend
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$		fallend
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2, \pi/2)$	ungerade	wachsend

Tabelle 4.1: Eigenschaften der inversen trigonometrischen Funktionen

Notation : Für die inversen trigonometrischen Funktion wird auch die Notation

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \sin^{-1} x \\ \arccos(x) &= \cos^{-1} x \\ \arctan(x) &= \tan^{-1} x \end{aligned}$$

verwendet. Achtung, dies führt zu einer inkonsistenten Notation.

$$\begin{array}{rcl} \sin^2 x &=& (\sin x)^2 \\ \sin^5 x &=& (\sin x)^5 \\ \sin^{-2} x &=& \dfrac{1}{(\sin x)^2} \\ \sin^{-1} x &\neq& \dfrac{1}{\sin x} \\ \sin^{-1} x &=& \arcsin x \\ \sin^k x &=& (\sin x)^k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{array}$$

4.7 Trigonometrische Gleichungen

Die inversen trigonometrischen Funktionen sind notwendig, um Gleichungen die trigonometrische Funktionen enthalten, zu lösen. Leider genügen sie alleine nicht, wie diese einfache Frage zeigt.

4–7 Beispiel : Die beiden Fragen

(a) Berechne $x = \arcsin(1/2)$

(b) Finde alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x) = 1/2$

haben verschiedene Antworten. Nämlich

(a) $x = \pi/6$

(b) $x = \pi/6 + 2k\pi$ und $x = \pi - \pi/6 + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

$\diamondsuit$

Diese einfache Aufgabe zeigt den typischen Effekt beim Lösen einer trigonometrischen Gleichung: der zu behandelnde Definitionsbereich muss unbedingt berücksichtigt werden, und es gibt meistens mehrere Lösungen. Wir werden nun einige Beispiele behandeln.

4–8 Beispiel : Finde alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sin(x)\cos(x) = 0 \qquad .$$

Lösung: Die Gleichung ist gelöst, falls $\sin x = 0$ oder $\cos x = 0$. Das führt auf

$$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots \quad \text{und} \quad x = \pi/2, \pi/2 \pm \pi, \pi/2 \pm 2\pi, \ldots$$

Insgesamt ergibt das

$$x = k\,\pi/2 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z} \qquad .$$

Zur selben Lösung kann man auch mittels der Identität

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

kommen. $\diamondsuit$

4–9 Beispiel : Finde alle Lösungen von $\sin^2 x + \sin x = 2$ im Intervall $[0, 2\pi]$.

Lösung: Mit den neuen Variablen $z = \sin x$ ergibt sich

$$z^2 + z - 2 = 0 \quad \text{oder} \quad (z-1)\,(z+2) = 0$$

Die Gleichung $z = \sin x = -2$ hat offensichtlich keine (reellen) Lösungen, und es bleibt somit nur $\sin(x) = 1$ mit der einzigen Lösung $x = \pi/2$ im verlangten Intervall. ♢

4–10 Beispiel : Finde alle Lösungen von

$$\frac{1}{\sin x} + \cot x = \sqrt{3}$$

im Intervall $(-\pi, \pi)$.

Lösung: Schreibt man diese Gleichung nur mit sin– und cos–Funktion, so ergibt sich

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \sqrt{3}$$

oder auch

$$\cos x = \sqrt{3}\ \sin x - 1 \qquad .$$

Dieser Ausdruck kann quadriert werden, um

$$1 - \sin^2 x = 3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x + 1$$

zu erhalten. Das ergibt die einfachere Form

$$4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x = 4\sin x\,(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$$

mit den Lösungen

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{2\pi}{3}$$

Nullstellen der sin–Funktion kommen als Lösungen nicht in Frage (warum?). Es ist aber zu beachten, dass wir im Verlaufe der Rechnungen quadriert haben, somit **müssen** die Lösungen durch Einsetzen verifiziert werden, und es zeigt sich, dass $x = \pi/3$ die einzige Lösung der ursprünglichen Gleichung ist. ♢

4.8 Harmonische Schwingungen

4–11 Definition : Als **harmonische Schwingung** bezeichnet man einen Vorgang, der durch eine periodische Funktion des „Zeitparameters“ $t \in \mathbb{R}$ beschrieben wird durch

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A heisst **Amplitude**, $\omega t + \varphi$ die **Phase**, φ die **Phasenverschiebung** und ω die **Kreisfrequenz** der Schwingung. Die **Periode** ist gegeben durch $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und die **Frequenz** durch $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Beispiele von harmonischen Schwingungen sind Strom und Spannung eines Wechselstromsignals, Lichtwellensignale in der Optik, mechanische Schwingungen verursacht durch einen rotierenden Teil. Viele Anwendungen verwenden mehrere harmonische Signale und deren **Überlagerung**, z.B. Signale zur Übertragung von Radio– und Fernsehprogrammen.

Die mathematische Behandlung von harmonischen Schwingungen kann durch die Verwendung von komplexen Zahlen und der komplexen Exponentialfunktion erheblich vereinfacht werden. Hier werden „nur“ reelle Funktionen und Argumente verwendet.

4–12 Satz : *Die Beziehung*

$$A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

ist richtig für alle $t \in \mathbb{R}$ falls

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 \quad \textit{und} \quad \tan\varphi = -\frac{A_2}{A_1} \quad .$$

Dieses Resultat besagt, dass die Überlagerung eines $\cos$– und eines $\sin$–Signals mit der selben Frequenz kein wesentlich neues Signal ergibt, sondern nur zu einer Phasenverschiebung führt.

Beweis : Das Additionstheorem für die $\cos$–Funktion ergibt

$$\begin{aligned} A\cos(\omega t + \varphi) &= A\,(\cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi) \\ &= A\cos\varphi\cos(\omega t) - A\sin\varphi\sin(\omega t) \\ &= A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass diese Gleichung genau dann für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, falls

$$\begin{aligned} A\cos\varphi &= A_1 \\ A\sin\varphi &= -A_2 \end{aligned}$$

Durch Quadrieren und Addieren, beziehungsweise Dividieren, ergibt sich daraus

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 \quad \text{und} \quad \tan\varphi = -\frac{A_2}{A_1}$$

□

4.8.1 Überlagerung zweier Schwingungen mit gleichen Frequenzen

Wir betrachten zwei Signale mit gleicher Frequenz, aber verschiedenen Phasenverschiebungen.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ f_2(t) &= A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ f(t) &= f_1(t) + f_2(t) \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, dass $f(t)$ von der Form

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

ist. Wie beim vorangehenden Resultat wird auch hier das Additiontheorem verwendet, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A_1\,(\cos(\omega t)\cos\varphi_1 - \sin(\omega t)\sin\varphi_1) \\ f_2(t) &= A_2\,(\cos(\omega t)\cos\varphi_2 - \sin(\omega t)\sin\varphi_2) \\ f(t) &= A\,(\cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi) \end{aligned}$$

Somit ist das gewünschte Resultat erreicht, falls

$$\begin{aligned} A\cos\varphi &= A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 &= a \\ A\sin\varphi &= A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 &= b \end{aligned}$$

Durch die Daten von $f_1(t)$ und $f_2(t)$ sind a und b bestimmt. Durch Quadrieren und Addieren (bzw. Dividieren) ergibt sich daraus

$$A^2 = a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{b}{a} \quad .$$

Zusammenfassend stellt man fest, dass die Superposition (Überlagerung) zweier harmonischen Signale mit der selben Frequenz wiederum zu einem harmonischen Signal mit der selben Frequenz führt. Einzig die Amplituden und Phasenverschiebungen sind zu ändern.

4.8.2 Überlagerung zweier Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen

Die Situation ändert sich drastisch, falls Signale mit verschiedenen Frequenzen überlagert werden. Wir betrachten die Situation

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\ f_2(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ f(t) &= f_1(t) + f_2(t) \end{aligned}$$

mit $\omega_1 > \omega_2 > 0$. Der Rechentrick

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

einmal angewandt mit $x = \omega_1 t$ und $y = \omega_2 t + \varphi$, ein zweites Mal mit $y = \omega_1 t$ und $x = \omega_2 t + \varphi$ ergibt

$$\begin{aligned} f(t) &= (A_1 + A_2)\ \cos\left(\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t + \tfrac{\varphi}{2}\right)\ \cos\left(\tfrac{\omega_1-\omega_2}{2}\,t - \tfrac{\varphi}{2}\right) - \\ &\quad (A_1 - A_2)\ \sin\left(\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t + \tfrac{\varphi}{2}\right)\ \sin\left(\tfrac{\omega_1-\omega_2}{2}\,t - \tfrac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

Diese Formel ist allgemein gültig, aber nicht sehr übersichtlich. Wir wollen den wichtigen Spezialfall $A_1 = A_2$ etwas genauer betrachten. Hierzu setzen wir zusätzlich noch $\varphi = 0$ und

$$\begin{aligned} \omega &= \tfrac{\omega_1+\omega_2}{2} && \text{Durchschnitt der Kreisfrequenzen} \\ \bar\omega &= \tfrac{\omega_1-\omega_2}{2} && \text{halbe Differenz der Kreisfrequenzen} \end{aligned}$$

und man erhält

$$f(t) = 2\,A_1\ \cos(\bar\omega t)\ \cos(\omega t)$$

Ist die Differenz $\bar\omega$ der Frequenzen klein, so entspricht die erste cos—Funktion ($\cos(\bar\omega t)$) einer langsamen Oszillation und die zweite einer schnellen Oszillation.

Die Abbildung 4.13 zeigt den Graphen der Funktion

$$f(t) = \cos(10t) + \cos(11t)$$

Es ist eine schnelle Oszillation mit der Kreisfrequenz 10.5, deren Amplitude mit einer Kreisfrequenz von 0.5 variiert.

Sind die Bedingung $A_1 = A_2$ nicht exakt erfüllt, sondern nur approximativ, so zeigt sich ein ähnliches Bild. Die Amplitude der Oszillation wird allerdings nicht exakt verschwinden.

Die Abbildung 4.14 zeigt den Graphen der Funktion

$$f(t) = \cos(10t) + 1.3\cos(11t + 2)$$

Es ist ebenfalls (wenn auch nur approximativ) eine schnelle Oszillation mit der Kreisfrequenz 10.5, deren Amplitude mit einer Kreisfrequenz von 0.5 variiert.

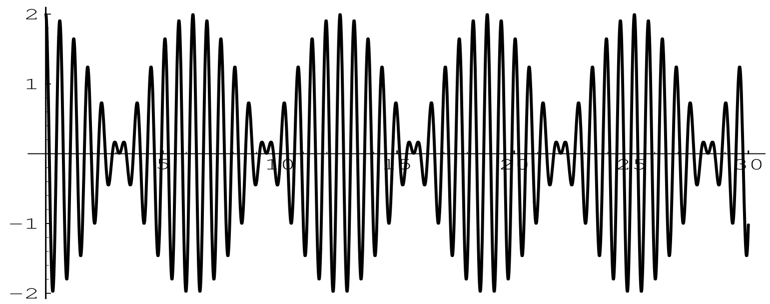


Abbildung 4.13: Schwebung

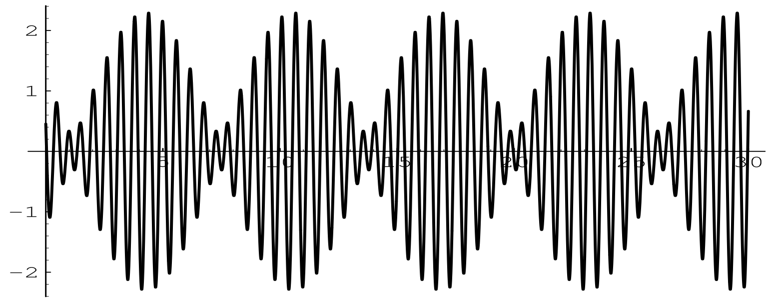


Abbildung 4.14: Approximative Schwebung

4.8.3 Lock In Verstärker

Von einem zu messenden Signal $u(t)$ ist zu untersuchen wie gross der Anteil mit einer gegebenen Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ist. Signalanteile mit anderen Frequenzen und Rauschen sind möglichst zu unterdrücken. Für diese Aufgabe kann ein **Lock In Verstärker** verwendet werden. Hierzu sind die in Figur 4.15 illustrierten Schritte auszuführen:

1. Erzeuge ein Referenzsignal $r(t) = V_1 \sin(\omega_1 t)$ mit der zu untersuchenden Frequenz und fixer Amplitude.
2. Multipliziere das zu untersuchende Signal $u(t)$ mit dem Referenzsignal.
3. Das Ausgangssignal des Multiplikators wird durch einen Tiefpass-Filter gesandt. Somit bleiben nur Signalanteile mit tiefen Frequenzen übrig.
4. Das Ausgangssignal $y(t)$ gibt nun Auskunft über Amplitude und Phase des Eingangssignals mit der zu untersuchenden Frequenz.

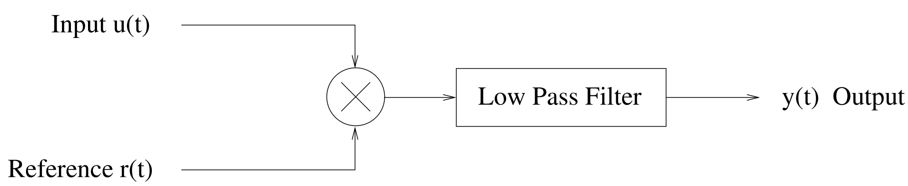


Abbildung 4.15: Lock In Verstärker

Die Analyse beruht auf den folgenden Berechnungen, die trigonometrischen Identitäten verwenden.

$$\Phi(t) = r(t) \cdot u(t) = V_1 \sin(\omega_1 t) \cdot V_2 \sin(\omega_2 t + \phi)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{V_1\,V_2}{2}\,(\cos((\omega_1-\omega_2)\,t+\phi)-\cos((\omega_1+\omega_2)\,t+\phi)) \\
&\overset{\text{Filter}}{\longrightarrow} \frac{V_1\,V_2}{2}\,(\cos((\omega_1-\omega_2)\,t+\phi)) \overset{\omega_1=\omega_2}{=} \frac{V_1\,V_2}{2}\,\cos(\phi) = y(t)
\end{aligned}$$

Die obige Berechnung zeigt, dass der Tiefpass–Filter einen entscheidenden Einfluss auf das Ausgangssignal hat.

4.8.4 FM Radio

Das Additionstheorem impliziert

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y) \\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

und somit

$$2\,\cos(x)\;\cos(y) = \cos(x-y)+\cos(x+y)$$

Mit anderen Variablen folgt hieraus

$$2\,\cos((\omega_0+\omega(t))\,t)\;\cos(\omega_0\,t) = \cos(\omega(t)\,t)+\cos((2\,\omega_0+\omega(t))\,t)$$

Diese Eigenschaft ist ein wesentliches Hilfsmittel bei der Übertragung von Radiosignalen mittels der FM–Technik (Frequenz–Modulation). Die Tabelle 4.2 zeigt den Weg des akustischen Signals.

acoustic signal	$\omega(t)$
modulation	$\downarrow$
	$\cos((\omega_0+\omega(t))\,t)$
sender	$\downarrow$
	radio waves
receiver	$\downarrow$
	$2\,\cos((\omega_0+\omega(t))\,t)\cdot\cos(\omega_0 t)$
trigonometry	$=$
	$\cos(\omega(t)\,t)+\cos((2\,\omega_0+\omega(t))\,t)$
lowpass filter	$\downarrow$
	$\cos(\omega(t)\,t)$
demodulator	$\downarrow$
acoustic signal	$\omega(t)$

Tabelle 4.2: FM radio transmission

4.9 Ein Zentrifugalkraftregler

Früher wurde zur Drehzahlregulierung bei Dampfmaschinen ein sehr einfaches, aber wirksames Gerät verwendet.

Auf jeden der beiden Massenpunkte wirkt die Gewichtskraft $G = m\,g$ nach unten und eine Kraft $F = m\,\omega^2\,r$ nach aussen. Damit sich der Regler weder nach oben noch unten bewegt, muss die Summe der Kräfte

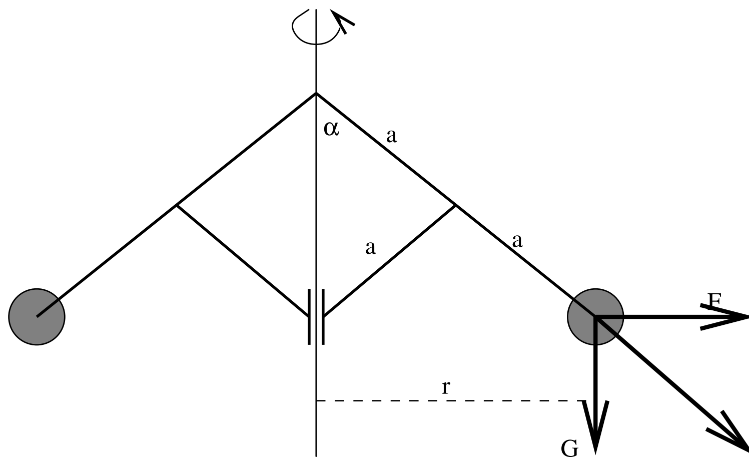


Abbildung 4.16: Fliehkraftregler

(als Vektoren) in die Richtung der Arme zeigen. Aufgrund von einfachen trigonometrischen Überlegungen führt das auf die Bedingung

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{m\omega^2 r}{\sin\alpha}$$

Wegen $r = 2a\sin\alpha$ folgt hieraus die Gleichung

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{m\omega^2 2a\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

oder auch

$$\cos\alpha = \frac{g}{2a\omega^2} \qquad .$$

Betrachten Sie in dieser Gleichung die Winkelgeschwindigkeit ω und den Winkel α als Variablen. Setzen wir

$$\omega_0^2 = \frac{g}{2a}$$

so sieht man, dass für $\omega < \omega_0$ kein Winkel die zugehörige Gleichung löst. Dreht der Regler zu langsam, so heben sich die Arme nicht ab. Ist $\omega \geq \omega_0$, so wird sich jeweils ein zugehöriger Winkel α einstellen. Für grosse Winkelgeschwindigkeiten wird α nahe bei $\pi/2$ sein, d.h. die Arme sind fast waagrecht. Dieses Verhalten wird durch Abbildung 4.17 illustriert.

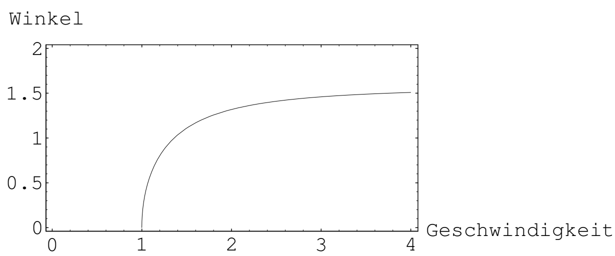


Abbildung 4.17: Auslenkungswinkel für Fliehkraftregler

4.10 Aufgaben

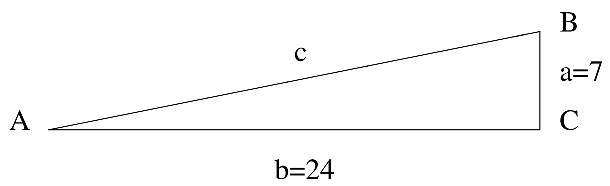
4.10.1 Elementare Probleme

• **Aufgabe 4–1:**
Bestimmen Sie die folgenden Winkel im Bogenmass: $90°$, $60°$, $45°$, $30°$, $1°$, $1'$,$1''$.
Tip: $1° = 60'$ und $1' = 60''$. Bogenminuten und Bogensekunden.

• **Aufgabe 4–2:**
Finden Sie das Gradmass für die folgenden Winkel

$$\pi, \quad 10, \quad \pi/6 \quad \pi/7, \quad 1, \quad 0.1$$

• **Aufgabe 4–3:**
Finden Sie die Werte der trigonometrischen Funktionen des Dreiecks ABC ($\gamma = 90°$).



• **Aufgabe 4–4:**
Für das Dreick ABC gilt $\sin\alpha = 1/2$, $\gamma = 90°$ und $c = 5$. Bestimmen Sie α, β, a, b.

• **Aufgabe 4–5:**
Für das Dreick ABC gilt $\sin\alpha = 0.3$, $\gamma = 90°$ und $c = 5$. Bestimmen Sie α, β, a, b.

• **Aufgabe 4–6:**
Bestimmen Sie alle Grössen im Dreieck ABC mit $c = 25$, $\alpha = 35°$ und $\beta = 68°$.

• **Aufgabe 4–7:**
Entscheiden Sie für folgenden Gleichungen, ob sie richtig oder falsch sind.

Gleichung	richtig	falsch
$\sin(15) = \sin(165)$		
$\sin(\pi + x) = \sin(-x)$		
$\sin(3\pi/2 + x) = -\cos(x)$		
$\sin(2\pi - x) = \sin(x)$		
$\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$		
$\cos(x + \pi/2) = \sin(x)$		
$\cos(x + y) = \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y)$		
$2\cos^2(x/2) = 1 + \cos(x)$		
$\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$		
$\tan(2x) = \tan(x)/(1 - \tan^2(x))$		

4.10.2 Eigenschaften der Funktionen

• Aufgabe 4–8:
Finden Sie die Liste der Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen in **Ihrer** Formelsammlung.

• Aufgabe 4–9:
Finde eine Graphik, die deutlich zeigt, dass $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$.

• Aufgabe 4–10:
Die Figur 4.18 zeigt den Einheitskreis. Berechnen das Quadrat des Abstandes d auf zwei Arten:

1. als Abstand zwischen den Punkten $(1, 0)$ und $(\cos\alpha, \sin\alpha)$
2. als Abstand zwischen den Punkten $(\cos\beta, \sin\beta)$ und $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$

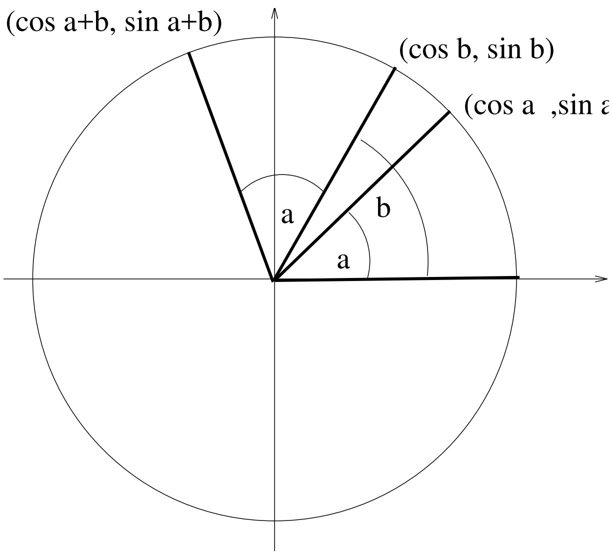


Abbildung 4.18: Beweis des Additionstheorems für den Cosinus

Verwenden Sie anschliessend beide Formeln, um das Additionstheorem des Cosinus zu verifizieren

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta$$

Diese Formel ist für beliebige Winkel α und β gültig. Indem wir β durch $-\beta$ ersetzen, erhalten wir

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

Dies ist das Additionstheorem des Cosinus.

• Aufgabe 4–11:
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

richtig?

• Aufgabe 4–12:
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

richtig?

• Aufgabe 4–13:
Berechnen Sie $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ **exakt** ohne Taschenrechner. Verwenden Sie die Werte von $\sin$ und $\cos$ für die Winkel $30°$, $45°$ und $60°$.

• Aufgabe 4–14:
Finde und beweise eine Formel für $\sin\left(x/2\right)$.

• Aufgabe 4–15:
Verwenden Sie die beiden Additionstheoreme

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \quad \text{und} \quad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

um

(a) $\cos(2\,x)$ als Funktion von $\sin x$ zu schreiben.

(b) $\sin(3\,x)$ als Funktion von $\sin x$ zu schreiben.

Zwischenschritte sind unbedingt zu zeigen.

• Aufgabe 4–16:
Beweisen Sie die Formel $\sin\left(x+y\right)\sin\left(x-y\right) = \sin^2 x - \sin^2 y$ mittels der Additionstheoreme.

• Aufgabe 4–17:
Verwenden Sie die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen um die folgenden Formels zu finden und zu verifizieren. Es genügt nicht das Resultat aus einer Formelsammlung zu kopieren.

(a) Drücken Sie $\cos(2\,a)$ in Termen von $\cos a$ und $\cos^2 a$ aus.

(b) Drücken Sie $\cos(4\,a)$ in Termen von $\cos a$ und $\cos^n a$, ($n = 1, 2, 3, 4$) aus.

• Aufgabe 4–18:
Finde und beweise eine Formel für $\cos\left(x/2\right)$.

• Aufgabe 4–19:
Finde und beweise Additionstheoreme für die Funktion $\tan\left(x\right)$.

• Aufgabe 4–20:
Finde und beweise Doppelwinkelformeln für die Funktion $\tan\left(x\right)$.

• Aufgabe 4–21:
Finde und beweise Formeln für $\sin\left(3x\right)$ und $\cos\left(3x\right)$.

• Aufgabe 4–22:
Finde und beweise eine Formel für $\cos\left(x\right) + \cos\left(y\right)$.

• Aufgabe 4–23:
Die Funktion $\cot\left(x\right)$ (Cotangens) ist definiert durch

$$\cot\left(x\right) = \frac{\cos\left(x\right)}{\sin\left(x\right)} = \frac{1}{\tan\left(x\right)} \qquad .$$

Finden Sie Definitions– und Bildbereich und skizzieren Sie den Graphen.

• Aufgabe 4–24:
Die $\sin$–Funktion ist keine lineare Funktion.

(a) Zeigen Sie mittels einiger Beispiele, dass im allgemeinen $\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\,\alpha + \sin\,\beta$.

(b) Finden Sie einige spezielle Winkel α und β für die gilt $\sin(\alpha+\beta) = \sin\,\alpha + \sin\,\beta$.

• Aufgabe 4–25:
Die $\cos$–Funktion ist keine lineare Funktion.

(a) Zeigen Sie mittels einiger Beispiele, dass im allgemeinen $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\,\alpha + \cos\,\beta$.

(b) Finden Sie einige spezielle Winkel α und β, für die gilt $\cos(\alpha+\beta) = \cos\,\alpha + \cos\,\beta$.

• Aufgabe 4–26:
Bestimmen Sie die **exakten** Werte aller Lösungen der untenstehenden Gleichung im Interval $[-\pi,\, 2\,\pi]$.
Tipp: Verwenden Sie die Funktion $\arccos$ und $\sin(x \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos(x)$.

$$-2\,\sin(x) = 2 - \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

• Aufgabe 4–27:
Beantworten Sie die folgenden Fragen.

(a) Für welche Werte von x gilt $\sin(\sin^{-1} x) = x$.

(b) Für welche Werte von x gilt $\cos^{-1}(\cos x) = x$.

(c) Sei $-1 \leq x \leq 1$. Schreiben Sie $\sin(\cos^{-1} x)$ um, so dass keine trigonometrischen Funktionen mehr auftauchen.

(d) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$4\sin^4 x + 4\sin^2 x = 3$$

• Aufgabe 4–28:
Die Funktion $\cot(x)$ (Cotangens) ist definiert durch

$$f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad .$$

(a) Finden Sie Definitions– und Bildbereich dieser Funktion

(b) Skizzieren Sie den Graphen für den Bereich $-2 \leq x \leq 7$

(c) Es gibt eine "natürliche" Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Skizzieren Sie deren Graphen und bestimmen Sie $f^{-1}(-2)$

• Aufgabe 4–29:
Untersuchen die trigonometrische Funktion $y = f(x) = \sin x$ mit eingeschränktem Definitionsbereich $[\pi/2\,,\, 3\,\pi/2]$.

(a) Bestimmen Sie das Bild dieser Funktion.

(b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Bild der inversen Funktion f^{-1}.

(c) Zeichnen Sie den Graphen der inversen Funktion f^{-1}.

(d) Berechnen Sie $f^{-1}(-0.5)$

• Aufgabe 4–30:
Untersuchen die Funktion $y = f(x) = \sin x$ mit eingeschränktem Definitionsbereich $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$

(a) Bestimmen Sie das Bild dieser Funktion.

(b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Bild der inversen Funktion f^{-1}.

(c) Zeichnen Sie den Graphen der inversen Funktion f^{-1}.

(d) Berechnen Sie $f^{-1}(-0.2)$ (Taschenrechner ist notwendig).

• Aufgabe 4–31:
Sei $f(x) = \cos(x)$ mit dem Definitionsbereich $[-\pi, 0]$. Untersuche die inverse Funktion $f^{-1}(x)$.

1. Zeichne den Graphen von f^{-1}.
2. Finde Eigenschaften dieser Funktion.
3. Berechnen Sie $f^{-1}(-0.5)$.

• Aufgabe 4–32:
Die **Chebyshev–Polynome**[2] sind gegeben durch die explizite Formel

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Das führt auf

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ &\ldots \end{aligned}$$

Zeigen Sie mittels Induktion und Additionstheoremen, dass

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{für} \quad n \geq 1 \qquad .$$

Diese Polynome werden für Approximationen oft eingesetzt.
Achtung: diese Aufgabe ist ziemlich schwierig.

4.10.3 Trigonometrische Gleichungen

• Aufgabe 4–33:
Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

• Aufgabe 4–34:
Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\sin(x) = \sin(2x)$$

im Intervall $[0, 2\pi]$.

• Aufgabe 4–35:
Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\cos(2x) = \sin(2x)$$

im Intervall $[0, 2\pi]$.

[2] P. L. Chebyshev (1821–1894), manchmal auch Tschebyschew geschrieben, russischer Mathematiker. Seine Resultate sind vor allem in der Approximationstheorie von Bedeutung.

• **Aufgabe 4–36:**
Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\cos(x) + \cos(x + \pi/3) - 3/2 = 0$$

im Intervall $[0, 2\pi]$.

• **Aufgabe 4–37:**
Finden Sie **exakte** Resultate für alle Lösungen der Gleichung

$$\cos(2\,x) = 2\sin^2 x$$

im Intervall $[-\pi, 2\pi]$. Die Resultate sind im Bogenmass anzugeben.

• **Aufgabe 4–38:**

(a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \cos(x)$ für $\pi \le x \le 2\,\pi$. Zu zeichnen ist der Graph der inversen Funktion f^{-1} und berechnen Sie $f^{-1}(-1/2)$.

(b) Finden Sie die exakten Lösungen von $\cos x = \cos(2\,x)$ für $0 \le x \le 2\,\pi$.

4.10.4 Anwendungen

• **Aufgabe 4–39:**
Zwei akustische Signale gleicher Amplitude werden überlagert. Zu hören ist ein Ton mit Frequenz 440 Hz und einer maximalen Amplitude von 1. Die Lautstärke variiert, je nach 2 Sekunden wird ein Lautstärkemaximum erreicht. Bestimmen Sie Frequenz und Amplitude der beiden ursprünglichen Signale.

• **Aufgabe 4–40:**
Seien A und B zwei Punkte auf verschiedenen Seiten eine Flusses. Zeichnet man die Gerade AC mit einer Länge von 275 m und mit einem Winkel $\alpha = 125°40'$, so ist $\gamma = 48°50'$. Bestimmen Sie die Länge von $c = AB$.

• **Aufgabe 4–41:**
Ein Boot fährt gegen Norden und sieht ein Licht in der Richtung $N35°O$. Nach 3 km Fahrt erscheint das Licht in der Position $N48°25'O$. Das Boot fährt immer in die selbe Richtung weiter.

(a) Finde die kürzeste Distanz zwischen dem Boot und dem Licht.

(b) Finde die Position des Lichtes, nachdem das Boot sich 10 km vom Ausgangspunkt entfernt hat.

• **Aufgabe 4–42:**
Von einem Punkt A aus fliegt ein Pilot 125 km in die Richtung $N38°20'W$, dann wendet er. Wegen eines Navigationsfehlers fliegt er 125 km in Richtung $S51°40'O$. In welche Richtung und welche Distanz muss er anschliessend fliegen, um zum Punkt A zurückzukehren.

• **Aufgabe 4–43:**
Ein Boot fährt gegen Osten und beobachtet ein Licht in der Richtung $N62°10'O$. Nachdem es 2250 m zurückgelegt hat erscheint das Licht bei $N48°25'O$. Das Boot behält seinen Kurs bei. Bestimmen die die minimale Distanz zwischen Boot und Licht.

• **Aufgabe 4–44:**
Ein Pilot fliegt in die Richtung $N75°O$ mit einer Geschwindigkeit von 200 km/h. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit bezüglich der Erde, wenn der Wind mit 40 k/h aus der Richtung $S30°O$ weht.

• Aufgabe 4–45:
Von einen festen Punkt aus erscheint der Fuss eines Baumes um einen Winkel von $\alpha = 0.588$ überhöht. Bewegt man sich 10 m weiter vom Baum weg, so erscheint der Fuss des Baumes unter einem Winkel von $\beta = 0.380$ und die Spitze unter $\gamma = 0.850$. Wie hoch ist der Baum?

• Aufgabe 4–46:
Vom Nordpol aus wird ein Satellit 5° über dem Horizont gesehen und gleichzeitig vom Äquator aus in exakt nördlicher Richtung 15° über dem Horizont. Wie hoch fliegt der Satellit über der Erdoberfläche? Für den Erdradius kann man mit R $\approx$ 6370 km rechnen.

• Aufgabe 4–47:
Ein Boot bewegt sich entlang einer Geraden mit einer Geschwindigkeit von 20 km/h. Zur Zeit $t = 0$ ist das Boot 35 km vom Beobachter entfernt, 30 Minuten später ist es nur noch 28 km entfernt. Wann ist es 25 km entfernt?

4.10.5 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 4–6 : $a = 15$, $b = 24$, $\gamma = 77^\circ$

Lösung zu Aufgabe 4–7 :

Gleichung	richtig	falsch
$\sin(15) = \sin(165)$		X
$\sin(\pi + x) = \sin(-x)$	X	
$\sin(3\pi/2 + x) = -\cos(x)$	X	
$\sin(2\pi - x) = \sin(x)$		X
$\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$	X	
$\cos(x + \pi/2) = \sin(x)$		X
$\cos(x + y) = \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y)$		X
$2\cos^2(x/2) = 1 + \cos(x)$	X	
$\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$	X	
$\tan(2x) = \tan(x)/(1 - \tan^2(x))$		X

Lösung zu Aufgabe 4–10 :

1. Der Abstand zwischen den Punkten $(1, 0)$ und $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ist gegeben durch
$$\begin{aligned} d^2 &= (1 - \cos\,\alpha)^2 + \sin^2\,\alpha \\ &= 1 - 2\,\cos\,\alpha + \cos^2\,\alpha + \sin^2\,\alpha \\ &= 2 - 2\,\cos\,\alpha \end{aligned}$$

2. Der Abstand zwischen den Punkten $(\cos\beta, \sin\beta)$ und $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ ist
$$\begin{aligned} d^2 &= (\cos(\alpha+\beta) - \cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha+\beta) - \sin(\beta))^2 \\ &= \cos^2(\alpha+\beta) - 2\,\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta) + \cos^2(\beta) \\ &\quad + \sin^2(\alpha+\beta) - 2\,\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta) + \sin^2(\beta) \\ &= 2 - 2\,\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta) - 2\,\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta) \end{aligned}$$

Da die beiden Ausdrücke gleich sein müssen, gilt

$$\begin{aligned} 2-2\,\cos\,\alpha &= 2-2\,\cos\,(\alpha+\beta)\cos\,(\beta)-2\,\sin\,(\alpha+\beta)\sin\,(\beta) \\ \cos\,\alpha &= \cos\,(\alpha+\beta)\cos\,(\beta)+\sin\,(\alpha+\beta)\sin\,(\beta) \end{aligned}$$

Da diese Formel für beliebige Winkel gilt, können wir α durch $\alpha-\beta$ ersetzen (aus $\alpha+\beta$ wird somit α) und erhalten

$$\cos\,(\alpha-\beta)=\cos\,(\alpha)\cos\,(\beta)+\sin\,(\alpha)\sin\,(\beta)$$

Ersetzt man nun noch β durch $-\beta$, so ergibt sich das Standardresultat

$$\cos\,(\alpha+\beta)=\cos\,(\alpha)\cos\,(\beta)-\sin\,(\alpha)\sin\,(\beta)$$

Lösung zu Aufgabe 4–13 :

$$\cos\,\frac{5\pi}{12}=\sin\,15^\circ=\sin\,\frac{30^\circ}{2}=\frac{1}{2}\,\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\,\sqrt{2}}$$

Um die obige Gleichung zu verifizieren kann man die Identität

$$2\,\left(2-\sqrt{3}\right)=3-2\,\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

verwenden.

Lösung zu Aufgabe 4–15 :

(a)

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x\,\cos y-\sin x\,\sin y \\ \cos(x+x) &= \cos^2 x-\sin^2 x=1-2\,\sin^2 x \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x\,\cos y+\cos x\,\sin y \\ \sin(2\,x) &= 2\,\sin x\,\cos x \\ \sin(2\,x+x) &= \sin(2\,x)\,\cos x+\cos(2\,x)\,\sin x \\ &= 2\,\sin x\,\cos x\,\cos x+(1-2\,\sin^2 x)\,\sin x \\ &= 2\,\sin x\,\cos^2 x+\sin x-2\,\sin^3 x \\ &= 2\,\sin x\,(1-\sin^2 x)+\sin x-2\,\sin^3 x \\ \sin(3\,x) &= 3\,\sin x-4\,\sin^3 x \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4–17 : Verwende

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a\,\cos b-\sin a\,\sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a\,\cos b+\cos a\,\sin b \end{aligned}$$

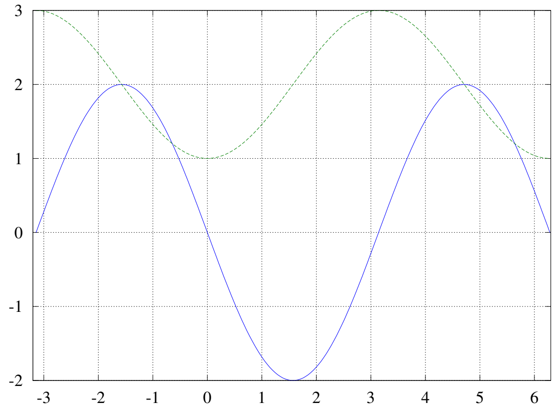
(a)

$$\begin{aligned} \cos(a+a) &= \cos a\,\cos a-\sin a\,\sin a\;=\;\cos^2 a-\sin^2 a \\ &= 2\,\cos^2 a-1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\cos(2\,a+2\,a) &= 2\,\cos^2(2a)-1 \\
&= 2\,\left(2\,\cos^2(a)-1\right)^2-1 \\
&= 8\,\cos^4(a)-8\,\cos^2 a+1
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4–26 : Die Graphen der beiden Funktionen zeigen 4 Schnittpunkte im gefragten Interval.



$$\begin{aligned}
-2\,\sin(x) &= 2-\sin(x+\frac{\pi}{2}) \\
-2\,\sin(x) &= 2-\cos(x) \qquad | \quad \text{quadrieren} \\
4\,(1-\cos^2(x)) &= 4-4\,\cos(x)+\cos^2(x) \\
5\,\cos^2(x)-4\,\cos(x) &= 0 \\
\cos(x)\;(5\,\cos(x)-4) &= 0
\end{aligned}$$

Somit ergeben sich zwei Möglichkeiten, die jedoch durch einsetzen zu kontrollieren sind.

- Nullstellen von $\cos(x)$:
  Von den drei Nullstellen $\pm\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{3\pi}{2}$ sind nur $x_1=-\frac{\pi}{2}$ und $x_2=\frac{3\pi}{2}$ Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

- Lösungen von $\cos(x)=\frac{4}{5}$
  Setze $z=\arccos(\frac{4}{5})\approx 0.6435$. Von den drei Lösungen $\pm z$ und $2\,\pi-z$ sind nur $x_3=-z$ und $x_4=2\,\pi-z$ Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}=\{-\frac{\pi}{2},\,\frac{3\,\pi}{2},-\arccos(\frac{4}{5}),2\,\pi-\arccos(\frac{4}{5})\}$$

Lösung zu Aufgabe 4–27 : Untersuchen Sie die Graphen und Definitionsbereiche der Funktionen, um zu folgenden Resultaten zu kommen

(a) Der Definitionsbereich der Funktion $\sin^{-1}=\arcsin$ ist $[-1,1]$. Für diese x gilt die verlangte Bedingung.

(b) Das Bild der Funktion $\cos^{-1}=\arccos$ ist $[0,\pi]$. Für diese x gilt die verlangte Bedingung.

(c)

$$\begin{aligned}
\sin z &= \pm\sqrt{1-\cos^2 z} \\
\sin\cos^{-1} x &= \pm\sqrt{1-\cos^2\cos^{-1} x} = \pm\sqrt{1-x^2} \\
0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi &\Longrightarrow \sin\cos^{-1} x > 0 \\
\sin\cos^{-1} x &= +\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

(d) Mit der Substitution $z = \sin^2 x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
4\,z^2 + 4\,z - 3 &= 0 \\
z_{1,2} = \frac{1}{8}\,\left(-4 \pm \sqrt{16+48}\right) &= \frac{1}{8}\,(-4 \pm 8) = \frac{-1}{2} \pm 1
\end{aligned}$$

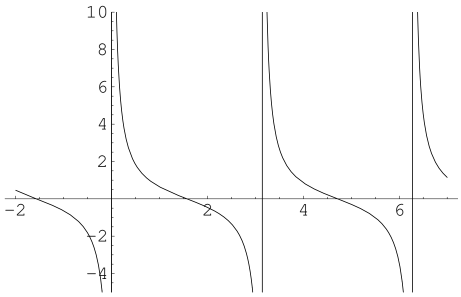
Da $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ kommt nur die Lösung $\sin^2 x = 1/2$ in Frage. Somit gilt

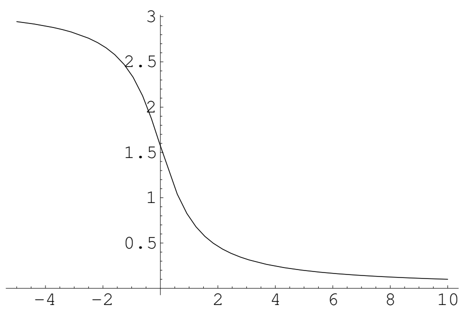
$$\begin{aligned}
\sin x &= \pm\sqrt{1/2} \\
x &= \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2} \quad \text{wobei} \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4–28 :

(a) Der Definitionsbereich darf die Nullstellen von $\sin(x)$ nicht enthalten und somit $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\,\pi\;,\; k \in \mathbb{Z}\}$. Der Bildbereich muss $\mathbb{R}$ sein.

(b) Der linke Teil der untenstehenden Graphik zeigt den Graphen von $\cot(x)$.





(c) Der Definitionsbereich der Funktion f muss eingeschränkt werden. Eine mögliche Einschränkung ist $(0\,,\,\pi)$. Die resultierende inverse Funktion f^{-1} hat Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und das Bild $(0\,,\,\pi)$. Der Graph ist oben rechts gezeigt. Der Wert von $x = f^{-1}(-2)$ ist bestimmt durch die Bedingungen $\cot(x) = -2$ und $0 < x < \pi$. Man erhält $x \approx 2.67795$.

Eine andere, oft verwendete Einschränkung für den Definitionsbereich von f ist $-\pi/2 < x < \pi/2$. In diesem Fall ergibt sich $f^{-1}(-2) \approx -0.463648 = 2.67795 - \pi$.

Lösung zu Aufgabe 4–29 :

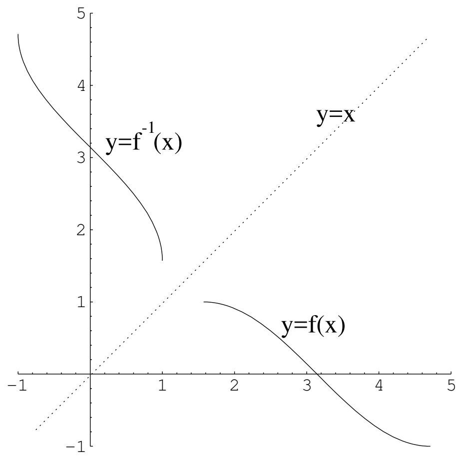
(a) Das Bild der Funktion f ist $[-1\,,\,1]$

(b) Der Definitionsbereich der inversen Funktion f^{-1} ist $[-1\,,\,1]$ und das Bild ist $[\pi/2\,,\,3\,\pi/2]$

(c) Spiegelung des ursprünglichen Graphen an der Geraden $x = y$. Die Graphik wurde erzeugt mit *Mathematica* durch die folgenden Befehle

Mathematica

```
g1 = ParametricPlot[{t, Sin[t]}, {t, Pi/2, 3Pi/2},
      DisplayFunction -> Identity];
g2 = ParametricPlot[{Sin[t], t}, {t, Pi/2, 3Pi/2},
      DisplayFunction -> Identity];
Show[{g1, g2}, PlotRange -> {{-1, 5}, {-1, 5}},
      DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> 1];
```



(d) Der horizontale Abstand des Wertes von x mit $f(x) = -0.5$ von $x = \pi$ ist gegeben durch $\arcsin 0.5 = \pi/6$. Somit gilt

$$f^{-1}(0.5) = \pi + \arcsin(0.5) = \pi + \pi/6 = 7\,\pi/6 = 210^\circ \approx 3.66519$$

Lösung zu Aufgabe 4–30 :

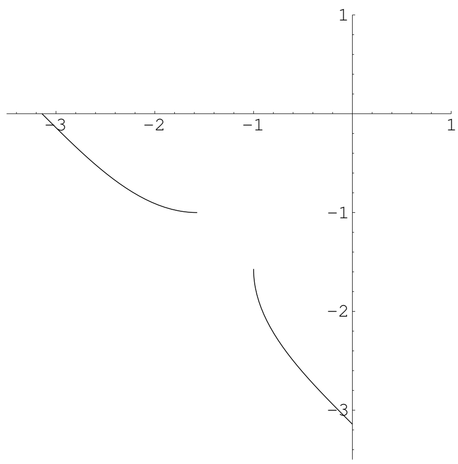
(a) Das Bild der Funktion f ist $[-1\,,\,0]$

(b) Der Definitionsbereich der inversen Funktion f^{-1} ist $[-1\,,\,0]$ und das Bild ist $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$

(c) Spiegelung des ursprünglichen Graphen an der Geraden $x = y$. Die Graphik wurde erzeugt mit *Mathematica* durch die folgenden Befehle

Mathematica

```
g1= ParametricPlot[{t,Sin[t]},{t,-Pi,-Pi/2},DisplayFunction -> Identity];
g2= ParametricPlot[{Sin[t],t},{t,-Pi,-Pi/2},DisplayFunction -> Identity];
g3=Show[{g1,g2},PlotRange->{{-3.5,1},{-3.5,1}},
    DisplayFunction ->$DisplayFunction,AspectRatio -> 1];
```



(d) Der horizontale Abstand des Wertes von x mit $f(x) = -0.2$ von $x = -\pi$ ist gegeben durch $\arcsin 0.2$. Somit gilt

$$f^{-1}(-0.2) = -\pi + \arcsin(0.2) \approx -2.940$$

Lösung zu Aufgabe 4–31 : $f^{-1}(-0.5) = \frac{-2\pi}{3} \approx -2.094$.

Lösung zu Aufgabe 4–33 : $x = \pm 2\,\pi/3 + k\,4\pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.

Lösung zu Aufgabe 4–34 : $0\,,\ \pi\,,\ 2\pi\,,\ \pi/3\,,\ 5\pi/3$

Lösung zu Aufgabe 4–36 :

$$\cos(x + \pi/3) = \cos x \cos(\pi/3) - \sin x \sin(\pi/3) = \frac{1}{2}\ \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \sin x$$

Somit kann die ursprüngliche Gleichung

$$\cos(x) + \cos(x + \pi/3) - 3/2 = 0$$

ersetzt werden durch

$$2\cos(x) + \cos x - \sqrt{3}\ \sin x - 3 = 0$$

oder auch

$$\sqrt{3}\ (\cos(x) - 1) = \sin x$$

Durch Quadrieren ergibt sich die Gleichung

$$3\ (\cos^2(x) - 2\cos x + 1) = 1 - \cos^2 x$$

oder auch

$$2\cos^2(x) - 3\cos x + 1 = 0$$

und somit ist mit

$$\cos x = \frac{1}{4}\ \left(3 \pm \sqrt{9-8}\right) = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Diese Gleichung hat im gegebenen Intervall $[0, 2\pi]$ die Lösungen $x = 0,\ 2\pi,\ \frac{\pi}{3}\ 2\pi - \frac{\pi}{3}$ Da im Verlaufe der Rechnung quadriert wurde, sind diese Resultate zu überprüfen mit der ursprünglichen Gleichung, und es zeigt sich, dass $z = \pi/3$ **keine** Lösung ist. Somit bleiben die drei Lösungen

$$x = 0 \quad , \quad x = 2\pi \quad \text{und} \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

Lösung zu Aufgabe 4–37 : Wegen der trigonometrischen Identität

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

kann die Gleichung ersetzt werden durch

$$1 - 2\sin^2 x = 2\sin^2 x$$

oder auch

$$\sin x = \pm\frac{1}{2}$$

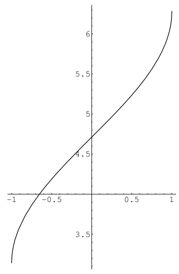
Somit sind die Lösungen gegeben durch

$$x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} \quad , \quad x_{3,4} = \pm(\pi - \frac{\pi}{6}) \quad , \quad x_5 = \pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{und} \quad x_6 = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

Lösung zu Aufgabe 4–38 :

(a)

Der Graph der Funktion entsteht durch Spiegelung des richtigen **Teils** des Graphen der Funktion $\cos x$ an der Geraden $x = y$. Siehe Figur rechts. Der Wert $z = f^{-1}(-0.5)$ ist bestimmt durch die beiden Bedingungen $\cos z = -0.5$ und $\pi \leq z \leq 2\pi$ und somit gegeben durch $\frac{4}{3}\pi$.



(b) Verwende die Gleichung

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

um mit der Substitution $z = \cos x$ auf die quadratische Gleichung

$$2z^2 - z - 1 = 0$$

zu kommen. Diese Gleichung hat die beiden Lösungen $z_1 = 1$ und $z_2 = -1/2$. Im gegebenen Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$ erhält man somit die vier Lösungen

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad x_3 = \frac{4\pi}{3} \quad , \quad x_4 = 2\pi$$

Lösung zu Aufgabe 4–39 : Setze

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A\ \sin(\omega_1 t) \\ f_2(t) &= A\ \sin(\omega_2 t) \\ f(t) &= f_1(t) + f_2(t) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$f(t) = 2A\ \sin(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\,t)\ \sin(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\,t)$$

Die maximale Amplitude von $f(t)$ ist 1, somit $A = 1/2$. Die Frequenz ν des Tones ist 440 Hz, somit

$$440 = \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4\pi}$$

Die Maxima der Lautstärken haben einen Abstand von 2 Sekunden. Somit ist die entsprechende Frequenz $1/4$ Hz. Es gilt

$$\frac{1}{4} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{4\pi}$$

Somit erhalten wir das Gleichungssystem für ω_1 und ω_2

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= 4\pi\ 440 \\ \omega_1 - \omega_2 &= 4\pi\ \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir leicht

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\pi\,(440 + \frac{1}{4}) \\ \omega_2 &= 2\pi\,(440 - \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

Somit haben die beiden Signale je Amplitude $\frac{1}{2}$ und Frequenzen von 439.75 Hz und 440.25 Hz.

Lösung zu Aufgabe 4–40 : c=2160 m

Lösung zu Aufgabe 4–41 :

(a) 5.547 km

(b) In Richtung S $69°27'$ O.

Lösung zu Aufgabe 4–42 : 29 km und $S45°O$

Lösung zu Aufgabe 4–43 : 2934 m

Lösung zu Aufgabe 4–44 : $N63°29'E$ und 193.5 km/h

Lösung zu Aufgabe 4–45 : Höhe $\approx 18.43\ m.$

Lösung zu Aufgabe 4–46 : Es gibt verschiedene mögliche Lösungsansätze.

1. Im Dreieck mit den Ecken Satellit, Nordpol und dem Punkt auf dem Äquator sind eine Seite und zwei Winkel bekannt. Rechnen Sie weiter mit Standardmethoden.

2. Sei $\alpha = 15°$ und $\beta = 5°$, dann liest man aus einer „geeigneten“ Figur ab, dass

$$y\ \tan\alpha = x - R \qquad , \qquad x\ \tan\beta = y - R$$

   In diesen beiden Gleichungen sind nur x und y unbekannt und somit kann die Antwort gefunden werden durch Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten.

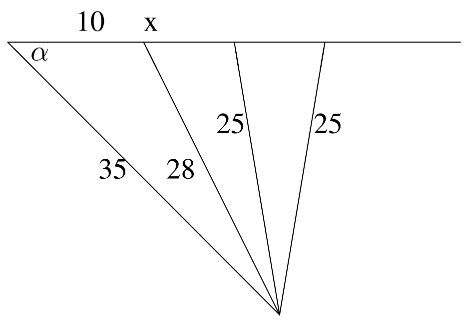
3. Alle Lösungswege sollten auf die approximative Antwort 4526 km führen.

Lösung zu Aufgabe 4–47 : Wegen des Cosinus–Satzes im Dreieck mit den Seitenlängen 35, 28 und 10 gilt

$$\cos\ \alpha = \frac{35^2 + 10^2 - 28^2}{2 \cdot 35 \cdot 10} = \frac{541}{700}$$

und mit dem Dreieck mit den Seitenlängen 35, 25 und x gilt

$$25^2 = 35^2 + x^2 - 2 \cdot 35\, x \cos\ \alpha = 35^2 + x^2 - 2 \cdot 35\, x\ \frac{541}{700} = 35^2 + x^2 - x\ \frac{541}{100}$$



Dies führt auf die quadratische Gleichung

$$x^2 - x\ \frac{541}{100} + 35^2 - 25^2 = 0$$

mit den approximativen Lösungen

$$x \approx \begin{cases} 15.57\ km \\ 38.52\ km \end{cases}$$

Da das Boot pro km 3 Minuten benötigt führt dies auf die Zeiten $t_1 \approx 46.71\ min$ und $t_2 \approx 115.56\ min.$

4.11 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- mit dem Bogen– und Gradmass von Winkeln umgehen können.
- die Kreisfunktionen am Dreieck und am Einheitskreis erklären können.
- mit inversen trigonometrischen Funktionen und trigonometrischen Gleichungen umgehen können.
- einfache Anwendungsprobleme lösen können.
- mit den Additionstheoremen und anderen wichtigen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen vertraut sein.
- in Ihrer Formelsammlung alle Information über trigonometrische Funktionen finden können.

Kapitel 5

Exponential– und Logarithmusfunktionen

Bei vielen technischen Problemen spielen die Exponential– und Logarithmusfunktionen eine wichtige Rolle. Ihre Bedeutung beruht vor allem auf der Tatsache, dass Exponentialfunktionen als Lösungen von **linearen Differentialgleichungen** auftreten. Beispiele hierzu sind Wärmeleitungsprobleme, mechanische Schwingungen (mit und ohne Dämpfung), radioaktiver Zerfall, dynamisches Verhalten von elektrischen Schaltkreisen, ...

Die **Eulersche Formel**

$$e^{i\,x} = \cos x + i\,\sin x$$

stellt die Beziehung zwischen der Exponentialfunktion mit komplexem Argument und den trigonometrischen Funktionen her, und vor allem beim Behandeln von Differentialgleichungen ist es oft einfacher mit $e^{i\omega t}$ zu rechnen statt mit $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$.

5.1 Die Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus

5.1.1 Grundlegende Eigenschaften

Die irrationale Zahl e ist gegeben durch eine der beiden Formeln

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$$

oder

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Die Erklärung dieser Resultate wird im Kapitel über Folgen und Reihen gegeben. Für uns ist e im eine reelle Zahl, und die ersten paar Ziffern der Dezimalbruchdarstellung sind

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966 97\ldots$$

Der Graph der Funktion $y = e^x = \exp(x)$ ist gegeben in Abbildung 5.1. Der Graph wurde mit *Octave* erzeugt mit der Befehlssequenz

Octave

```
x = linspace(-2,2,201);
plot(x,exp(x))
grid on
xlabel('x');  ylabel('exp(x)')
```

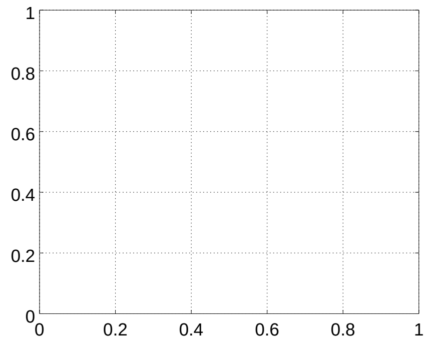


Abbildung 5.1: Graph von $f(x) = e^x$

5–1 Satz : *Die Funktion* $\exp(x)$ *ist charakterisiert durch die beiden Eigenschaften*

$$f(1) = e \quad \textit{und} \quad f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$$

Man kann zeigen, dass es nur eine (stetige) Funktion gibt mit den beiden obigen Eigenschaften. Hierzu setzen wir die Notation $f(x) = e^x$ ein.

5–2 Beispiel : Wir wollen einige elementare Resultate über die Exponentialfunktion aus den obigen Eigenschaften ablesen.

(a) Setzen wir in der Formel $e^{a+b} = e^a\, e^b$ die Terme $a = 0$ und $b = 1$, so ergibt sich

$$e^1 = e^{0+1} = e^0\, e^1$$

und somit **muss** $e^0 = 1$ sein.

(b) Setzen wir $a = b = 1$ so ist

$$\exp\, 2 = \exp\,(1+1) = e^1\, e^1 = e\, e = e^2$$

und ebenso gilt (Beweis durch Induktion)

$$\exp\,(nx) = (e^x)^n$$

(c) Setzen wir $a = b = 1/2$ so ist

$$e = e^{1/2+1/2} = \left(e^{1/2}\right)^2$$

und somit

$$e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Ebenso zeigt man, dass

$$e^{1/n} = \sqrt[n]{e}$$

(d) Mit der selben Ideen kann man den Wert von $e^{n/m}$ bestimmen für beliebige ganzzahlige n und $m \neq 0$. Somit ist die Funktion $y = e^x$ bestimmt für rationale Argumente x.

(e) Ebenso kann man zeigen, dass

$$e^{x \cdot y} = (e^x)^y = (e^y)^x$$

für rationale Werte von x und y. Es ist eine Tatsache, dass diese Eigenschaft für alle $x, y \in \mathbb{R}$ richtig ist.

$\diamondsuit$

Der Abbildung 5.1 kann entnommen werden, dass die Funktion $y = e^x$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist und somit invertierbar, wobei der Definitionsbereich der inversen Funktion gegeben ist durch das Bild $\mathbb{R}_+$ der ursprünglichen Funktion.

5–3 Definition : Die (natürliche) **Logarithmus**–Funktion $\ln(x)$ ist definiert als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion e^x. Somit gelten die beiden charakterisierenden Eigenschaften

$$\ln\, e^x = x \quad \text{und} \quad e^{\ln\, x} = x$$

und wegen $e^0 = 1$ gilt $\ln 1 = 0$.

Der Graph von $\ln(x)$ kann durch Spiegelung der Graphen von $y = e^x$ an der Geraden $x = y$ erzeugt werden und ist gegeben in Abbildung 5.2.

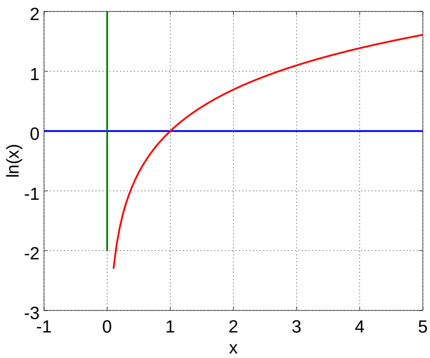


Abbildung 5.2: Graph von $f(x) = \ln(x)$

5–4 Satz : *Für $x, y > 0$ gilt*

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Beweis : Der Beweis beruht auf der entsprechenden Eigenschaft der Exponentialfunktion.

$$\begin{aligned} \ln(x \cdot y) &= \ln\left(e^{\ln x} e^{\ln y}\right) \\ &= \ln\left(e^{\ln x + \ln y}\right) \\ &= \ln(x) + \ln(y) \end{aligned}$$

□

5–5 Beispiel : Um die Gleichung

$$2e^{4x} - 3e^{2x} - 5 = 0$$

nach x aufzulösen, setzen wir $z = e^{2x}$ und erhalten die neue Gleichung

$$2z^2 - 3z - 5 = 0$$

mit den Lösungen $z_1 = 2.5$ und $z_2 = -1$. Da e^{2x} sicher positiv ist, führt z_2 zu keiner (reellen) Lösung für x. Aus $z_1 = 2.5$ erhalten wir

$$x = \frac{1}{2}\, \ln\, 2.5 \approx 0.4581$$

♢

5.1.2 Erste Anwendungen

5–6 Beispiel : Radioaktiver Zerfall
Aufgrund von Beobachtungen geht man davon aus, dass für $N(t)$ Atome eines zerfallenden Stoffes die Anzahl ΔN der Zerfälle in einem kleinen Zeitintervall Δt gegeben ist durch $\Delta N = -k\,N\,\Delta t$. Daraus ergibt sich eine Differentialgleichung mit der Lösung

$$N(t) = N\,(0)\;e^{-k\,t}$$

Die **Halbwertszeit** T ist definiert durch die Beziehung $e^{-k\,T} = \frac{1}{2}$, oder auch $e^{k\,T} = 2$. Mit der Logarithmusfunktion heisst dies: $T = \frac{1}{k}\,\ln 2$.

Von einer gewissen Substanz zerfallen in 100 Jahren 10% der Substanz. Bestimmen Sie die Halbwertszeit.
Antwort: T= 658 Jahre ♢

5–7 Beispiel : Newtonsches Abkühlungsgesetz
Ein Körper der Temperatur $T(t)$ wird in ein Medium der Temperatur $U(t)$ eingetaucht. Für die Temperaturdifferenz $P(t) := T(t) - U(t)$ fand Isaac Newton[1] (in zahlreichen Versuchen)

$$\frac{d\,P}{dt} = -\lambda\,P$$

„Die Abkühlgeschwindigkeit ist proportional zur Temperaturdifferenz“. Dies ist eine Differentialgleichung mit der Lösung $P(t) = P(0)\,e^{-\lambda t}$ oder

$$T(t) - U(t) = (T(0) - U(0))\;\;e^{-\lambda t}$$

Der Körper ist ursprünglich auf einer Temperatur von 180° und die Temperatur eines Wasserbades wird konstant auf 60° gehalten. Eine Minute nach dem Eintauchen hat der Körper noch eine Temperatur von 120°. Wann wird der Körper die Temperatur von 90° erreichen?
Antwort: nach 2 Minuten. ♢

5–8 Beispiel : Exponentielle Sättigung
Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich für die Stromstärke $I(t)$ beim Einschalten eines Gleichstroms die Beziehung

$$L\,\frac{d\,I}{dt} + I\,R = E$$

mit dem Anfangswert $I(0) = 0$. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch

$$I(t) = \frac{E}{R}\;\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\,t}\right)$$

Wählen Sie $L = 3$ H, $R = 30$ Ohm und legen Sie eine Spannung von $E = 150$ V an. Bestimmen Sie den Strom nach 0.01 Sekunden.
Antwort: $I(0.1) = 0.476$ A ♢

Die obigen drei typischen Beispiele zeigen, dass Exponentialfunktionen oft als Lösungen von **Differentialgleichungen** auftreten. Das ist das hauptsächliche Anwendungsgebiet der Exponentialfunktionen.

[1]Sir Isaac Newton (1642–1727), englischer Physiker, Mathematiker und Astronome

5–9 Beispiel : Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$ wird auch **Gauss'sche**[2] **Glockenkurve** genannt und ist gegeben in Abbildung 5.3. Die Graphik wurde erzeugt durch

Octave

```
1; %% this is a scipt file , not a function file
function y = gauss(x)
  y = 1/sqrt(2*pi)*exp(-x.^2/2);
endfunction

x = linspace(-3,3,301);
plot(x,gauss(x))
axis([-3,3,0,0.5])
grid on
xlabel('x');   ylabel('gauss(x)')
```

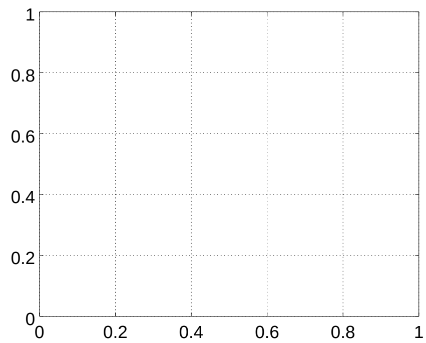


Abbildung 5.3: Gausssche Glockenkurve

Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ist so gewählt, dass die gesamte Fläche unter der Kurve 1 ist. Diese Kurve spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik eine wichtige Rolle. Sind die Messungen an einem Experiment normalverteilt mit Mittelwert x_0 und Standardabweichung σ, so ist die Verteilung gegeben durch

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \exp(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2})$$

$\diamondsuit$

5.2 Exponential– und Logarithmusfunktion mit beliebiger Basis

Sei $a > 0$ eine reelle Zahl, die uns nun als **Basis** dienen wird. Dann ist der Ausdruck a^x gegeben durch

5–10 Definition :

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Daraus lassen sich alle wichtigen Rechenregeln ableiten.

[2] Carl Friedrich Gauss (1777—1855), einer der besten und wichtigsten Mathematiker

5–11 Satz : *Für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

(a)

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a}\; e^{y\ln a} = a^x\; a^y$$

(b)

$$a^0 = e^{0\ln a} = e^0 = 1$$

(c)

$$a^{-x} = e^{-x\ln a} = \frac{1}{e^{x\ln a}} = \frac{1}{a^x}$$

(d)

$$(a^x)^y = e^{(y\cdot\ln(a^x))} = \exp\left(y\cdot\ln e^{x\ln a}\right) = \exp\left(y\cdot x\ln a\right) = a^{x\cdot y}$$

5–12 Beispiel : Die Graphen von

$$y = e^x \quad \text{und} \quad y = a^x = e^{x\ln a}$$

unterscheiden sich nur durch den Skalierungsfaktor $\ln a$ in der x–Richtung. Dies wird durch Abbildung 5.4 für $a = 5$ ($\ln a = \ln 5 \approx 1.6$) illustriert.

Octave

```
x = linspace(-2,4,2001);
plot(x,exp(x), x, 5.^x)
xlabel('x'); grid on
axis([-2,4,0,40])
legend("exp(x)","5^x","location","northwest")
```

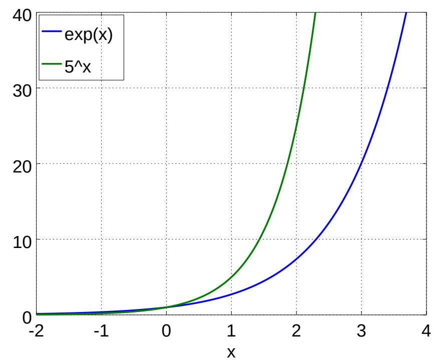


Abbildung 5.4: Graphen von $y = e^x$ und $y = 5^x$

$\diamondsuit$

Für $a > 1$ ist die Funktion $f(x) = a^x$ strikt monoton wachsend, mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und Bild $\mathbb{R}_+$. Somit ist sie auch invertierbar. Das führt auf

5–13 Definition : Die Funktion $\log_a(x)$ ist die Umkehrfunktion der Funktion a^x und somit charakterisiert durch die Eigenschaften

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{und} \quad a^{\log_a(x)} = x$$

Die folgenden Eigenschaften und Rechenregeln ergeben sich aus dieser Definition.

5–14 Satz :

(a)

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a\left(a^{\log_a x}\, a^{\log_a y}\right) = \log_a\left(a^{\log_a x + \log_a y}\right) = \log_a\left(a^{(x+y)\, \log_a}\right) = \log_a x + \log_a y$$

(b)

$$\log_a 1 = 0 \quad \textit{und} \quad \log_a a = 1$$

Aus den Graphen von e^x und a^x in Abbildung 5.4 kann man die Eigenschaften in Tabelle 5.1 ablesen.

a	Funktion	Definitionsbereich	Bild	Monotonie
	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	wachsend
	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$	wachsend
$a > 1$	a^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	wachsend
$a > 1$	$\log_a x$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$	wachsend
$0 < a < 1$	a^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	fallend
$0 < a < 1$	$\log_a x$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$	fallend

Tabelle 5.1: Eigenschaften der Exponential- und Logarithmusfunktionen

Auf den meisten Taschenrechnern sind die Logarithmusfunktionen mit beliebiger Basis nicht fest programmiert. Dem kann aber leicht abgeholfen werden.

5–15 Satz : *Es gilt*

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Beweis : Aus den bekannten Rechenregeln folgt

$$a^{\ln x/\ln a} = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln a}\, \ln a\right) = e^{\ln x} = x$$

somit ist $\frac{\ln x}{\ln a}$ auch eine Umkehrfunktion von a^x. Da es aber nur eine Umkehrfunktion (eventuelle verschiedene Formlen) geben kann, muss die Behauptung $\log_a x = \ln x/\ln a$ richtig sein. □

Aufgrund der beiden Eigenschaften

$$a^x = e^{x\, \ln a} \quad \text{und} \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

genügt es, in einer Programmiersprache (z.B. Taschenrechner) die beiden Funktion $e^x = \exp x$ und $\ln(x)$ zur Verfügung zu stellen. Exponential– und Logarithmusfunktionen mit anderer Basis können hiermit leicht berechnet werden. Sehen Sie sich hierzu Aufgabe 5–20 an.

5.3 Hyperbolische Funktionen

Die hyperbolischen Funktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ sind unbedingt mit den trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ zu vergleichen. Viele Resultate sind ähnlich. Diese engen Beziehungen werden klar, falls man die Reihenentwicklungen der Funktionen ansieht oder komplexe Zahlen einsetzt. Wir werden später auf diesen Punkt zurückkommen.

5.3.1 Definition und elementare Eigenschaften

Die **hyperbolischen Funktionen** sind gegeben durch

5–16 Definition :

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \tfrac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})\\ \sinh(x) &= \tfrac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})\end{aligned}$$

Diese einfachen Kombinationen aus e^x und e^{-x} haben ihrer praktischen Bedeutung wegen einen eigenen Namen bekommen.

Die folgenden Resultate können in Abbildung 5.5 verifiziert werden.

Octave

```
x = linspace(-2,2.5,2001);
plot(x,cosh(x), x, sinh(x))
xlabel('x'); grid on
axis([-2,2.5,-2,5]); axis('equal')
legend("cosh(x)","sinh(x)","location","northwest")
```

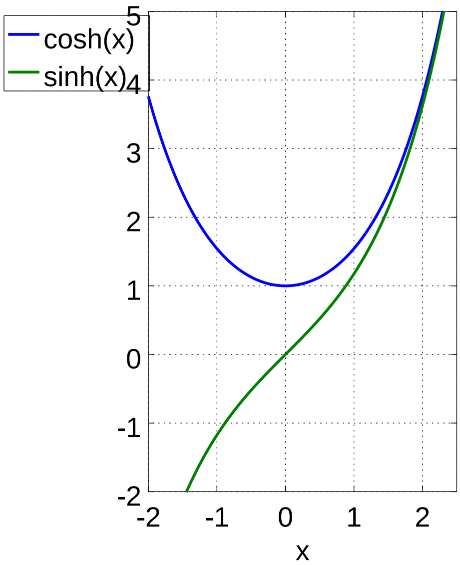


Abbildung 5.5: Graphen von $\cosh x$ und $\sinh x$

5–17 Satz : *Es gelten die folgenden Rechenregeln.*

(a)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Diese Eigenschaft ist analog zum Satz von Pythagoras $\cos^2\ x + \sin^2\ x = 1$ *für die trigonometrischen Funktionen.*

(b)

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$

d.h. $\cosh(x)$ *ist eine gerade Funktion.*

(c)

$$\sinh(-x) = -\sinh(x)$$

d.h. $\sinh\ x$ *ist eine ungerade Funktion.*

(d) $\sinh(x)$ *ist streng monoton wachsend.*

(e)

$$\cosh 0 = 1 \quad \textit{und} \quad \sinh 0 = 0$$

(f) Für $x >> 1$ *gilt*

$$\cosh(x) \approx \sinh(x) \approx \frac{1}{2}\ e^x$$

und für $x << -1$ *gilt*

$$\cosh(x) \approx \frac{1}{2}\ e^{-x} \quad \textit{und} \quad \sinh(x) \approx \frac{-1}{2}\ e^{-x}$$

Beweis : Alle Resultate werden mit dem selben Rechenschema verifiziert.

1. Übersetzen in Exponentialfunktionen
2. Verwenden der Eigenschaften der Funktion e^x
3. Zurückübersetzen

(a)

$$\begin{aligned} 4\left(\cosh^2 x - \sinh^2 x\right) &= \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2 \\ &= e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x} = 4 \end{aligned}$$

(b)

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}\ \left(e^{-x} + e^{+x}\right) = \frac{1}{2}\ \left(e^{x} + e^{-x}\right) = \cosh\ x$$

(c)

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\ \left(e^{-x} - e^{+x}\right) = \frac{-1}{2}\ \left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\sinh\ x$$

(d) e^x und $-e^{-x}$ sind streng monoton wachsend und somit auch $\sinh\ x$.

(e)

$$\cosh\ 0 = \frac{1}{2}\ \left(e^0 + e^0\right) = 1 \quad \text{und} \quad \sinh 0 = \frac{1}{2}\ \left(e^0 - e^0\right) = 0$$

(f) Verwende $e^{-x} \approx 0$ für $x >> 1$.

□

5.3.2 Kettenlinie

5–18 Problem : Kettenlinie
Die Höhe eines frei hängenden Kabels über Boden ist gegeben durch die Funktion

$$y(x) = \frac{H}{\rho g}\ \cosh\left(\frac{\rho g}{H}(x - x_0)\right) + h$$

wobei

x_0	horizontale Koordinate des tiefsten Punktes
ρ	spezifische Masse des Kabels, in $[kg\ m^{-1}]$
H	Seilspannung beim tiefsten Punkt in $[N] = [kg\ m\ s^{-2}]$
	oder auch Horizontalkomponente der Spannungskraft
h	geeignet zu wählende konstante Höhe
g	Gravitationskonstante $\approx 9.81[\frac{m}{s^2}]$

Deshalb werden Kurven dieser Art auch **Kettenlinien** oder **Katenoide** genannt..

Von einem hängenden Kabel seien die folgenden Daten bekannt:

1. Bei $x = 0$ ist das Kabel auf einer Höhe von 2 befestigt
2. Bei $x = 5$ berührt das Kabel den horizontalen Boden.

Zu bestimmen sind

(a) Die Konstante $\lambda = \rho g/H$.

(b) Die Höhe des Seils bei $x = 15$.

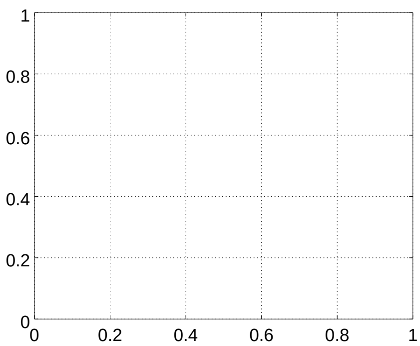


Abbildung 5.6: Kettenlinie

Lösung: Aufgrund der zweiten Bedingung und $\cosh(0) = 1$ weiss man, dass $x_0 = 5$, und wir suchen somit λ in der Funktion

$$y\,(x) = \frac{1}{\lambda}\ (\cosh\left(\lambda\,(x - 5)\right) - 1)$$

setzen wir $x = 0$ ein, so ist die Gleichung

$$\lambda\ 2 = (\cosh\left(\lambda\, 5\right) - 1)$$

nach λ aufzulösen. Ein Vergleich der Graphen von $2\,\lambda$ und $\cosh(5\,\lambda) - 1$ (mit λ als unabhängiger Variablen) mit dem „richtigen“ Bereich zeigt, dass es genau eine Lösung gibt. Leider kann diese Gleichung nicht mit elementaren Methoden gelöst werden.

Wir wollen die Grössenordnung des Wertes von λ abschätzen. Hierzu denken wir uns ein Seil mit einem angenommenen Wert von $\rho = 1\,\frac{kg}{m}$, das im tiefsten Punkt an einer Mauer befestigt ist und in einer Entfernung von 5 m auf einer Höhe von 2 m befestigt ist. Nun sollte die Kraft auf die Befestigung im tiefsten Punkt geschätzt werden. Eine mögliche Schätzung ist $h \approx 100\,N$ (das entspricht dem Halten eines Gewichtes von 10 kg). Dies führt auf die Schätzung vom $\lambda = \frac{\rho g}{H} \approx 0.1\ [1/m]$. Dieser Wert kann als Startwert fär das Newtonverfahren verwendet werden. Eine Rechnung mit dem Taschenrechner oder der Methode von Newton zeigt, dass

$$\lambda \approx 0.152471\ [\frac{1}{m}]$$

Octave berechnet das Resultat mittels

Octave
```
1; %% force a script file
function z = h(la)
  z = 2*la-cosh(5*la)+1;
endfunction

la_opt = fsolve("h",0.1)
-->
la_opt =  0.15247
```

Die zweite Teilaufgabe ist nun leicht zu lösen, z.B. durch

Octave
```
x = linspace(0,15);
plot(x,1/la_opt * (cosh(la_opt*(x-5))-1))
axis([0,15 0 10])
xlabel("position x"); ylabel(" height h")
grid on

h15 = 1/la_opt * (cosh(la_opt*(15-5))-1)
-->
h15 =  9.2198
```

Somit ist bei $x = 15\,m$ das Kabel auf einer Höhe von ca. $9.22\,m$, und die Form des Kabel ist gegeben durch Abbildung 5.6.

Die Aufgabe 5–22 ist ähnlich zur obigen Aufgabe.

5.3.3 Additionstheoreme und inverse Funktionen

Für die trigonometrischen Funktionen sin und cos gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

Ein vergleichbares Resultat ist auch für die hyperbolischen Funktionen richtig.

5–19 Satz : *Es gilt*

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

Beweis : Wir beweisen nur die erste Identität. Es geht darum, die Eigenschaft $e^{x+y} = e^x e^y$ geschickt auszunutzen. Der Beweis des Resultates für $\cosh(x+y)$ folgt dem selben Schema, es sind nur einige Vorzeichen zu ändern.

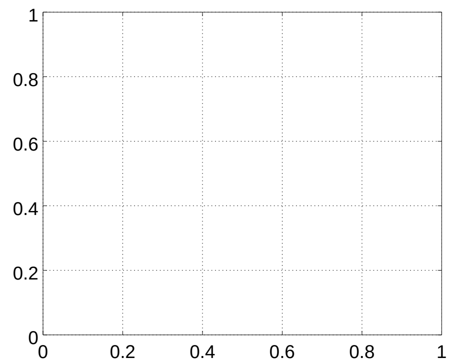
$$\begin{aligned} 4\ \sinh x \cosh y + 4\ \cosh x \sinh y &= \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^y + e^{-y}\right) + \left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^y - e^{-y}\right) \\ &= e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y} \\ &\quad + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y} \\ &= 2\ \left(e^{x+y} - e^{-x-y}\right) \\ &= 4\ \sinh\left(x+y\right) \end{aligned}$$

□

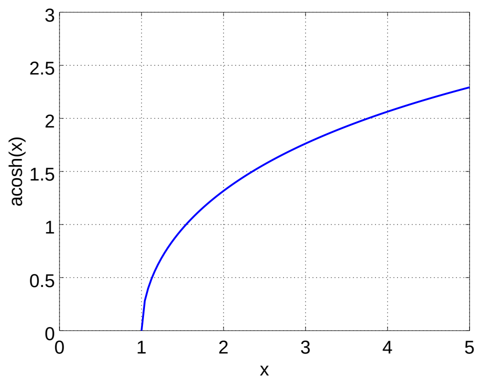
Genau wie die trigonometrischen Funktion gibt es auch für die hyperbolischen Funktionen die zugehörigen inversen Funktionen. Dazu sollte man sich die Graphen von $\sinh$ und $\cosh$ in Abbildung 5.5 genau betrachten.

Die Funktion $\sinh(x)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und Bild $\mathbb{R}$ ist strikt monoton wachsend und surjektiv, folglich invertierbar. Der Graph der inversen Funktion entsteht durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ und ist gegeben in Abbildung 5.7(a). Die fundamentale Eigenschaft dieser Funktion ist

$$y = \text{Arsinh}(x) = \sinh^{-1}\ x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sinh\ y$$



(a) Arsinh(x)



(b) Arcosh(x)

Abbildung 5.7: Graphen der Funktionen $y = \text{Arsinh}(x) = \sinh^{-1}(x)$ et $y = \text{Arcosh}(x) = \sinh^{-1}(x)$

Die Funktion $\cosh(x)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ist **nicht** invertierbar, da es eine gerade Funktion ist. Schränkt man aber den Definitionsbereich ein auf $[0, \infty)$, so ergibt sich das Bild $[1, \infty)$, und diese eingeschränkte $\cosh$–Funktion ist invertierbar mit dem Graphen der inversen Funktion $y = \text{Arcosh}(x)$ gegeben in Abbildung 5.7(b). Die fundamentale Eigenschaft dieser Funktion ist

$$y = \text{Arcosh}(x) = \cosh^{-1}\ x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \cosh(y)$$

Diese Funktionen werden auch **Areafunktionen** genannt. Die Bezeichnung *area* (Fläche) hängt mit der geometrischen Interpretation der Funktionen als Flächen von Hyperbelsektoren zusammen (siehe z.B. Wikipedia oder [Bron93]). Die Symmetrie– und Monotonieeigenschaften der hyperbolischen Funktionen sind in der Tabelle 5.2 zusammengestellt.

Funktion	Definitionsbereich	Bild	Symmetrie	Monotonie
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$		wachsend
$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ungerade	wachsend
$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$[1,\infty)$	gerade	
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$		wachsend
$\sinh^{-1}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ungerade	wachsend
$\cosh^{-1}(x)$	$[1,\infty)$	$[0,\infty)$		wachsend

Tabelle 5.2: Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen

5.4 Logarithmische Skalen

- Gilt für zwei Grössen x und y die Beziehung $y = c\ a^x$, so ergibt dies eine Exponentialfunktion als Graph. Man kann aber auch die „neue“ Beziehung

  $$\log y = \log c + \log a^x = \log c + x \log a$$

  betrachten. Trägt man nun $\log y$ als Funktion von x auf, so führt dies zu einer Geraden als Graphen. Die Basis a der Exponentialfunktion bestimmt die Steigung der Geraden.

- Gilt für zwei Grössen x und y die Beziehung $y = c\ x^a$, so ergibt dies eine Potenzfunktion als Graph. Man kann aber auch die „neue“ Beziehung

  $$\log y = \log c + \log x^a = \log c + a \log x$$

  betrachten. Trägt man nun $\log y$ als Funktion von $\log x$ auf, so führt dies zu einer Geraden als Graphen. Die Basis a der Exponentialfunktion ist gleich der Steigung der Geraden.

Diese beiden Überlegungen kann man zusammenfassen.

5–20 Satz : *Logarithmische Skalen*

(a) Verwendet man auf der Ordinate eine logarithmische Skala und auf der Abszisse eine lineare Skala so werden die Graphen von Exponentialfunktionen ($y = c\,a^x$) zu Geraden.

(b) Verwendet man auf der Ordinate und Abszisse eine logarithmische Skala so werden die Graphen von Potenzfunktionen ($y = c\,x^a$) zu Geraden.

Trägt man auf einer Achse den Wert $20\ \log(y)$ statt y auf, so spricht man auch von einer **Dezibelskala**.

5–21 Beispiel : Entladen eine Kapazität

Entlädt sich ein Kondensator mit Kapazität C über einen Widerstand R, so gilt für die Spannung $u(t)$ über dem Kondensator die Gleichung

$$u(t) = u(0)\ e^{\frac{-t}{RC}}$$

Berechnen wir den natürlichen Logarithmus beider Seiten dieser Gleichung, so ergibt sich

$$\ln(u(t)) = \ln(u(0)) - \frac{t}{RC}$$

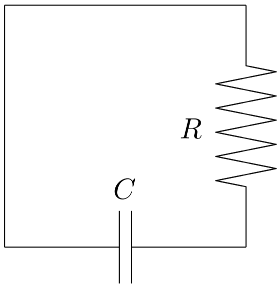


Abbildung 5.8: RC–Glied

Tragen wir also auf der Ordinate $\ln(u)$ auf und t auf der Abszisse, so ergibt sich eine Gerade mit Steigung $\frac{-1}{RC}$ und Ordinatenschnittpunkt bei $\ln(u(0))$.

Wenden wir die Funktion $\log = \log_{10}$ auf beide Seiten dieser Gleichung an, so ergibt sich

$$\log(u(t)) = \log(u(0)) - \frac{1}{\ln 10}\,\frac{t}{RC} = \log(u(0)) - \log e\,\frac{t}{RC}$$

Tragen wir also auf der Ordinate $\log\, u$ auf und t auf der Abszisse, so ergibt sich eine Gerade mit Steigung $\frac{-\log\, e}{RC} = \frac{-1}{RC\,\ln 10}$ und Ordinatenschnittpunkt bei $\log(u(0))$.

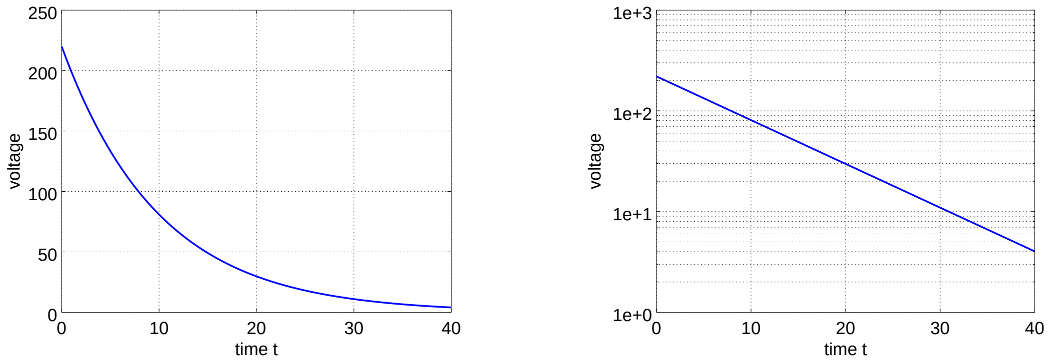


Abbildung 5.9: Linearer und logarithmischer Plot der Spannung an einem RC–Glied

In Abbildung 5.9 kann man versuchen, den Wert des Produktes RC abzulesen. Die Graphen wurden erzeugt mit *Octave*.

Octave

```
RC = 10.0; u0 = 220;
t = linspace(0,40);
figure(1);
plot(t,u0*exp(-t/RC))
grid on
xlabel("time t"); ylabel("voltage")
figure(2);
semilogy(t,u0*exp(-t/RC))
grid on
xlabel("time t"); ylabel("voltage")
```

◇

5–22 Beispiel : Ein mechanisches System

Die Differentialgleichung eines Federsystems mit Masse m, Federkonstante k, Dämpfungsfaktor μ und externer Kraft $f(t)$ ist gegeben durch

$$m\,\ddot{y} + \mu\,\dot{y} + k\,y = f(t)$$

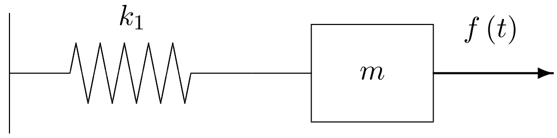


Abbildung 5.10: Eine Feder mit angehängter Masse

Durch Lösen dieser Differentialgleichung erhält man eine Verstärkungsfaktor für die Amplitude von

$$r(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \mu^2\omega^2}}$$

d.h. es gilt für $f(t) = A\,\cos(\omega t)$ gilt

$$y(t) = r(\omega)\;A\,\cos(\omega\,t + \phi)$$

- Für $0 < \omega$ klein gilt
$$r(\omega) \approx \frac{1}{k}$$
- Für sehr grosse $0 < \omega$ gilt
$$r(\omega) \approx \frac{1}{\omega^2 m}$$
und somit
$$\log r(\omega) \approx -2\log\omega - \log m$$
d.h. mit den logarithmischen Skalen in einem Bode–Plot müsste dies eine Gerade mit negativer Steigung ergeben. Die Rechnung an einem Beispiel bestätigt dieses Resultat.

Wir rechnen das Beispiel $k = 10$, $\mu = 2.5$ und $m = 1$. Somit ist für kleine ω der Verstärkungsfaktor gegeben durch $r \approx 1/k = 1/10$. Da auf der Ordinate eine Dezibelskala verwendet wird ist $20 \cdot \log r \approx -20\log 10 = -20$ zu erwarten, was durch Abbildung 5.11 bestätigt wird.

Um die Steigung für grosse Werte von ω zu bestätigen, müssen wir vorsichtiger vorgehen. Dazu betrachten wir die Werte für $\log\omega = 1/2$ (d.h $\omega = \sqrt{10} \approx 3.2$) und $\log\omega = 1$ (d.h. $\omega = 10$). Die Werte der Ordinate gehen in diesem Bereich von -18 zu -39. Somit lesen wir in Graphen eine Steigung von $\frac{-39+18}{1-1/2} = -42$ ab. Die Dezibelskala auf der Ordinate führt zu einem Faktor 20 für die Steigung und somit erhalten wir für eine reine log–log–Skala eine Steigung von $\frac{-42}{20} \approx -2$, wie es für unser Zahlenbeispiel sein sollte.

Unten finden Sie den Code in *Octave* um Abbildung 5.11 zu erzeugen.

Octave

```
m  = 1 ; nu = 2.5; k  = 10;
w = logspace(-1,1,100);
[amp,phase] = bode([1],[m,nu,k],w);
amp = 20*log10(amp);
semilogx(w,amp)
grid on
grid("minor")
title("Spring Mass System, Amplification Factor")
```

◇

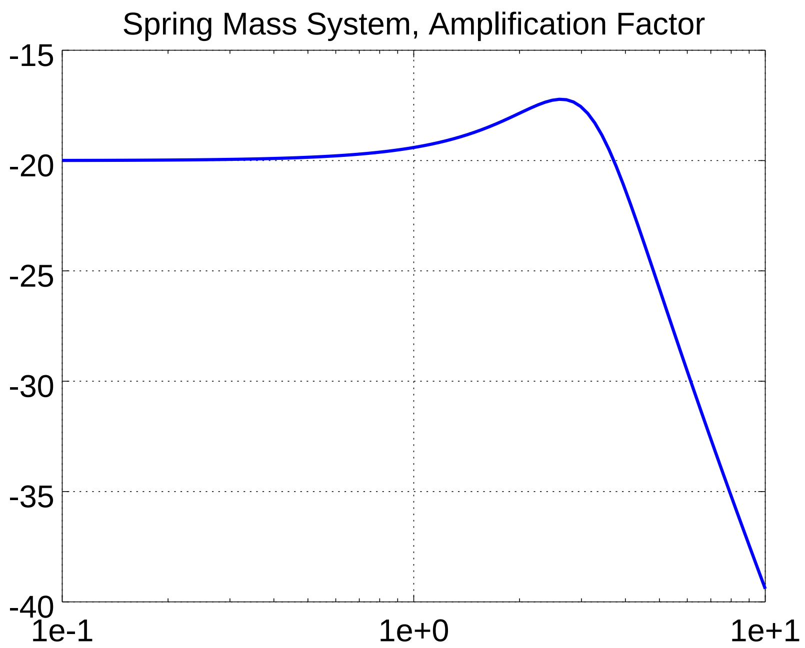
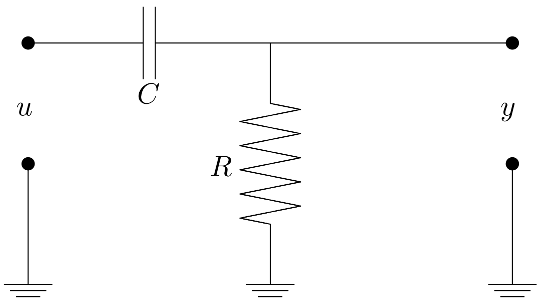


Abbildung 5.11: Bodeplot des Verstärkungsfaktors eines Federsystems

5.4.1 Ein Hochpass Filter

Betrachte den elementaren Schaltkreis



Für den Strom I durch die Kapazität C gilt:

$$I = C\,\frac{d}{dt}\,(u-y) = \frac{y}{R}$$

Dies führt zur linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung für die Ausgangsspannung $y(t)$

$$\dot y(t) + \frac{1}{RC}\,y(t) = \dot u(t)$$

mit der gegebenen Eingangsspannung $u(t) = e^{i\,\omega\,t}$. Dies führt zu

$$y(t) = \frac{i\,\omega\,RC}{i\,\omega\,RC+1}\,e^{i\,\omega\,t}$$

Der Verstärkungsfaktor ist somit

$$A(\omega) = \left|\frac{i\,\omega\,RC}{i\,\omega\,RC+1}\right| = \frac{\omega\,RC}{\sqrt{\omega^2\,(RC)^2+1}}$$

Nun gilt es diese Funktion sorgfältig zu untersuchen.

- $0 < \omega \ll 1/RC$: in diesem Bereich gilt $\omega^2\,(RC)^2 \ll 1$ und somit

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx \omega\, RC \\ 20\,\log A(\omega) &\approx 20\,\log \omega + 20\,\log(RC) \end{aligned}$$

  In einer Graphik mit logarithmischer Skala für ω (Basis 10) ($x = \log(\omega)$) und Dezibel Skala ($y = 20\,\log(A)$) für den Verstärkungsfaktor ergibt sich somit eine Gerade $y = 20\,x + 20\,\log(RC)$ mit Steigung $+20$ und Achsenabschnitt ($x = \log\omega = 0 \iff \omega = 1$) auf der Höhe $y = 20\,\log(RC)$. Somit liegt der Schnittpunkt mit der logarithmischen ω–Achse bei $\log(A) = 0$, d.h. $A = 1$ und somit bei $\omega = \frac{1}{RC}$.

- $1/RC \ll \omega$: in diesem Bereich gilt $\omega^2\,(RC)^2 \gg 1$ und somit

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx \frac{\omega\, RC}{\sqrt{\omega^2\,(RC)^2}} = 1 \\ 20\,\log A(\omega) &\approx 0 \end{aligned}$$

- $\omega = 1/RC$: für diesen Wert von ω gilt $\omega^2\,(RC)^2 = 1$ und somit

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 20\,\log A(\omega) &\approx 20\,\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -10\,\log 2 \approx -3.0103 \approx -3 \end{aligned}$$

  Man spricht vom **3-db Punkt** . Für diese Frequenz wird die Amplitude des Signals um den Faktor $\sqrt{2}$ verkleinert, die Leistung somit halbiert.

Für die Elemente

$$R = 10\;k\Omega \quad \text{und} \quad C = 22\mu F$$

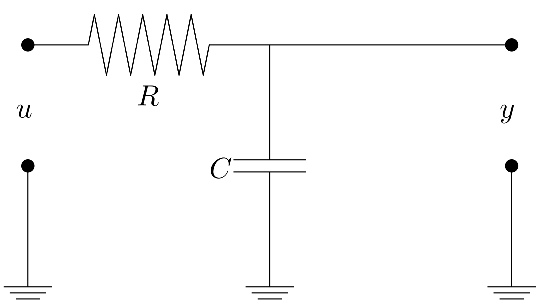
können wir nun die Bode–Plots für den Verstärkungsfaktor erstellen. Man erhält die Abbildung 5.12. Der **3-db Punkt** sollte bei $\omega = 1/RC \approx 4.5$ liegen. Dies wird durch die Graphik bestätigt, da $\log 4.5 \approx 0.66$.

Octave

```
R = 10^4; C = 22*10^(-6);
w = logspace(-2,4.5,100);
[amp,phase] = bode([R*C,0],[R*C,1],w);
amp = 20*log10(amp);
semilogx(w,amp)
grid on
title("Highpass-Filter , Amplitude")
axis([0.01,10000,-60,10])
```

5.4.2 Ein Tiefpass Filter

Betrachte den Schaltkreis



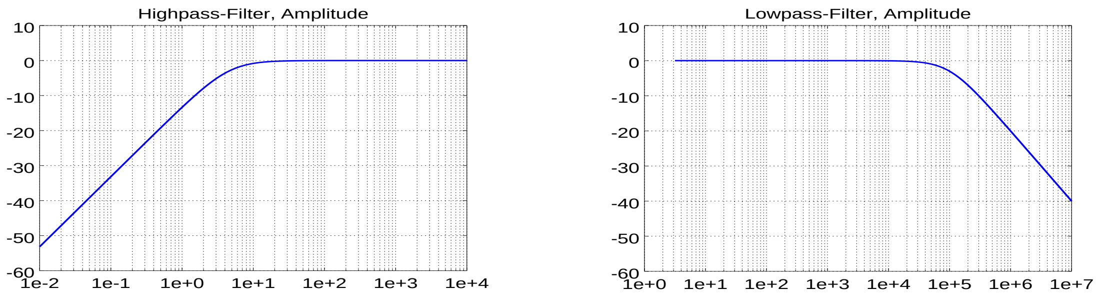


Abbildung 5.12: Amplitudenplot eines Hochpass–Filters und eines Tiefpass–Filters

Für den Strom I durch die Kapazität C gilt:

$$C\,\frac{d}{dt}\,y = \frac{u-y}{R}$$

Dies führt zur linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung für die Ausgangsspannung $y(t)$

$$RC\,\dot y(t) + y(t) = u(t) = e^{i\,\omega\,t}$$

mit der gegebenen Eingangsspannung $u(t) = e^{i\,\omega\,t}$. Dies führt zu

$$y(t) = \frac{1}{i\,\omega\,RC+1}\,e^{i\,\omega\,t}$$

Der Verstärkungsfaktor ist somit

$$A(\omega) = \left|\frac{1}{i\,\omega\,RC+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\,(RC)^2+1}}$$

Nun gilt es diese Funktion sorgfältig zu untersuchen.

- $0 < \omega \ll 1/RC$: in diesem Bereich gilt $\omega^2\,(RC)^2 \ll 1$ und somit

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx 1 \\ 20\,\log A(\omega) &\approx 0 \end{aligned}$$

- $1/RC \ll \omega$: in diesem Bereich gilt $\omega^2\,(RC)^2 \gg 1$ und somit

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx \frac{1}{\omega\,RC} \\ 20\,\log A(\omega) &\approx -20\,\log\omega - 20\,\log(RC) \end{aligned}$$

  In einer Graphik mit logarithmischer Skala für ω (Basis 10) $x = \log\omega$) und Dezibel Skala $y = 20\,\log A$) für den Verstärkungsfaktor ergibt sich somit eine Gerade $y = -20\,x - 20\,\log(RC)$ mit Steigung -20 und Achseabschnitt ($x = \log\omega = 0 \iff \omega = 1$) auf der Höhe $z = -20\,\log(RC)$. Somit liegt der Schnittpunkt mit der logarithmischen ω–Achse bei $\log(A) = 0$, d.h. $A = 1$ und somit bei $\omega = \frac{1}{RC}$.

- $\omega = 1/RC$: für diesen Wert von ω gilt $\omega^2\,(RC)^2 = 1$ und somit

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 20\,\log A(\omega) &\approx 20\,\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -10\,\log 2 \approx -3.0103 \approx -3 \end{aligned}$$

  Man spricht vom **3-db Punkt** . Für diese Frequenz wird die Amplitude des Signals um den Faktor $\sqrt{2}$ verkleinert, die Leistung somit halbiert.

Für die Elemente

$$R = 1\,k\,\Omega \quad \text{und} \quad C = 10\,nF$$

können wir nun die Bode–Plots für den Verstärkungsfaktor erstellen. Man erhält die Abbildung 5.12. Der **3-db Punkt** sollte bei $\omega = 1/RC \approx 10^5$ liegen. Dies wird durch die Graphik bestätigt.

Octave

```
R = 10^3; C = 10^(-8);
w = logspace(0.5,7,100);
[amp,phase] = bode([1],[R*C,1],w);
amp = 20*log10(amp);

semilogx(w,amp)
grid on
axis([1,10^7,-60,10])
title("Lowpass-Filter, Amplitude")
```

5.5 Aufgaben

5.5.1 Lösen von Gleichungen

• Aufgabe 5–1:
Lösen Sie die folgenden Gleichungen auf nach x.

(a)

$$p^{3x+5} = p^{2x+1}$$

(b)

$$\sqrt[x-2]{u^{2x-1}} = \sqrt[x+1]{u^{x-3}}$$

(c)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

(d)

$$\sqrt[x]{4360.2} = 0.0011$$

(e)

$$\left(\frac{3}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x+1}$$

(f)

$$100^{1/x} = 36.63^{1/25}$$

(g)

$$2^x - 3^{x+1} = 2^{x+2} - 3^{x+3}$$

(h)

$$3\,e^{4x} - 2\,e^{2x} = 0$$

Verwenden Sie die Notationen

$$\lg x = \log x = \log_{10} x \quad \text{und} \quad \ln x = \log_e x$$

• Aufgabe 5–2:
Lösen Sie die folgenden Gleichungen auf nach x.

(a)

$$5 - 2\,\log(3\,x) = 12.4$$

(b)

$$\log\sqrt[3]{2\,x} = 0.876$$

(c)

$$\log(2\,x+3) = \log(x-1) + 1$$

(d)

$$5^{\log x} = 2\cdot 3^{\log x}$$

(e)

$$2\,\log(4\,x) - 2\,\log x - 2\,\log 8 = 0$$

(f)

$$\log x - \log a = b$$

• Aufgabe 5–3:

(a) Schreiben Sie den Ausdruck $\log_2 x$ um, so dass nur die natürliche Logarithmusfunktion $\ln x$ verwendet wird.

(b) Es gelte $y = \log_2 x^2$ und $x > 0$. Lösen Sie diese Gleichung auf nach x, wobei im Resultat nur die Funktionen $\ln x$, e^x und algebraische Operationen vorkommen dürfen.

(c) Bestimmen Sie die **exakten** Lösungen der Gleichung

$$e^{6\,x} - e^{3\,x} = 6$$

5.5.2 Funktionen und Graphen

• Aufgabe 5–4:
Skizzieren Sie die Graphen von

(a) $y = e^{-x}$

(b) $y = \frac{1}{e^x}$

• Aufgabe 5–5:
Skizzieren Sie die Graphen von

(a) $y = e^x$

(b) $y = e^{2x}$

(c) $y = e^{x/2}$

in **einem** Bild und vergleichen Sie.

• Aufgabe 5–6:
Skizzieren Sie die Graphen der drei Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \\ f_2(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 2^2}} \\ f_3(x) &= \frac{1}{0.8\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x+2)^2}{2\cdot 0.8^2}} \end{aligned}$$

in einem Bild. Interpretieren Sie das Ergebnis als Messwerte von drei Experimenten. Setzen Sie Taschenrechner oder Computer geeignet ein.
Tipp: Gausssche Glockenkurve und Koordinatentransformationen.

• Aufgabe 5–7:
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen und vergleichen Sie.

$$y = 2^x \quad , \quad y = x^2 \quad , \quad y = 2^{-x}$$

• Aufgabe 5–8:
Betrachten Sie die Funktionen

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = x^8 \quad , \quad h(x) = e^x - 1$$

(a) Zeichen Sie die drei Graphen für $0 \leq x \leq 1$ und vergleichen Sie.

(b) Zeichen Sie die drei Graphen für $0 \leq x \leq 10$ und vergleichen Sie.

(c) Zeichen Sie die drei Graphen für $0 \leq x \leq 40$ und vergleichen Sie.

• Aufgabe 5–9:
Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{6x} + 7e^{3x} + 12 = 0$$

keine reellen Lösungen hat.

• Aufgabe 5–10:
Die inversen hyperbolische Funktionen können ersetzt werden durch Ausdrücke die den natürlichen Logarithmus $\ln()$ enthalten.

(a) Lösen Sie die Identität

$$\sinh x = \frac{1}{2}\,\left(e^x - e^{-x}\right)$$

nach e^x auf, um dann $\sinh^{-1} x$ durch $\ln x$ auszudrücken.

(b) Lösen Sie die Identität

$$\cosh x = \frac{1}{2}\,\left(e^x + e^{-x}\right)$$

nach e^x auf, um dann $\cosh^{-1} x$ durch $\ln x$ auszudrücken.

• Aufgabe 5–11:
Verwende die Additionstheoreme für hyperbolische Funktionen, um die folgende Gleichung nach $\cosh(x)$ aufzulösen. Finden Sie dann die Werte für x.

$$\cosh(2x) + \cosh(x) = 3$$

• Aufgabe 5–12:
Betrachten Sie die Gleichung

$$\cosh(2x) - 4\cosh(x) = 0$$

(a) Finden Sie die **exakten** Werte von $\cosh(x)$ der Lösungen der Gleichung.

(b) Finden Sie die x–Werte aller Lösungen der obigen Gleichung.

• Aufgabe 5–13:
Für ein festes $\lambda \neq 0$ seien

$$\begin{aligned} f_1(x) &= A_1\ \cosh(\lambda\, x) \\ f_2(x) &= A_2\ \sinh(\lambda\, x) \\ f(x) &= f_1(x) + f_2(x) \end{aligned}$$

und $|A_1| \neq |A_2|$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ entweder in der Form

$$f(x) = A\ \cosh(\lambda\, x + \varphi)$$

oder in der Form

$$f(x) = A\ \sinh(\lambda\, x + \varphi)$$

geschrieben werden kann.

Bestimmen Sie A und φ, abhängig von A_1 und A_2 in beiden möglichen Fällen.

5.5.3 Anwendungen

• Aufgabe 5–14:
In 50 Jahren zerfallen 1.7% einer Substanz.

(a) Wieviel % der Substanz verbleiben nach 100 Jahren?

(b) Wieviel % der Substanz verbleiben nach 1000 Jahren?

(c) Nach wievielen Jahren sind 10% zerfallen?

• Aufgabe 5–15:
Ein 80° warmes Eisenstück wird in ein Bad eingetaucht, das eine feste Temperatur von 20° hat. Nach 10 Minuten hat sich das Teil auf 60° abgekühlt.

(a) Finden Sie die Temperatur T als Funktion der Zeit t.

(b) Skizzieren Sie den Graphen von $T(t)$ für $0 \leq t \leq 50$.

(c) Durch Wahl einer geeigneten Skala wird der Graph dieser Funktion zu einer Geraden. Finden Sie diese Skala und skizzieren Sie die „neue“ Funktion.

• Aufgabe 5–16:
Ein 100° warmes Teil wird in ein Bad eingetaucht, das eine feste Temperatur von 20° hat. Nach 10 Minuten hat sich das Teil auf 60° abgekühlt.

(a) Finden Sie die Temperatur als Funktion der Zeit.

(b) Finden Sie die Temperatur des Körpers nach 40 Minuten.

(c) Wann wird der Körper die Temperatur von 50° erreichen?

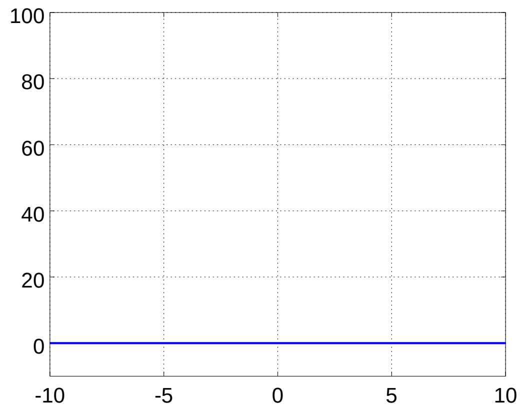
• Aufgabe 5–17:
Ein Thermometer das 15° anzeigt wird in ein 23° warmes Zimmer gebracht. Nach einer Minute zeigt es 19° an. Wie lange dauert es, bis das Thermometer praktisch 23° anzeigt, sagen wir 22.9°?

• Aufgabe 5–18:
Bei einer Aussentemperatur von $-10^\circ\,C$ fällt in einem Wohnhaus die Heizung aus. Nach 10 Minuten wird in der Küche eine Temperatur von 20° gemessen. Nach 30 Minuten ist die Temperatur auf 17° gefallen. Nach wievielen Minuten beginnt das Wasser einzufrieren ($0^\circ\,C$)?

• Aufgabe 5–19:
Untersuchen Sie die Funktion $y = \cosh(x)$ und verwenden Sie

$$\log 2 = \log_{10} 2 \approx 0.3 \quad \text{und/et} \quad \frac{1}{\ln 10} \approx 0.434$$

- Für die y-Achse ist eine Dezibelskala zu verwenden.
- Der Graph ist in der untenstehenden Figur einzuzeichnen.
- Die Werte bei $x = \pm 10$ sind möglichst genau einzuzeichen.
- Die Überlegungen sind zu zeigen.



• Aufgabe 5–20:
Die **FPU** (Floating Point Unit, Gleitkommaarithmetikeinheit) des Intelprozessors 486 verfügt über die Befehle $\log_2 x$ und 2^x. Es stehen auch die üblichen Grundoperationen zur Verfügung, aber keine anderen Exponential– oder Logarithmusfunktionen.

(a) Wie kann man hiermit $\ln x$ und $\log x = \log_{10} x$ für $x \in \mathbb{R}_+$ bestimmen?

(b) Wie kann man hiermit e^x und 10^x für $x \in \mathbb{R}$ bestimmen?

(c) Finden Sie eine passende Formel, um x^y zu bestimmen.

(d) Wieso sind die Konstanten $\log_2 e$, $\ln 2$, $\log_{10} 2$ und $\log_2 10$ fest im Chip abgespeichert und können sehr schnell (zwei Taktzykeln) auf den Stack des numerischen Coprozessors gelegt werden?

(e) Wieso rechnet der 486–er mit der Basis 2?

Kommentar :
Probleme dieser Art treten bei der Programmierung von Mikroprozessoren auf. Die realen Bedingungen bei einem 486-er sind leicht verschieden:

1. Für $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ kann $y \cdot \log_2 x$ direkt berechnet werden.
2. Für $-1 < x < 1$ kann $2^x - 1$ direkt berechnet werden.

Die zweite Einschränkung $-1 < x < 1$ ist praktisch kein grosses Hindernis, da jede Zahl y in der Form $y = n + x$ mit $n \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden kann. Dann berechnet man

$$2^y = 2^{n+x} = 2^n \cdot 2^x = 2^n \cdot (2^x - 1) + 2^n$$

Der numerische Coprozessor berechnet $2^x - 1$, parallel dazu kann 2^n durch Shift–Operationen bestimmt werden. Anschliessend werden die Resultate richtig kombiniert. Für $-1 \leq x \leq 1$ ist $\frac{1}{2} \leq 2^x \leq 2$, und gilt $x \approx 0$, so ist $2^x \approx 1$. Bei direkter Berechnung von 2^x (statt $2^x - 1$) können also einige signifikante Stellen verloren gehen. Deshalb wird im Prozessor der Ausdruck $2^x - 1$ bestimmt, und nicht 2^x. Sehen Sie sich hierzu das folgende Zahlenbeispiel an

$$2^{0.0001} - 2^{0.00005} \approx 1.000069 - 1.0000035 \approx 0.0000034$$

und vergleichen Sie mit

$$(2^{0.0001}-1)-(2^{0.00005}-1)\approx 6.93150\cdot 10^{-6}-3.46574\cdot 10^{-6}\approx 3.46576\cdot 10^{-6}$$

Mit exakter Arithmetik liefern beide Formeln das selbe Ergebnis Rechnet man aber mit einer festen Anzahl von Nachkommastellen, so ist das zweite Resultat wesentlich genauer, obwohl mit der selben Anzahl signifikanter Stellen gerechnet wurde.

• Aufgabe 5–21:
Für die hyperbolischen Funktionen gilt

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y\\ \cosh(x+y) &= \cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y\end{aligned}$$

Verwenden Sie diese Beziehungen und den „Satz von Pythagoras für hyperbolische Funktionen“ um

(a) $\cosh(2\,x)$ als Ausdruck mit $\cosh\,x$ umzuschreiben.

(b) $\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$ als Ausdruck mit $\cosh\,x$ umzuschreiben.

• Aufgabe 5–22:
Die Länge eines Kabels der Form

$$y\,(x)=\frac{H}{\rho g}\,\cosh\left(\frac{\rho g}{H}\,x\right)+h$$

für $0\le x\le L$ ist gegeben durch

$$s=\frac{H}{\rho g}\,\sinh\left(\frac{\rho g}{H}\,L\right)$$

Die Bedeutung der einzelnen Parameter finden Sie auf Seite 120.

Ein 100 m langes Kabel (Gewicht 400 kg) ist zwischen zwei Punkten gespannt. Die beiden Befestigungspunkte sind 80 m voneinander entfernt und auf gleicher Höhe. Finden Sie

(a) die Gleichung der Kurve.

(b) die Spannung im Kabel an der tiefsten Stelle.

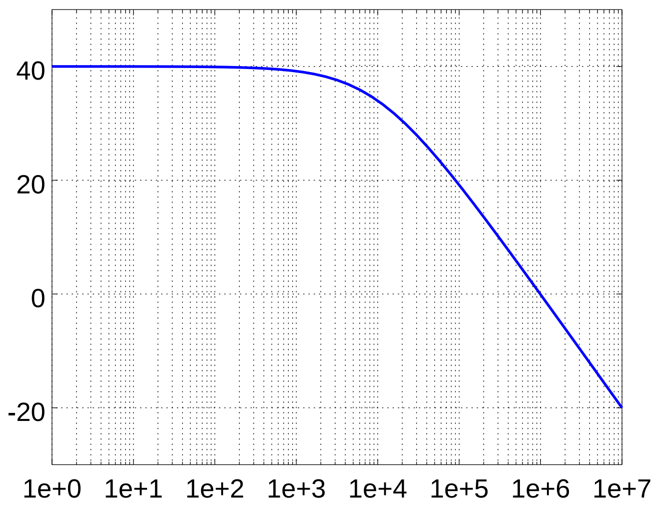
(c) den Durchhang, d.h. den Höhenunterschied.

Die Lösung dieser Aufgabe beinhaltet eine Gleichung, die nicht „von Hand“ lösbar ist. Setzen Sie geeignete Hilfsmittel (HP–48, *Octave*) ein. Quelle: [TenePoll85, p. 515]

• Aufgabe 5–23:
In der untenstehenden Graphik sehen Sie den Plot einer Funktion $y=f(x)$. Für die vertikale Achse wurde eine Dezibel–Skala verwendet.

(a) Im rechten Teil der Graphik ist eine Gerade klar erkennbar. Bestimmen Sie die exakte Funktion $y=g(x)$ welche zu dieser Geraden führt.

(b) Die gesamte Kurve entspricht dem Graphen einer einfachen, rationalen Funktion. Finden Sie diese Funktion.



• Aufgabe 5–24:
Unten sehen Sie dem Bode–Plot des Verstärkungsfaktors $A(\nu)$ eines Tiefpassfilters. Auf der Abszisse ist die Frequenz ν aufgetragen und auf der Ordinate der Verstärkungsfaktor (in einer Dezibelskala). Das rechte Ende der Kurve kann sehr gut durch eine Gerade approximiert werden.

(a) Finden Sie eine approximative Formel für sehr grosse ν. Das Resultat sollte eine einfache Formel mit zwei unbekannten Konstanten sein.

(b) Bestimmen Sie mit Ihrem Resultat des ersten Teiles den numerischen Wert der Konstanten, die durch die Steigung der approximativen Geraden gegeben ist.

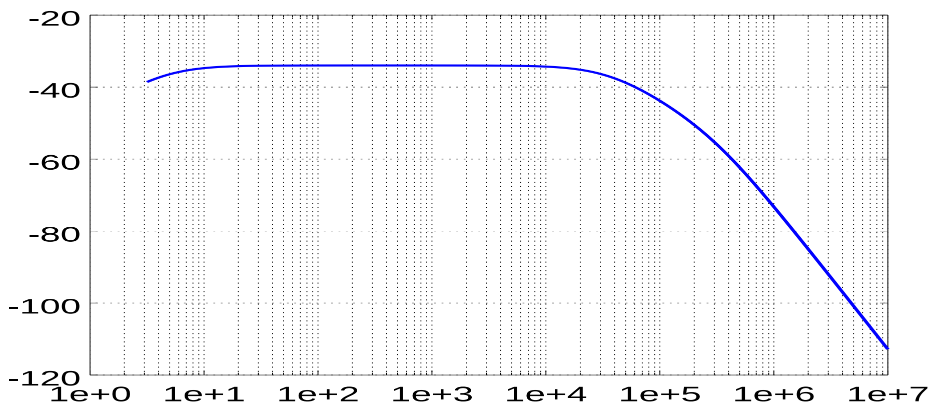


Abbildung 5.13: Bode–Plot eines Lowpass–Filters

• Aufgabe 5–25:
Bei **adiabatischer Kompression** eines Gases gilt die Gleichung $p\,V^{\kappa} = c$ für den Druck p und das Volumen V. Aus der untenstehenden Messreihe soll graphisch der Exponent κ und die Konstante c bestimmt werden.

V	$[m^3]$	2	4	8	16	32
p	$[N/m^2]$	45	18	7	3.0	1.2

• Aufgabe 5–26:
Bei **adiabatischer Kompression** eines Gases gilt die Gleichung $p\,V^\kappa = c$ für den Druck p und das Volumen V. Aus der untenstehenden Messreihe soll graphisch der Exponent κ bestimmt werden.

V	$[m^3]$	0.25	0.5	1	2	4
p	$[N/m^2]$	42.1	18.4	8.0	3.49	1.52

• Aufgabe 5–27:

Betrachtet man den Luftdruck p $[Torr]$ als Funktion der Höhe h $[km]$ über Meer so gilt

$$p\,(h) = p_0\,(1 - \alpha\,h)^\kappa$$

wobei $\alpha = 2.26 \cdot 10^{-2}$. Die Tabelle rechts zeigt einige Werte von h und p.

h km	p Torr
1	674.12
2	596.28
4	462.46
5	405.37

(a) Ergänzen Sie die Tabelle durch eine Spalte mit den Werten von $z = 1 - \alpha h$.

(b) Betrachten Sie nun p als Funktion von z. Wählen Sie die Skalen im Graphen so, dass eine Gerade entstehen sollte.

(c) Lesen Sie in Ihren Graphen die Werte von p_0 und κ ab. Die Auswahl der **richtigen Skalen und Bereiche** ist wichtig.

• Aufgabe 5–28:

Für einen kleinen Metalblock in einem Zimmer mit konstanter Temperatur $20°C$ wurde für verschiedene Zeiten t die Temperatur T gemessen, mit den rechts stehenden Ergebnissen.

(a) Erstellen Sie eine geeignete Graphik, sodass eine Gerade entstehen sollte.

(b) Lesen Sie in ihrer Graphik die Temperatur zur Zeit $t = 0$ ab.

(c) Geben Sie die Formel für die Temperatur $T(t)$ als Funktion der Zeit t. Die Daten sind mit Hilfe ihrer Graphik zu bestimmen.

t [Min]	T $[°C]$
2	1.5
4	6.3
12	16.0
16	17.8

Tipp: Gesetz von Newton

• Aufgabe 5–29:

Für einen kleinen Metalblock in einem Zimmer mit konstanter Temperatur $20°C$ wurde für verschiedene Zeiten t die Temperatur T gemessen, mit den rechts stehenden Ergebnissen.

(a) Erstellen Sie eine geeignete Graphik, sodass eine Gerade entstehen sollte.

(b) Lesen Sie in ihrer Graphik die Temperatur zur Zeit $t = 0$ ab.

(c) Geben Sie die Formel für die Temperatur $T(t)$ als Funktion der Zeit t. Die Daten sind mit Hilfe ihrer Graphik zu bestimmen.

t [Min]	T $[°C]$
1	65
2	50
6	30
8	25

• Aufgabe 5–30:

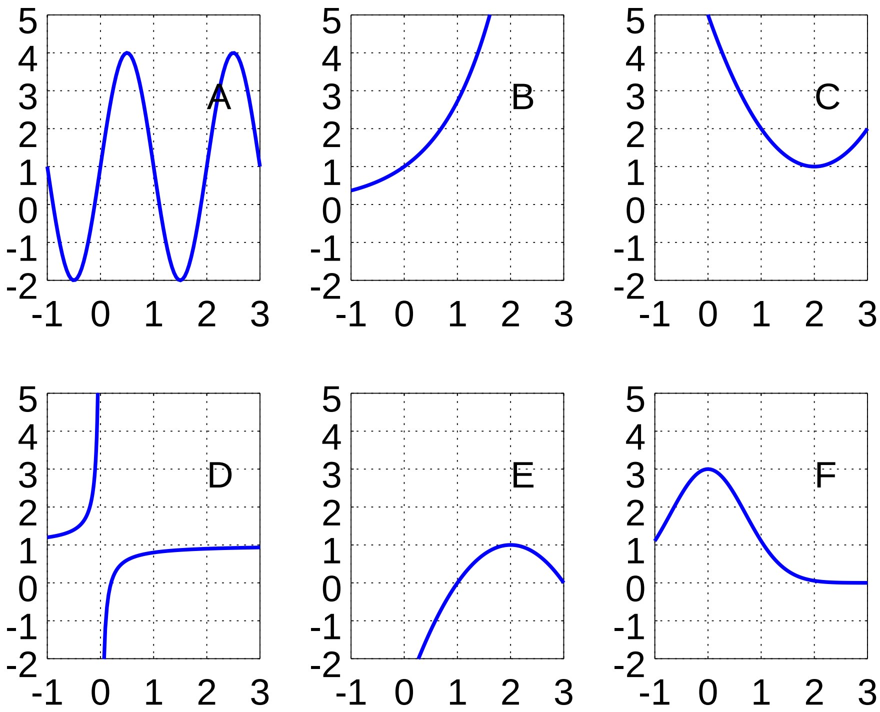
Für Kinder im Alter von 5 bis 13 Jahren wurde die *Ehrenberg Relation* experimentell bestätigt. Sie besagt, dass zwischen dem Gewicht G (in kg) und der Grösse h (in cm) die folgende Beziehung gilt

$$G = c\, e^{\alpha\, h}$$

für Konstanten c und α. Eine kleine Testmessung an fünf Kindern hat die rechtstehenden Daten ergeben. Zeichnen Sie diese Daten in einer geeigneten Graphik auf und lesen Sie anschliessend die Werte von c und α ab.

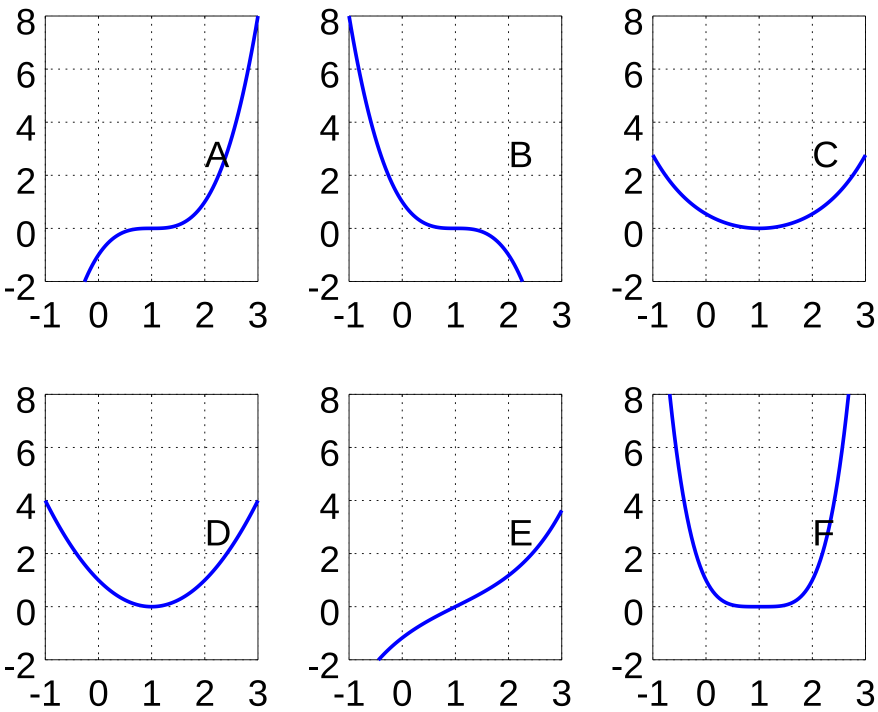
h in cm	G in kg
100	15.1
110	18.2
125	23.9
130	26.4
150	38.0

• Aufgabe 5–31:
Für die untenstehenden Graphen sind die zugehörigen Funktionen möglichst präzise anzugeben. In Betracht zu ziehen sind verschiedene Typen von Funktionen: Polynome, rationale, trigonomtrische und Exponentialfunktionen.



• Aufgabe 5–32:
Von den folgenden zehn Funktionen sind die Graphen von sechs Funktionen unten gezeigt. Bestimmen Sie die sechs zusammengehörenden Paare.

1 :	$f(x) = \cosh(x-1)$	2 :	$f(x) = \sinh(x-1)$
3 :	$f(x) = \cosh(x-1) - 1$	4 :	$f(x) = \sinh(x) - 1$
5 :	$f(x) = x - 1$	6 :	$f(x) = 1 - x$
7 :	$f(x) = (1-x)^3$	8 :	$f(x) = (x-1)^3$
9 :	$f(x) = (x-1)^2$	10 :	$f(x) = (1-x)^4$



5.5.4 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 5–1 :

(a) $x = -4$

(b) $x \in \{-7\,,\,1\}$

(c) $x = -5$

(d) $x \approx -1.2301$

(e) $x \approx -1.4823$

(f) $x \approx 31.972$

(g) $x \approx -5.1289$

(h) $x \approx -0.20273$

Lösung zu Aufgabe 5–2 :

(a) $x \approx 6.651 \cdot 10^{-5}$

(b) $x \approx 212.31$

(c) $x = \frac{13}{8}$

(d) $x \approx 22.746$

(e) keine Lösung

(f) $x = a \cdot 10^{b}$

Lösung zu Aufgabe 5–3 :

(a)

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

(b)

$$\begin{aligned} y &= \log_2 x^2 = 2\,\log_2 x = 2\,\frac{\ln x}{\ln 2} \\ \frac{y\,\ln 2}{2} &= \ln x \\ x &= \exp\left(\frac{y\,\ln 2}{2}\right) \end{aligned}$$

(c) Substitution $z = e^{3\,x}$

$$\begin{aligned} e^{6\,x} - e^{3\,x} - 6 &= 0 \\ z^2 - z - 6 &= (z-3)\,(z+2) = 0 \end{aligned}$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Wegen $z = e^{3\,x} > 0$ kommt nur $z = 3$ als Lösung in Frage, und es gilt also

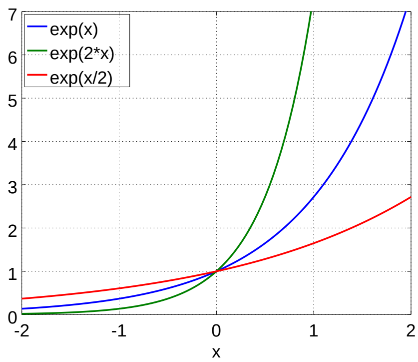
$$x = \frac{\ln z}{3} = \frac{\ln 3}{3}$$

Lösung zu Aufgabe 5–4 : Die beiden Graphen sind identisch und entstehen aus Abbildung 5.1 durch Spiegelung an der y–Achse.

Lösung zu Aufgabe 5–5 :

Octave

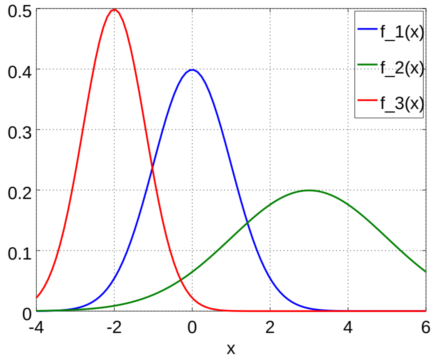
```
x = linspace(-2,2);
plot(x,exp(x),x,exp(2*x),x,exp(x/2))
xlabel("x")
grid on
axis([-2,2,0,7])
legend("exp(x)","exp(2*x)","exp(x/2)","location","northwest")
```



Lösung zu Aufgabe 5–6 :

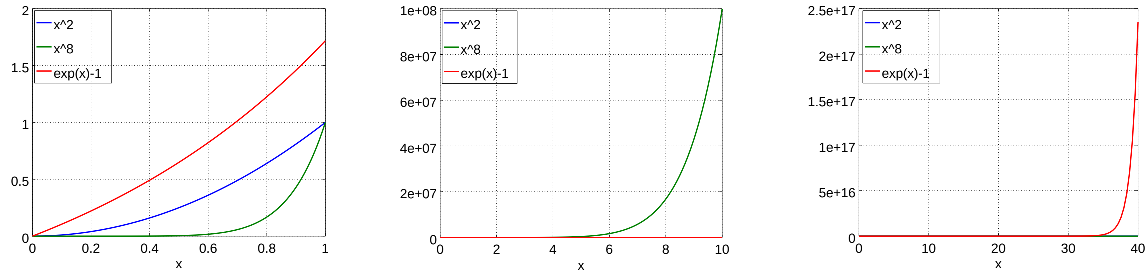
Octave

```
x  = linspace(-4,6);
y1 = 1/sqrt(2*pi)*exp(-x.^2/2);
y2 = 1/(2*sqrt(2*pi))*exp(-(x-3).^2/(2*2^2));
y3 = 1/(0.8*sqrt(2*pi))*exp(-(x+2).^2/(2*0.8^2));
plot(x,y1,x,y2,x,y3)
xlabel("x")
grid on
axis([-4,6,0,0.5])
legend("f_1(x)","f_2(x)","f_3(x)")
```



Funktion	Mittelwert	Standardabweichung
$f_1(x)$	0	1
$f_2(x)$	3	2
$f_2(x)$	-2	0.8

Lösung zu Aufgabe 5–8 :



Lösung zu Aufgabe 5–9 : Setzen Sie $z = e^{3x}$, dann lautet die Gleichung $z^2 + 7z + 12 = 0$ mit den Lösungen $z = -3$ und $z = -4$. Es gilt aber $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit gibt es keine L"osungen der urspr"unglichen Gleichung.

Lösung zu Aufgabe 5–10 :

(a) Aufgrund der Definition der hyperbolischen Funktion gilt

$$y = \sinh(x) = \frac{1}{2}\,\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\,\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

wobei die Substitition $z = e^x$ verwendet wurde. Diese Bedingung kann zu einer quadratischen Gleichung für die Unbekannte z umgeformt werden.

$$2\,y\,z = z^2 - 1 \quad \text{oder auch} \quad z^2 - 2\,y\,z - 1 = 0$$

Die beiden Lösungen sind

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(+2\,y \pm \sqrt{4\,y^2 + 4}\right) = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Wegen $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ und $z = e^x > 0$ ist nur eine Lösung zulässig und wir erhalten

$$e^x = z_1 = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

und somit

$$x = \ln z = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = \ln\left(\sinh x + \sqrt{1 + \sinh^2 x}\right)$$

Somit ist die zu $y = \sinh x$ inverse Funktion gegeben durch

$$x = \operatorname{arcsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

(b) Die Überlegungen sind analog zur vorangehenden Teilaufgabe. Das Resulat kann in jeder guten Formelsammlung verifiziert werden.

Lösung zu Aufgabe 5–11 :

$$\begin{aligned}
\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\,\cosh^2 x - 1 \\
\cosh(2x) + \cosh(x) &= 2\,\cosh^2 x - 1 + \cosh x = 3 \\
2\,\cosh^2 x + \cosh x - 4 &= 0 \\
2\,z^2 + z - 4 &= 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung für $z = \cosh x$ wird gelöst durch

$$z_{1,2} = \frac{1}{4}\,\left(-1 \pm \sqrt{1+32}\right)$$

Da $\cosh x \geq 1$ kommt nur die Lösung

$$z = \cosh x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$$

in Frage. Und somit sind

$$x = \pm\cosh^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right) \approx \pm 0.60106$$

die beiden (reellen) Lösungen des Problems.

Lösung zu Aufgabe 5–12 :

(a) $\cosh\,x = 1 + \sqrt{3/2}$

(b) $x = \pm\text{arccosh}\,(1 + \sqrt{3/2})$

Lösung zu Aufgabe 5–13 :

1. Falls $|A_1| > |A_2|$, dann gilt
$$f(x) = A\;\cosh(\lambda\,x + \varphi)$$
mit
$$A = \sqrt{A_1^2 - A_2^2} \quad , \quad \varphi = \text{arctanh}\,\frac{A_2}{A_1}$$

2. Falls $|A_1| < |A_2|$, dann gilt
$$f(x) = A\;\sinh(\lambda\,x + \varphi)$$
mit
$$A = \sqrt{A_2^2 - A_1^2} \quad , \quad \varphi = \text{arctanh}\,\frac{A_1}{A_2}$$

Lösung zu Aufgabe 5–14 :

(a) 96.63 %

(b) 71 %

(c) $\approx$ 307 Jahre

Lösung zu Aufgabe 5–15 :

(a) Abkühlgesetz von Newton

$$\begin{aligned} T(t) &= 20 + 60\, e^{-\alpha\, t} \\ 60 &= 20 + 60\, e^{-\alpha\, 10} \\ \alpha &= \frac{1}{10}\ \ln(60/40) = \frac{1}{10}\ \ln(3/2) \approx 0.040546 \end{aligned}$$

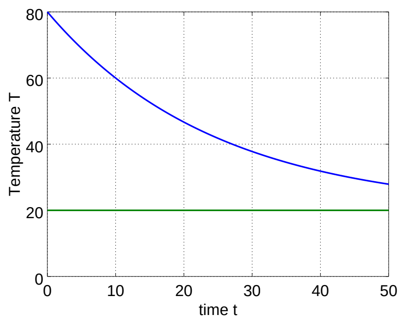
(b) Es ergibt sich eine exponentiell abfallende Kurve mit der horizontalen Asymptoten $T_\infty = 20$. Die Zeitkonstante ist $1/\alpha \approx 24.663$. Somit wird in 25 Min. der Abstand zu $T_\infty = 20$ durch $e \approx 2.718$ dividiert. Die genau Formel ist

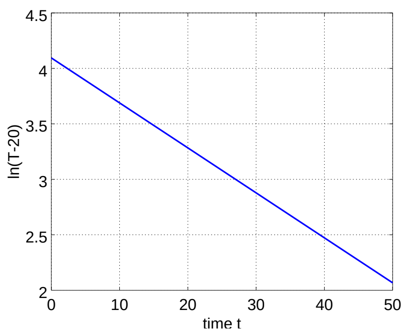
$$T(t) = 20 + 60\, e^{-0.040\, t}$$

(c) Es muss die T Achse logarithmiert werden, nachdem 20 subtrahiert wurde.

$$\ln(T(t) - 20) = \ln(60\ e^{-\alpha\, t}) = \ln 60 - \alpha\, t \approx 4.09434 - 0.040546\, t$$

Dadurch sind Achsenabschnitt und Steigung der Geraden gegeben.





Lösung zu Aufgabe 5–16 :

(a) $T = 20\ \left(1 + 4\, e^{-0.06931\, t}\right)$

(b) 25°

(c) 14.2 min

Lösung zu Aufgabe 5–17 : $t\,(t) = 23 - 8\, e^{-k\, t}$, $T\,(1) = 19$, $k = \ln 2$, $t = 6.32\ min.$

Lösung zu Aufgabe 5–18 : Sei T die Differenz zur Aussentemperatur von $-10^\circ\, C$, dann gilt

$$T\,(t) = c\, e^{-\lambda t}$$

für geeignete Konstanten λ und c. Diese sind zu bestimmen aus den gegebenen Daten

$$T\,(10) = 30 \quad \text{und} \quad T\,(30) = 27$$

Dazu betrachten wir

$$\begin{array}{rl} 30 & = c\, e^{-\lambda 10} \\ 27 & = c\, e^{-\lambda 30} \\ \hline 30/27 & = e^{\lambda 20} \end{array}$$

Die letzte Gleichung lässt sich nach λ auflösen mit dem Resultat

$$\lambda = \frac{\ln\,(30/27)}{20}$$

Die nach t aufzulösende Gleichung ist

$$10 = c\,e^{-\lambda\,t}$$

Dividieren wir die erste Gleichung durch die hier gegebene, so erhalten wir

$$30/10 = 3 = e^{\lambda\,(t-10)}$$

mit der Lösung

$$t = 10 + \frac{\ln\,3}{\lambda} = 10 + \frac{20\,\ln\,3}{\ln\,(30/27)} \approx 218.54\;[min]$$

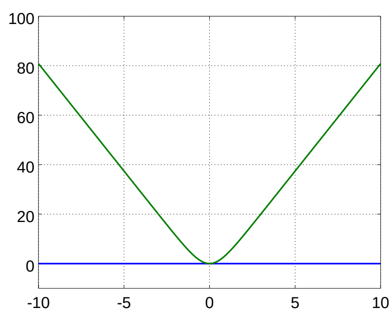
Lösung zu Aufgabe 5–19 : Die Definition der Funktion $\cosh(x)$ und der Dezibelskala $(20\log())$ führen auf

$$\begin{array}{rcl}
\cosh(x) & = & \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}) \\
20\,\log(\cosh(x)) & = & 20\,\log\left(\frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})\right) \\
\text{falls}\quad x \gg 1 & & e^{-x} \approx 0 \quad \text{im Vergleich zu } e^x \\
20\,\log(\cosh(x)) & \approx & 20\,\log\left(\frac{1}{2}\,(e^x)\right) = 20\,\log\frac{1}{2} + 20\,\log\,(e^x) \\
& = & -20\log 2 + 20\,\log(e)\,x
\end{array}$$

Wegen $\log 2 \approx 0.3$ und $\log(e) = \frac{\ln e}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \approx 0.434$ und der Symmetrie von $\cosh(x)$ haben wir

$$20\,\cosh(x) \approx -6 + 0.868\,|x| \quad \text{für} \quad |x| \gg 1$$

d.h. Geraden mit Achsenabschnitt ≈ -6 und Steigungen $\approx \pm 0.868$. Fur $x = \pm 10$ erhalten wir somit $20\,\cosh(\pm 10) \approx -6 + 10 \cdot 0.868 \approx 80.6$. Wegen $\cosh(0) = 1$ geht die Kurve bei $x = 0$ durch $y = 20\,\log(1) = 0$.



Lösung zu Aufgabe 5–20 :

(a)

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

und somit

$$\ln x = \ln 2 \cdot \log_2 x$$

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{\ln 2 \cdot \log_2 x}{\ln 2 \cdot \log_2 10} = \frac{\log_2 x}{\log_2 10} = \log_{10} 2 \cdot \log_2 x$$

(b)

$$e^x = \left(2^{\log_2 e}\right)^x = 2^{x\log_2 e}$$
$$10^x = \left(2^{\log_2 10}\right)^x = 2^{x\log_2 10}$$

(c)

$$x^y = \left(2^{\log_2 x}\right)^y = 2^{y\,\log_2 x}$$

(d) Diese Konstanten werden für die obigen Rechnungen gebraucht. Es gelten die elementaren Beziehungen

$$\log_2 e = \frac{1}{\ln 2} \qquad \log_{10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} = \frac{1}{\log_2 10}$$

Dank der schnellen Verfügbarkeit dieser Konstanten kann für alle obigen Operationen der FPU–Befehl $y\cdot\log_2 x$ eingesetzt werden.

(e) Biär–System von Zahlen.

Lösung zu Aufgabe 5–21 :

(a)

$$\begin{aligned}\cosh(2\,x) &= \cosh(x+x)\\ &= \cosh x\cosh x + \sinh x\sinh x\\ &= \cosh^2 x + \sinh^2 x\\ &= \cosh^2 x + \cosh^2 x - 1\\ &= 2\,\cosh^2 x - 1\end{aligned}$$

(b) Substituieren Sie $z = \frac{x}{2}$ und somit

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \cosh(2\,z)\\ &= 2\,\cosh^2 z - 1\end{aligned}$$

und somit

$$\cosh^2 z = \frac{1+\cosh x}{2}$$

Da $\cosh z = \cosh\frac{x}{2} > 0$ gilt also

$$\cosh\frac{x}{2} = \cosh z = \sqrt{\frac{1+\cosh x}{2}}$$

Lösung zu Aufgabe 5–22 : Offensichtlich ist $\rho = 4\,\frac{kg}{m}$. Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems können wir die Funktion

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\;\cosh\;(\lambda\,x) \qquad -40 \le x \le 40$$

betrachten, wobei $\lambda = \rho g/H$. Da das Seil 100 m lang ist, gilt

$$50\,\lambda = \sinh(\lambda\,40)$$

Diese Gleichung kann mit dem HP–48 oder *Mathematica* gelöst werden, und man erhält

$$\lambda = \frac{\rho g}{H} \approx 0.0296\;\frac{1}{m}$$

und somit

(a)

$$y\,(x) = \frac{1}{\lambda}\ \cosh\ (\lambda\, x)$$

(b)

$$H = \frac{\rho\, g}{\lambda} \approx \frac{4 \cdot 9.81}{0.0296}\ N \approx 1327\ N$$

(c)

$$y\,(40\,m) - y\,(0\,m) = \frac{1}{\lambda}\ (\cosh\,(\lambda\,40\,m) - 1) \approx 26.5\,m$$

Lösung zu Aufgabe 5–23 : Die vertikale Dezibelskala impliziert, dass $20\ \log(y)$ aufgetragen wird. Horizontal liegt einen logarithmische Skala vor.

(a) Eine Gerade in einer doppelt logarithmischen Graphik entspricht einer Potenzfunktion. In der Graphik liest man leicht ab, dass

$$x = 10^6 \quad\to\quad \log x = 6 \quad\to\quad 20\ \log(g(x)) = 0$$

$$x = 10^7 \quad\to\quad \log x = 7 \quad\to\quad 20\ \log(g(x)) = -20$$

Die Gerade fällt um 20 Dezibel pro Dekade in x und bei $x = 10^6$ ist $\log(g(10^6)) = 0$

$$\begin{aligned} 20\ \log(g(x)) &= a + m \cdot \log(x) \\ &= 120 - 20 \cdot \log(x) \\ \log(g(x)) &= 6 - \log(x) \\ g(x) &= 10^6 \cdot 10^{-\log(x)} = 10^6 \cdot x^{-1} \end{aligned}$$

(b) Für kleine Werte von x gilt $20\ \log(g(x)) \approx 40$ und somit $g(x) \approx 100$. Für grosse Werte von x muss die obige Approximation von $f(x) \approx \frac{10^6}{x}$ richtig sein. Es gibt einfache rationale Funktionen, welche diese beiden Bedingungen erfüllen.

$$f(x) = \frac{A}{B + x} = \frac{10^6}{10^4 + x}$$

Lösung zu Aufgabe 5–24 :

(a) Eine Gerade auf einer doppelt–logarithmischen Skala entspricht einer Abhängigkeit der Form

$$A\,(\nu) = b \cdot \nu^a$$

weil durch logarithmieren die Gleichung

$$\log\ A\,(\nu) = \log\ b + \log\ \nu^a = \log\ b + a \cdot \log\ \nu$$

entsteht. Da die y-Werte in einer Dezibelskala angegeben sind, ist $\log A$ noch mit 20 zu multiplizieren und $y = 20\ \log A$ aufzutragen.

(b) Bei $\nu = 10^6$ liest man $y = -77\,db$ ab und bei $\nu = 10^7$ findet man $y = -117\,db$. Über diesen Bereich ändert sich $\log\nu$ um 1 und $\log A(\nu)$ um -2. Also ist die Steigung $a = -2$ und dies entspricht somit einer ursprünglichen Funktion der Form

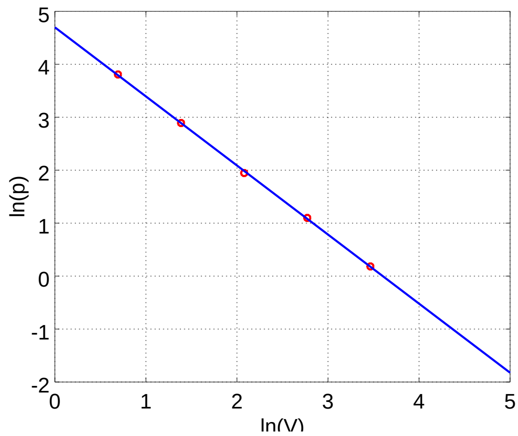
$$A(\nu) = b\cdot\nu^{-2} = \frac{b}{\nu^2}$$

Lösung zu Aufgabe 5–25 : Die Gleichung ist in die Form $p = c\,V^{-\kappa} = c\,e^{-\kappa\,\ln(V)}$ umzuschreiben. Somit ist

$$\ln(p) = \ln(c) - \kappa\ln(V)$$

Man hat also zwei Möglichkeiten

1. die Werte von p und V auf doppelt logarithmischem Papier auftragen
2. oder $\ln p$ und $\ln V$ auf „normalem“ Papier auftragen



Aus der Graphik liest man ab, dass $\ln c \approx 4.7$ und $\kappa \approx 1.3$. Es ergibt sich also $c \approx 110$.

Lösung zu Aufgabe 5–26 : Die Gleichung ist in die Form $p = c\,V^{-\kappa} = c\,e^{-\kappa\,\ln(V)}$ umzuschreiben. Somit ist

$$\ln(p) = \ln(c) - \kappa\ln(V)$$

Man hat also zwei Möglichkeiten

1. die Werte von p und V auf doppelt logarithmischem Papier auftragen
2. oder $\ln(p)$ und $\ln(V)$ auf „normalem“ Papier auftragen

Dann ist $-\kappa$ als Steigung der entstehenden Geraden abzulesen. Die Antwort sollte $\kappa \approx 1.2$ sein.

Lösung zu Aufgabe 5–27 :

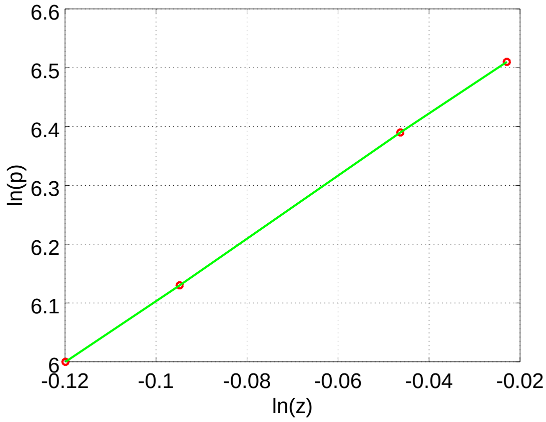
Die gegebene Lösung verwendet den natürlichen Logarithmus $\ln$, analoge Rechnungen können auch mit dem Logarithmus zur Basis 10 $\log$ durchgeführt werden.

$$\begin{aligned} p\,(h) &= p_0\,(1-\alpha\,h)^\kappa \\ p\,(z) &= p_0\,z^\kappa \\ \ln p\,(z) &= \ln p_0 + \kappa\,\ln z \end{aligned}$$

h in km	z	p in Torr
1	0.997	674.12
2	0.954	596.28
4	0.910	462.46
5	0.887	405.37

$\ln z$	$\ln p$
-0.0229	6.51
-0.0463	6.39
-0.0948	6.13
-0.1199	6.00

Somit kann eine doppelt–logarithmische Skala verwendet werden. Dazu sind die Logarithmen von z und p zu bestimmen. Diese Daten können nun aufgetragen werden und man finden eine Gerade mit Steigung $\kappa \approx 5.25$ und $\ln p_0 \approx 6.633$. Das führt auf eine Druck von $p_0 \approx e^{6.633} \approx 760\ [Torr]$.

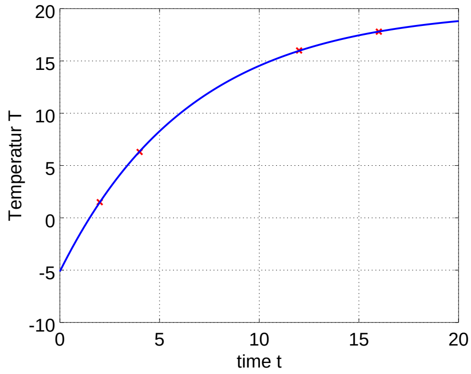


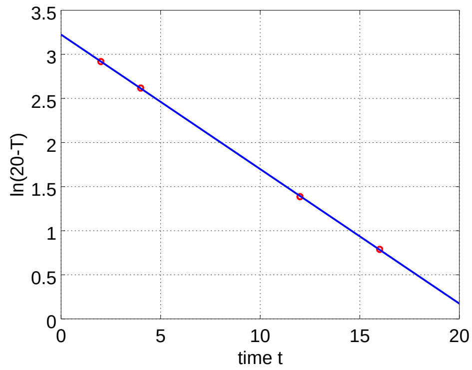
Lösung zu Aufgabe 5–28 : Die Temperatur konvergiert exponentiell gegen 20 und somit $T(t) = 20 - c\,e^{-\alpha t}$. In der untenstehenden Tabelle sind T, $(20-T)$ und $\ln(20-T)$ aufgeführt.

t	T	20-T	$\ln(20-T)$
2	1.5	18.5	2.92
4	6.3	13.2	2.62
12	16.0	4.0	1.39
16	17.8	2.2	0.79

Erzeugen Sie die folgenden Graphiken.

(a) Wegen $\ln(20-T) = \ln(c\,e^{-\alpha t}) = \ln c - \alpha\,t$ sollten die Werte von $\ln(20-T)$ als Funktion von t auf einer Geraden liegen.





(b) Für die Gerade liest man einen Achsenabschnitt von $\ln c \approx 3.2$ ab und eine Steigung von $-\alpha \approx -0.15$. Das führt auf $T(0) = 20 - c \approx 20 - e^{3.2} \approx -4.5$.

(c) Wegen $\alpha \approx 0.15$ gilt

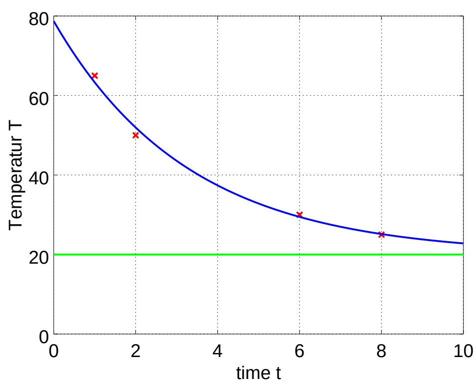
$$T(t) \approx 20 - 4.5\, e^{-0.15\, t}$$

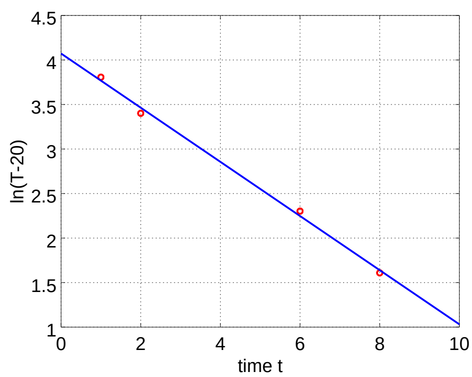
Lösung zu Aufgabe 5–29 : Die Temperatur konvergiert exponentiell gegen 20 und somit $T(t) = 20 - c\, e^{-\alpha t}$. In der untenstehenden Tabelle sind T, $(T-20)$ und $\ln(T-20)$ aufgeführt.

t	T	T-20	$\ln(T-20)$
1	65	45	3.80666
2	50	30	3.40120
6	30	10	2.30259
8	25	5	1.60944

Erzeugen Sie die folgenden Graphiken.

(a) Wegen $\ln(T-20) = \ln(c\, e^{-\alpha t}) = \ln c - \alpha\, t$ sollten die Werte von $\ln(T-20)$ als Funktion von t auf einer Geraden liegen.





(b) Für die Gerade liest man einen Achsenabschnitt von $\ln c \approx 4$ ab und eine Steigung von $-\alpha \approx -0.3$. Das führt auf $T(0) = 20 + c \approx 20 + e^{4} \approx 74.6$.

(c) Wegen $\alpha \approx 0.3$ gilt

$$T(t) \approx 20 + 54.6\, e^{-0.3\, t}$$

Lösung zu Aufgabe 5–30 :
Es gilt

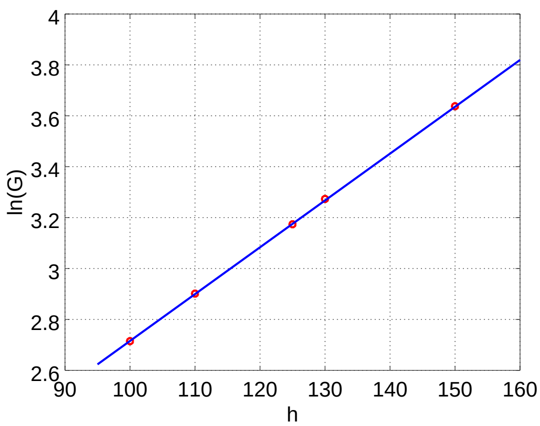
$$\ln G = \ln\left(c\, e^{\alpha\, h}\right) = \ln c + \alpha\, h$$

Trägt man statt des Gewichtes G den Logarithmus auf, so sollte eine Gerade entstehen, deren Steigung den Wert von α liefert. Die Zahlenwerte sind so, dass der Achsenabschnitt $\ln c$ nur sehr ungenau (wenn überhaupt) abgelesen werden kann. Es empfiehlt sich diesen mittels eines Punktes auf der Geraden zu berechnen. Als Resultat erhält man $c = 2.4$ und $\alpha = 0.0184$

h in cm	G in kg	$\ln G$
100	15.1	2.71
110	18.2	2.90
125	23.9	3.17
130	26.4	3.27
150	38.0	3.64

Octave

```
h = [100 110 125 130 150];
G = [15.1 18.2 23.9 26.4 38.0]
h_lin = linspace(95,160);
plot(h, log(G),'or', h_lin, log(2.4) + 0.0184*h_lin)
xlabel("h"); ylabel("ln(G)")
```



Lösung zu Aufgabe 5–31 : Für diese Aufgaben sind verschiedene Lösungen möglich.

A:	$f(x)$	$=$	$1 + 3\,\sin(\pi\, x)$	Amplitude, Periode, Verschiebung
B:	$f(x)$	$=$	e^x	Exponentialfunktion, Steigung
C:	$f(x)$	$=$	$1 + (x-2)^2$	Parabel, Scheitel, Öffnung
D:	$f(x)$	$=$	$1 - \frac{0.2}{x-1}$	Polstelle, Asymptote
E:	$f(x)$	$=$	$1 - (x-2)^2$	Parabel, Scheitel, Öffnung
F:	$f(x)$	$=$	$3\,e^{-x^2}$	Glockenkurve, ev. gebrochen rational

Lösung zu Aufgabe 5–32 :

$$A \leftrightarrow 8 \quad , \quad B \leftrightarrow 7 \quad , \quad C \leftrightarrow 3 \quad , \quad D \leftrightarrow 9 \quad , \quad E \leftrightarrow 2 \quad , \quad F \leftrightarrow 10$$

5.6 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- die Graphen der Funktionen $e^{k\,x}$ und $\ln x$ aufzeichnen können.
- die wesentlichen Funktionaleigenschaften anwenden können.
- Exponential– und Logarithmusgleichungen auflösen können.
- mit Exponential– und Logarithmusfunktionen mit beliebiger (positiver) Basis rechnen können.
- die elementaren Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen kennen.
- Daten über Exponential– und Potenzfunktionen aus deren Graphen mit logarithmischen Skalen ablesen können.

Kapitel 6

Folgen, Reihen und Stetigkeit

Wir betrachten in diesem Kapitel Folgen von reellen Zahlen. Die neuen Begriffe **Grenzwert** und **Konvergenz** sind wesentlich für die Analysis. Sie sind eng verbunden mit den Themen Approximation, Ableitung, Integral, Taylor–Reihe, Fourier–Reihe, u.s.w.

Wir führen die Begriffe mit Hilfe eines Beispiels ein.

Aus der Verteilung der Werte einer Funktion $y = f(x)$ kann man gute Hinweise erhalten über die Lage der Werte von x für die $f(x) = 0$. Relativ einfach kann eine Approximation der wahren Nullstelle gefunden werden.

Wir untersuchen den Bereich von z zwischen 0 und 2 für die Funktion $f(x) = x^4 - x^3 - 1 = 0$. In Abbildung 6.1 sehen Sie den Graphen der Funktion.

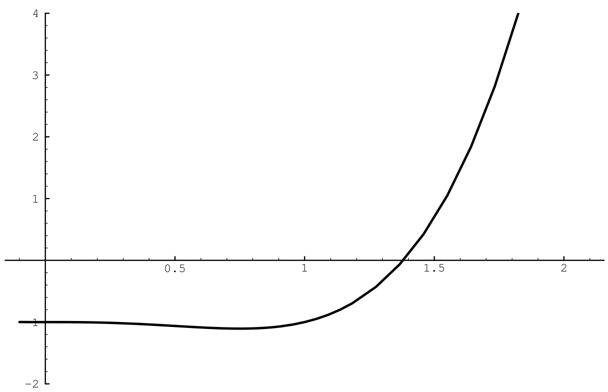


Abbildung 6.1: Bisektion

Wir suchen die Nullstelle. Die Grundidee ist sehr einfach: wir beginnen auf einem Intervall $[x_0, x_1]$, wobei $f(x_0) < 0$ und $f(x_1) > 0$. Somit ändert die Funktion ihr Vorzeichen in diesem Intervall. Nun untersuchen wir die Mitte x_2 des bisherigen Intervalls. Ist $f(x_2) = 0$, so haben wir die exakte Lösung gefunden, sonst ist entweder $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$ oder $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$, d.h die Funktion wechselt ihr Vorzeichen. Nun können wir das selbe Verfahren noch einmal starten, entweder auf dem Intervall $[x_0, x_2]$ oder auf $[x_2, x_1]$. Dadurch erhalten wir eine Schachtelung von Intervallen, deren Länge gegen Null strebt. Wir erhalten immer bessere Approximationen der wahren Nullstelle.

In unserem Beispiel wählen wir $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ und erhalten

$$f(x_0) = -1 < 0 \qquad f(x_1) = 7 > 0$$

Somit gibt es eine Lösung zwischen x_0 und x_1. Nun versuchen wir den Mittelpunkt $x_2 = (x_0 + x_1)/2 = 1$

und erhalten $f(x_2) = -1 < 0$.

x_2=1	$f(x_2) < 0$	$x_3 = (x_2 + x_1)/2$	$z \in [x_2, x_1]$
x_3=1.5	$f(x_3) > 0$	$x_4 = (x_3 + x_2)/2$	$z \in [x_2, x_3]$
x_4=1.25	$f(x_4) < 0$	$x_5 = (x_3 + x_4)/2$	$z \in [x_4, x_3]$
x_5=1.375	$f(x_5) < 0$	$x_6 = (x_5 + x_3)/2$	$z \in [x_5, x_3]$
x_6=1.4375	$f(x_6) > 0$	$x_7 = (x_5 + x_6)/2$	$z \in [x_5, x_6]$
x_7=1.40625	$f(x_7) > 0$	$x_8 = (x_5 + x_7)/2$	$z \in [x_5, x_7]$
x_8=1.390625	...		
...			

Die Folge der Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ nähert sich immer mehr dem richtigen Wert $z = 1.38027756\ldots$. Verifizieren Sie, dass der Unterschied zwischen x_n und z kleiner ist als $2\,(\frac{1}{2})^{n-1}$. Man sagt, dass die Folge x_n gegen z konvergiert.

Die Methode der Bisektion ist sehr einfach anzuwenden, trotzdem wird sie sehr selten eingesetzt, da sie nicht sehr effizient ist. Es gibt ähnlich einfache Verfahren (Sekantenmethode), die mit viel weniger Rechenoperationen die selbe Genauigkeit des Resultates erreichen.

6.1 Folgen und Reihen von Zahlen

6.1.1 Grunddefinitionen und Resultate

6–1 Definition : Eine **Folge** ist eine Funktion mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Definitionsbereich.

6–2 Definition : Wählt man für n die Werte $1, 2, 3, 4\ldots$, so erzeugt die Funktion $f(n) = \frac{1}{n+1}$ die Folge mit den Termen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ .... Der Wert $\frac{1}{n+1}$ der Funktion f heisst auch **allgemeiner Term** oder n**–ter Term** der Folge.

Oft setzt man den allgemeinen Term in geschweifte Klammern, z.B. $\{\frac{1}{n+1}\}$; oder man gibt mehrere Terme der Folge an, z.B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots$.

6–3 Beispiel : Verifizieren Sie in den folgenden Beispielen, dass jeweils zwei Notationen für die selbe Folge vorliegen.

- $\{n^2\}$ entspricht $1, 4, 9, 16, \ldots$.
- $\{1 - 1/n\}$ entspricht $0, 1/2, 2/3, 3/4, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$.
- $\{\frac{2n}{n^2+1}\}$ entspricht $1, 4/5, 6/10, 8/17, 10/26, 12/37, \ldots$.
- $1/1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, \ldots$ entspricht $\{1/n^2\}$.
- $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \ldots$ entspricht $\{n(n+1)/2\}$.
- $1/4, -1/7, 1/10, -1/13, 1/16\ldots$ entspricht $\{(-1)^{n+1}/(3n+1)\}$.

$\diamondsuit$

6–4 Definition : Hier sind die Definitionen von einigen einfachen Eigenschaften von Folgen

- Eine Folge $\{s_n\}$ heisst **beschränkt**, falls es zwei Zahlen P und Q, so dass $P \leq s_n \leq Q$für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Eine Folge $\{s_n\}$ heisst **wachsend**, falls $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4 \leq s_5 \leq s_6 \leq \ldots$
- Eine Folge $\{s_n\}$ heisst **fallend**, falls $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq s_4 \geq s_5 \geq s_6 \geq \ldots$
- Eine Folge $\{s_n\}$ heisst **streng wachsend**, falls $s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5 < s_6 < \ldots$
- Eine Folge $\{s_n\}$ heisst **streng fallend**, falls $s_1 > s_2 > s_3 > s_4 > s_5 > s_6 > \ldots$
- Eine Folge heisst **monoton**, falls sie wachsend oder fallend ist

6–5 Definition : Man sagt, dass die Folge $\{s_n\}$ **gegen die Zahl L konvergiert**, oder L als **Grenzwert** hat, falls es für jede Zahl $\varepsilon > 0$ (noch so klein) eine natürliche Zahl M gibt mit $|s_n - L| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq m$. Man verwendet die Notation

$$s_n \to L \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = L$$

Hat eine Folge eine Grenzwert, so heisst sie **konvergent**. Eine Folge ohne Grenzwert heisst **divergent**.

6–6 Definition : Man sagt, dass die Folge $\{s_n\}$ **gegen unendlich konvergiert**, $s_n \to \infty$, falls es für jede Zahl M (noch so gross), eine natürliche Zahl m mit $s_n \geq M$ für alle $n \geq M$.

Leider können durch die obigen Notationen Verständnisprobleme auftreten, da eine Folge die gegen ∞ konvergiert, nicht konvergent ist. Deshalb ist es vorteilhaft nicht von Konvergenz gegen unendlich zu sprechen.

6–7 Satz :

- *Sei $\{S_n\}$ eine Folge. Es gilt $s_n \to 0$ genau dann, wenn es für jede Zahl $\varepsilon > 0$ (noch so klein) eine natürliche Zahl m gibt mit*

$$|s_n| \leq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq m$$

- *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*
- *Eine konvergente Folge hat genau einen Grenzwert.*
- *Gilt $a_n \geq M$ und $a_n \to a$, so ist $a \geq M$.*
- *Sei N eine natürliche Zahl. Eine konvergente (divergente) Folge bleibt konvergent (divergent), falls man alle oder einige der ersten N Terme ändert.*

Unten finden Sie einige Beispiele von Grenzwerten. Die Beweise beruhen auf den obigen Definitionen. Das Resultat 16 wird später einfachere Rechenverfahren zur Verfügung stellen.

6–8 Definition : $[\ x\ ]$ ist der ganzahlige Anteil von $x \in \mathbb{R}$, also $[2.5] = 2$ oder auch $[5.15] = 5$.

6–9 Beispiel :

(a) Die Folge $\{1/n^2\}$ konvergiert gegen 0.
Beweis : Sei $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl. Wir müssen die $n \in \mathbb{N}$ finden mit

$$|s_n| = \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$n^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{oder} \quad n \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Für das gegebene ε eine ganze Zahl m mit

$$m = [\ 1/\sqrt{\varepsilon}\ ] + 1$$

so erhalten wir

$$|s_n| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq m.$$

Ändert man das obige ε, so muss auch m angepasst werden. m ist also eine Funktion von ε. □

(b) Die Folge $\{1/(n^2 + 2n + 2)\}$ konvergiert gegen 0.
Beweis :
Variante 1: Wir können ähnliche Rechnungen wie im vorangehenden Beispiel verwenden. Leider wird es etwas komplizierter.
Variante 2: Wir verwenden das obige Resultat. Wegen

$$n^2 + 2n + 2 \geq n^2 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

gilt

$$|s_n| = \frac{1}{n^2 + 2n + 2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Somit können wir für ein $\varepsilon > 0$ exakt das selbe m wie im vorangehenden Beispiel verwenden und erhalten

$$|s_n| = \frac{1}{n^2 + 2n + 2} < \varepsilon \quad \text{für alle} \qquad n \geq m.$$

□

♢

6–10 Definition : Eine **Intervallschachtelung** besteht aus zwei Folgen a_n und b_n von reellen Zahlen mit

1. a_n ist eine wachsende Folge.
2. b_n ist eine fallende Folge.
3. $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
4. $b_n - a_n$ konvergiert gegen 0.

6–11 Beispiel : Zeigen Sie, dass aus der Dezimalbruchdarstellung der Zahl $\sqrt{2}$ eine Intervallschachtelung erzeugt werden kann mit $a_n < \sqrt{2} < b_n$. ♢

Das folgende Theorem zeigt den wichtigsten Unterschied zwischen der reellen und rationalen Zahlen. Beide Resultate sind falsch, falls man nur mit rationalen Zahlen arbeitet.

6–12 Theorem : *Charakterisierung der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$
Die beiden folgenden Aussagen sind korrekt und equivalent.
(a) Für jede Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ *gibt es genau eine reelle Zahl* $x \in \mathbb{R}$ *mit*

$$a_n \leq x \leq b_n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

(b) Jede monotone, beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ *hat einen Grenzwert in* $\mathbb{R}$.

Nun sind wir in der Lage, das folgende Resultat zu beweisen.

6–13 Satz : *Seien* $\{a_n\}$ *und* $\{b_n\}$ *zwei Folgen mit*

$$a_n \to 0 \quad \text{und} \quad |b_n| \leq a_n \qquad \text{für alle} \quad n \geq n_0$$

für eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$b_n \to 0 \qquad .$$

Hier eine ähnliche Aussage, die es erlaubt schwierigere Grenzwerte zu bestimmen.

6–14 Theorem : *(Sandwich)*
Seien $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *und* $\{c_n\}$ *drei Folgen mit*

$$a_n \to L \quad , \quad c_n \to L \quad \text{und} \quad a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0$$

für eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$b_n \to L$$

Das folgende Diagramm illustriert dieses Resultat.

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_n & \leq & b_n & \leq & c_n \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ L & & & & L \end{array}\right\} \Longrightarrow b_n \longrightarrow L$$

6–15 Beispiel : Verifizieren Sie, dass die Folge

$$a_n = \frac{1}{n+1} \, \cos\left(n^2 - \sinh\left(n-1\right)\right)$$

gegen 0 konvergiert. $\diamondsuit$

6–16 Theorem : *(Rechenregeln für Grenzwerte)*
Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zwei konvergente Folgen mit

$$a_n \to A \quad \text{und} \quad b_n \to B$$

Dann gilt

(a) $a_n + b_n \to A + B$

(b) $c \cdot a_n \to c \cdot A$, *wobei c eine beliebige Konstante ist*

(c) $a_n \cdot b_n \to A \cdot B$

(d) $a_n / b_n \to A/B$ *falls* $B \neq 0$ *und* $b_n \neq 0$ *für alle* n.

Dieses Theorem ist ausserordentlich nützlich, um „komplizierte" Grenzwerte mit Hilfe von einfacheren zu berechnen. Um viele verschiedene Grenzwerte bestimmen zu k'önnen benötigen wir noch einige Grenzwerte.

6–17 Satz : *Geometrische Folge*
Sei $r \in \mathbb{R}$ und $a_n = r^n$. Dann gilt

(a) $a_n \to 0$ *falls* $|r| < 1$.

(b) a_n *ist divergent für* $|r| > 1$.

Beweis :

(a) Wir betrachten zuerst den Fall $0 < r < 1$. Somit gilt $0 < a_{n+1} = r\, a_n < a_n$. Damit ist $a_n = r^n$ eine monoton fallende Folge von positiven Zahlen und somit konvergent. Sei $a_n \to A$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{und} \quad A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = r \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = r \cdot A$$

und somit ist $A \cdot (1 - r) = 0$. Da $r \neq 1$ gilt also $A = 0$.
Für $-1 < r < 0$ verwenden wir das Sandwich–Theorem $-|r|^n \leq a_n \leq |r|^n$.

(b) Durch Widerspruch.

□

6–18 Beispiel :

(a) Ist $c \geq 1$ und $a_n = \sqrt[n]{c}$, so gilt $a_n \to 1$.

(b) Ist $a_n = \sqrt[n]{1 + x^n}$ und $0 < x \leq 1$, so gilt $a_n \to 1$.

(c) Ist $a_n = \sqrt[n]{1 + x^n}$ und $x > 1$, so gilt $a_n \to x$.

(d) Es gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$

♢

Beweis :

(a) Mit Hilfe der Notation $\alpha_n = a_n - 1$ zeigt man, dass $\alpha_n \to 0$. Wegen der Ungleichung von Bernoulli gilt nun
$$c = a_n^n = (1+\alpha_n)^n \geq 1 + n \cdot \alpha_n$$
und somit
$$0 \leq \alpha_n \leq \frac{c-1}{n} \to 0$$
Das Sandwich–Theorem impliziert $\alpha_n \to 0$.

(b) Betrachten Sie die Ungleichungen
$$\sqrt[n]{1} \leq a_n \leq \sqrt[n]{1+1} = \sqrt[n]{2}$$
und verwenden Sie das Sandwich–Theorem.

(c) Betrachten Sie die Ungleichungen
$$x = \sqrt[n]{x^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{x^n + x^n} = \sqrt[n]{2}\, x$$
und verwenden Sie das Sandwich–Theorem.

(d) Die Ungleichung von Bernoulli besagt, dass
$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n} \geq \sqrt{n} \geq 1$$
und somit
$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2\,n} \geq n \geq 1$$
Zieht man daraus die n–te Wurzel, so gilt
$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \geq \sqrt[n]{n} \geq 1$$
Nun folgt aus
$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 1 \cdot 1 = 1$$
das gewünschte Resultat.

□

6–19 Satz : *Sei* $a_n = f\,(n) = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ *für eine rationale Funktion* f.

- *Ist* f *eine* **echt gebrochen** *rationale Funktion, so gilt*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
- *Ist der Grad von* P *strikt grösser als der Grad von* Q*, so ist die Zahlenfolge* a_n *divergent.*
- *Ist der Grad von* P *gleich dem Grad von* Q*, so konvergiert die Zahlenfolge* a_n *gegen eine Zahl* $L \neq 0$.

Beweis : Dieser Beweis ist sehr einfach und kann leicht mit Hilfe von Beispielen motiviert werden. □

6–20 Beispiel : Um den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{n^3 - 17\,n^2 + 13}{2\,n^3 + 177\,n + 4711}$$

verwendet man die Umformumgen und Rechenregeln

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1/n^3}{1/n^3}\,\frac{n^3 - 17\,n^2 + 13}{2\,n^3 + 177\,n + 4711} = \frac{1 - 17\,\frac{1}{n} + 13\,\frac{1}{n^3}}{2 + 177\,\frac{1}{n^2} + 4711\,\frac{1}{n^3}} \\ 1 - 17\,\frac{1}{n} + 13\,\frac{1}{n^3} &\longrightarrow 1 - 17 \cdot 0 + 13 \cdot 0 = 1 \\ 2 + 177\,\frac{1}{n^2} + 4711\,\frac{1}{n^3} &\longrightarrow 2 + 177 \cdot 0 + 4711 \cdot 0 = 2 \\ a_n &\longrightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

6–21 Problem : Sei $a_0 = 2$ und die Zahlenfolge ist gegeben durch die Iterationsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $a_n^2 \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Verifizieren Sie, dass die Folge fallend ist und somit konvergent.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert.

Die Aufgabe 6–10 basiert auf der selben Idee.

Beweis : Die Rechnungen sind elementar, aber lang.

(a) Untersuchen Sie

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 \geq 2 \iff & \left(\tfrac{1}{a_n} + \tfrac{a_n}{2}\right)^2 \geq 2 \\ \iff & \tfrac{1}{a_n^2} + 1 + \tfrac{a_n^2}{4} \geq 2 \\ \iff & \tfrac{1}{a_n^2} - 1 + \tfrac{a_n^2}{4} \geq 0 \\ \iff & \left(\tfrac{1}{a_n} - \tfrac{a_n}{2}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Somit gilt $a_{n+1}^2 \geq 2$.

(b)

$$\begin{aligned} a_{n+1} \leq a_n \iff & \tfrac{1}{a_n} + \tfrac{a_n}{2} \leq a_n \\ \iff & \tfrac{1}{a_n} - \tfrac{a_n}{2} \leq 0 \\ \iff & 1 - \tfrac{a_n^2}{2} \leq 0 \\ \iff & a_n^2 \geq 2 \end{aligned}$$

Somit ist die Folge a_n fallend und beschränkt nach unten. Das impliziert die Konvergenz.

(c) Sei $a_n \to A > 1$. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2}\right) = \frac{1}{A} + \frac{A}{2}$$

und somit

$$A = \frac{1}{A} + \frac{A}{2}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu $A^2 = 2$ und somit $A = \sqrt{2}$.

Diese Iteration ist eine Methode um $\sqrt{2}$ approximativ zu berechnen, nur mit Hilfe der algebraischen Grundoperationen. Später werden wir dieses Verfahren wiederfinden als **Methode von Newton**. $\square$

6–22 Beispiel : (Geometrische Summe)
Sei $|q| < 1$ und $a \in \mathbb{R}$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a\, q^k = a\,(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n)$$

Verifizieren Sie, dass diese Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösung: Setzen Sie $a = 1$ und untersuchen Sie die Differenz von s_n und $q\, s_n$.

$$\begin{array}{rcccccccc|c}
\frac{s_n}{a} & = & 1 & +q & +q^2 & +q^3 & +q^4 & +\ldots+ & q^n & & + \\
q\,\frac{s_n}{a} & = & & +q & +q^2 & +q^3 & +q^4 & +\ldots+ & q^n & +q^{n+1} & - \\
\hline
(1-q)\,\frac{s_n}{a} & = & 1 & & & & & & & -q^{n+1} &
\end{array}$$

Somit gilt für $q \neq 1$

$$s_n = \frac{a\,(1 - q^{n+1})}{1-q}$$

Wegen $|q| < 1$ gilt $q^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$ und wir haben

$$s_n \to \frac{a}{1-q} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\diamondsuit$

6–23 Beispiel : Sei

$$s_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Zeigen Sie, dass diese Folge wachsend und beschränkt ist. Somit ist sie konvergent, und es gibt eine Zahl $e \in \mathbb{R}$ (Euler) mit $s_n \to e = 2.71828182845904523536\ldots$. Mit Hilfe Der Definition $0! := 1$ kann man das umschreiben zu

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Lösung: Wegen

$$s_n = s_{n-1} + \frac{1}{n!}$$

ist die Folge monoton wachsend. Mit Hilfe einer geometrischen Folge als Majorante erhalten wir

$$\begin{aligned}
s_n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n!}\\
&\leq 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+2=3
\end{aligned}$$

Somit ist die monoton wachsende Folge nach oben beschränkt und mit Hilfe der Charakterisierung von $\mathbb{R}$ in Theorem 6–12 konvergent.

$\diamondsuit$

6–24 Satz : *Die Zahl e ist nicht rational* *($e \notin \mathbb{Q}$).*

Beweis : Durch Widerspruch
Annahme: $e = a/b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$
Man weiss, dass $b\cdot e \in \mathbb{N}$ und somit $b!\cdot e \in \mathbb{N}$. Wegen

$$s_b = \sum_{k=0}^{b}\frac{1}{k!} \quad , \qquad r_b = \sum_{k=b+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

gilt

$$b!\cdot e = b!\cdot s_b + b!\cdot r_b$$

Offensichtlich gilt $b!\cdot s_b \in \mathbb{N}$ und somit $b!\cdot r_b \in \mathbb{N}$. Ebenso gilt aber

$$\begin{aligned}
b!\cdot r_b &= \sum_{k=b+1}^{\infty}\frac{b!}{k!}\\
&< \sum_{k=b+1}^{\infty}\frac{1}{(b+1)^{k-b}}\\
&< \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(b+1)^{j}} = \frac{1}{b+1}\,\frac{1}{1-\frac{1}{b+1}}\\
&= \frac{1}{b} < 1
\end{aligned}$$

Somit haben wir eine natürliche Zahl zwischen 0 und 1 gefunden. Das ist sicher falsch und somit muss bereits die Annahme falsch sein. $\square$

6.1.2 Teilfolgen

6–25 Definition : Sei $\{a_n\}$ ein Folge von Zahlen und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng wachsende Funktion. Dann ist die neue Folge

$$b_n = a_{k\,(n)}$$

eine **Teilfolge** der Folge $\{a_n\}$.

6–26 Beispiel : Betrachten Sie die Folge $a_n = 1/n$ und die Funktion $k\,(n) = 3n$. Dann ist $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wachsend und $b_n = a_{k\,(n)} = 1/(3n)$ ist eine Teilfolge von a_n. $\diamondsuit$

6–27 Beispiel : Verifizieren Sie, dass

$$\sin(1) \quad , \quad \sin(4) \quad , \quad \sin(9) \quad , \quad \sin(16) \quad , \quad \sin(25) \quad \ldots$$

eine Teilfolge ist von

$$\sin(1) \quad , \quad \sin(2) \quad , \quad \sin(3) \quad , \quad \sin(4) \quad , \quad \sin(5) \quad \ldots$$

Aber

$$\sin(2) \quad , \quad \sin(1) \quad , \quad \sin(4) \quad , \quad \sin(3) \quad , \quad \sin(6) \quad \ldots$$

ist keine Teilfolge von

$$\sin(1) \quad , \quad \sin(2) \quad , \quad \sin(3) \quad , \quad \sin(4) \quad , \quad \sin(5) \quad \ldots$$

$\diamondsuit$

6–28 Theorem : *Eine Folge a_n konvergiert genau dann gegen L, wenn* **jede** *Teilfolge gegen L konvergiert.*

6–29 Beispiel : Die Folge $a_n = (-1)^n$ konvergiert nicht, weil die Teilfolge $b_n = a_{2n}$ gegen 1 konvergiert, aber die Teilfolge $c_n = a_{2n+1}$ gegen -1. $\diamondsuit$

6.1.3 Reihen von Zahlen

Definitionen und einfache Beispiele

6–30 Definition : Sei a_k eine Folge von Zahlen. Dann betrachtet man die neue Folge

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Diese neue Folge heisst eine **Reihe**. s_n heisst auch n–te **Partialsumme**. Die Reihe ist konvergent falls die Folge der s_n konvergiert. Man verwendet die Notationen.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Konvergiert die Reihe, so schreibt man auch.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \quad .$$

6–31 Beispiel : (Arithmetische Reihe)
Seien c und d gegebene Konstanten und man konstruiert die Folge $a_k = c + k\,d$. Daraus kann die **arithmetische Reihe**

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (c + k\,d)$$

gebildet werden. Es ist leicht zu sehen, dass diese Reihe nicht konvergiert. ♢

6–32 Beispiel : (Geometrische Reihe)
Seien c und q gegebene Konstanten und man konstruiert die Folge $a_k = c\,q^k$. Daraus kann die **geometrische Reihe**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (c\,q^k)$$

gebildet werden. Diese Reihe konvergiert für $|q| < 1$ und der Grenzwert kann leicht bestimmt werden.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (c\,q^k) = \lim_{n\to\infty} c\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{c}{1-q}$$

♢

6–33 Beispiel : Im vorangenenden Abschnitt haben wir gezeigt, dass die Reihe

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

konvergiert. ♢

6–34 Theorem : *(Notwendige Bedingung)*
Falls die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

konvergiert, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad .$$

Somit ist $a_n \to 0$ eine notwendige Bedingung, aber keine hinreichende Bedingung, wie das folgende Beispiele zeigt.

6–35 Satz : *Die harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

Beweis :
Version 1: (Siehe [Apos92b, p.419])

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots \\
&\geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots
\end{aligned}$$

Da die Folge der Partialsummen somit nicht beschränkt ist kann die harmoniche Reihe nicht konvergieren.
Version 2: (Siehe [Apos92b, p.400])
Durch Widerspruch. Annahme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = s$$

Das impliziert

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\,k} = \frac{s}{2}$$

und somit

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots = s - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\,k} = \frac{s}{2}$$

Das kann aber nicht richtig sein wegen

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{1}{5} > \frac{1}{6} \ldots$$

Somit muss die Annahme falsch sein. □

6–36 Theorem : *(Rechenregeln für Reihen)*
Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zwei konvergente Reihen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

Dann gilt

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot A$, *wobei c eine beliebige Konstante ist.*
3. *Aber im allgemeinen* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n) \neq A \cdot B$
4. *Aber im allgemeinen* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n / b_n) \neq A/B$

Konvergenzkriterien

Meistens sind für Probbleme mit Reihen zwei Fragen zu beantworten:

1. Konvergiert die Reihe?
2. Bestimme den Grenzwert, falls er existiert.

Bei vielen Beispielen werden wir in der Lage sein die erste Frage zu beantworten, auch ohne den Grenzwert explizit zu berechnen.

6–37 Theorem : *(von Leibniz)*
Sei $\{a_k > 0\}$ eine fallende Folge und $a_k \to 0$. Dann ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$$

eine konvergente Folge

Beweis : Der Beweis beruht auf einer Intervallschachtelung und eine Illustration wird in der Stunde gegeben. □

6–38 Beispiel : Sei

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert. ♢

6–39 Beispiel : Für das Konvergenzkriterium von Leibniz ist die Bedingung a_k monoton fallend notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt.

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ \frac{1}{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Betrachten Sie nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

und bestimmen Sie einige Terme der Reihe, um zu verifizieren, dass sie nicht konvergiert. ♢

6–40 Beispiel : Sei

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert. ♢

Beweis : Man schreibt den Term $1/k^2$ künstlich als eine Differenz von zwei Termen. Es gilt

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k\,(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

und somit

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2 \end{aligned}$$

Somit ist diese Reihe monoton wachsend und beschränkt und deshalb konvergent. □

Bemerkung: Man kann zeigen, dass (siehe [Apos92b, p.428/400])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Das bei weitem wichtigste Konvergenzkriterium für Reihen ist das **Majorantenkriterium**

6–41 Theorem : *(Majorantenkriterium)*
Sei $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq M$ und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$$

Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

Das folgende Diagramm illustriert dieses Resultat.

$$\left. \begin{array}{c} |a_n| \leq b_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \end{array} \right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

Um zu zeigen, dass eine Reihe divergiert kann man das **Minorantenkriterium** einsetzen.

6–42 Theorem : *(Minorantenkritrium)*
Sei $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \geq M$ und weiter sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

divergent. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ebenfalls divergent.

Das folgende Diagramm illustriert dieses Resultat.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq a_n \leq b_n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

6–43 Beispiel : Sei

$$a_n = \frac{\cos(n^2 - \sinh n)}{n^2 + n + 1} \quad .$$

Um die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

zu untersuchen verwendet man am besten $|a_n| \leq 1/n^2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Aufgrund des Majorantenkriteriums konvergiert die Reihe. ♢

6–44 Beispiel : Verifizieren Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(1/n^2)}{n}$$

nicht konvergiert. ♢

6–45 Beispiel : Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

divergiert für alle $0 < p \leq 1$. ♢
Beweis : Vergleichen mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. □

6–46 Satz : *Man kann zeigen, dass die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergiert für alle $p > 1$ (siehe [Apos92b, p.400]).

6–47 Satz : *Man kann zeigen, dass*

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

(siehe [Apos92a, p.432]). Beachten Sie die Aufgaben (6–21), (6–22) und (6–23).

6–48 Definition : Eine Reihe heisst **absolut konvergent** wenn die Reihe der Absolutbeträge konvergiert. Eine konvergente Reihe, die aber nicht absolut konvergiert, heisst **bedingt konvergent**.

6–49 Beispiel : Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

ist absolut konvergent. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

ist bedingt konvergent. ♢

6–50 Definition : Sei a_n eine Folge von Zahlen und $k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ eine bijektive Funktion. Dann heisst die neue Folge

$$b_n = a_{k(n)}$$

eine **Umordnung** der Folge a_n.

6–51 Beispiel : Verifizieren Sie, dass

$$\frac{1}{2}\;,\;\frac{1}{1}\;,\;\frac{1}{4}\;,\;\frac{1}{3}\;,\;\frac{1}{6}\;,\;\frac{1}{5}\;,\;\frac{1}{8}\;,\ldots$$

eine Umordnung der Folge

$$\frac{1}{1}\;,\;\frac{1}{2}\;,\;\frac{1}{3}\;,\;\frac{1}{4}\;,\;\frac{1}{5}\;,\;\frac{1}{6}\;,\;\frac{1}{7}\;,\ldots$$

ist. ♢

6–52 Beispiel : Verifizieren Sie, dass

$$\frac{1}{1},\;\frac{1}{2},\;\frac{1}{4},\;\frac{1}{3},\;\frac{1}{9},\;\frac{1}{5},\;\frac{1}{25},\;\frac{1}{6},\;\frac{1}{36},\;\frac{1}{7},\;\frac{1}{49},\;\frac{1}{8},\;\frac{1}{64},\;\frac{1}{10},\;\frac{1}{100},\;\frac{1}{11},\ldots$$

eine Umordnung der Folge

$$\frac{1}{1},\;\frac{1}{2},\;\frac{1}{3},\;\frac{1}{4},\;\frac{1}{5},\;\frac{1}{6},\;\frac{1}{7},\ldots$$

ist. ♢

6–53 Theorem : *Ist die aus der Folge a_n gebildete Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

absolut konvergent, so konvergiert die Reihe gebildet aus einer beliebigen Umordnung gegen den selben Grenzwert L.

6–54 Satz : *Ist die aus der Folge a_n gebildete Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

bedingt konvergent, so müssen Umordnungen nicht gegen den selben Wert konvergieren, sie können auch divergieren. Man kann sogar eine beliebige Zahl M vorgeben und dann eine Umordnung finden, so dass die neue Reihe gegen M konvergiert.

6–55 Satz : *(Doppelreihen)*
Häufig treten Reihen mit zwei Summationen auf

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j}$$

Gilt eine der beiden Bedingungen

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |a_{i,j}| < \infty$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} |a_{i,j}| < \infty$$

so ist die Doppelreihe absolut konvergent und wir können somit die Terme umordnen. Statt zuerst über eine Zeile (oder Spalte) zu summieren, können wir über eine Diagonale summieren. Die Abbildung 6.2 illustriert diese Idee. Wir erhalten das Resultat.

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} a_{k,j-k}$$

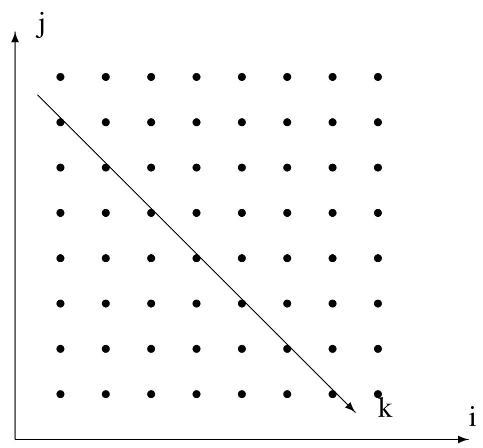


Abbildung 6.2: Illustration zum Doppelreihensatz

6–56 Theorem : *(Multiplikation von Reihen)*
Seien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$$

zwei absolut konvergente Reihen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bestimmt man

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad .$$

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A \cdot B$$

und die neue Reihe konvergiert absolut. Diese neue Reihe heisst auch **Cauchy–Produkt**.

6–57 Theorem : *(Quotientenkriterium)*
Um die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

auf Konvergenz zu untersuchen kann man den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$$

bestimmen. Ist dies möglich, so sind drei Fälle zu unterscheiden.

(a) Ist $q < 1$ so konvergiert die Reihe absolut.

(b) Ist $q > 1$ so ist die Reihe divergent.

(c) Ist $q = 1$ so kann die Reihe konvergieren oder divergieren.

Beweis : Der Beweis beruht auf dem Majorantenkriterium und einem Vergleich mit einer geometrischen Reihe. Das Resultat ist als Kriterium von d'Alembert[1] bekannt. □

6–58 Beispiel : Verifizieren sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} < \infty \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

♢

[1]Jean Baptiste le Rond D'Alembert (1717–1783), französischer Mathematiker und Physiker

6–59 Theorem : *(Wurzelkriterium)*
Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

wobei $a_n \to 0$. *Nun bestimmt man den Grenzwert (falls möglich)*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

(a) Ist $r < 1$ *so konvergiert die Reihe absolut.*

(b) Ist $r > 1$ *so ist die Reihe divergent.*

(c) Ist $r = 1$ *so kann die Reihe konvergieren oder divergieren.*

Beweis : Vergleich mit einer geometrischen Reihe

(a) Wir nehmen ein $r < q < 1$. Wegen $\sqrt[n]{a_n} \to r$ gilt $a_n \leq q^n$ für alle $n \geq n_0$ (n_0 genügend gross). Somit

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n < \infty$$

(b) Wir nehmen ein $1 < q < r$. Wegen $\sqrt[n]{a_n} \to r$ gilt $a_n > q^n$ für alle $n \geq n_0$ (n_0 genügend gross). Somit

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$$

und das Minorantenkriterium führt zum gewünschten Resultat.

□

6–60 Beispiel : Überprüfen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$$

♢

Beweis : Verwenden Sie das Quotientenkriterium und

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Aufgabe 6–21 zeigt, dass

$$(1 + \frac{1}{n})^n$$

eine wachsende Folge ist und somit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9} < 1$$

Man könnte für diese Aufgabe auch die Approximationsformel von Stirling für $n!$ verwenden. □

6–61 Beispiel : Überprüfen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$$

aber die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

ist divergent. ♢

6.1.4 Arithmetisches und geometrisches Mittel

Dieses Resultat gehört nicht zum Thema Folgen und Reihen. Es kann verwendet werden um die Aufgaben 6–21 und 6–22 zu lösen.

6–62 Theorem : *Seien $a_1, a_2, \ldots a_n$ positive Zahlen. Dann gilt*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Diese Ungleichung besagt, dass das geometrische Mittel immer kleiner als das arithmetische Mittel ist.

Beweis :

(a) Im Spezialfall $n = 2$ gilt

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2)^2 &= a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 \\ (a_1 - a_2)^2 &= a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 \end{aligned}$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, so folgt

$$(a_1 + a_2)^2 - (a_1 - a_2)^2 = 4a_1 a_2$$

und somit

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \sqrt{a_1 a_2 + \frac{1}{4}\,(a_1 - a_2)^2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

Man sieht leicht, dass Gleicheit genau dann eintritt, wenn $a_1 = a_2$. Weiter sieht man, dass die Abweichung des geometrischen Mittels vom arithmetischen bestimmt ist durch den Ausdruck $(a_1 - a_2)^2$.

(b) Bei n Zahlen können wir sie so umordnen, dass

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n$$

Mit den Abkürzungen

$$M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{und} \quad G = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

müssen wir nun zeigen, dass $G \leq M$. Ist $a_1 = a_n$, so ist offensichtlich $G = M$. Somit müssen wir nur den Fall $a_1 < a_n$ betrachten. Wir setzen

$$\tilde{a}_1 = M \quad , \quad \tilde{a}_n = a_n + a_1 - M \quad \text{und} \quad \tilde{a}_k = a_k \quad \text{für} \quad k = 2, 3, 4, \ldots, n-1$$

Das arithmetische Mittel bleibt gleich. Wegen

$$|\tilde{a}_n - \tilde{a}_1| < |a_n - a_1|$$

und dem Beweisschritt (a) gilt

$$\sqrt{a_1 a_n} < \sqrt{\tilde{a}_1 \tilde{a}_n} \leq \frac{\tilde{a}_1 + \tilde{a}_n}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Somit gilt

$$G = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \tilde{a}_k} = \tilde{G} \quad \text{und} \quad \tilde{M} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k = M$$

Wir haben des geometrische Mittel vergrössert, ohne das arithmetische Mittel zu ändern.

(c) Wegen (a) und (b) weiss man, dass $G = M$ genau dann wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

(d) Die obigen Überlegungen ersetzen die kleinste Zahl a_1 durch M. Das ganze kann wiederholt werden. Bei jeden Schritt wird eine neue Zahl zu M. Nach höchstens n Schritten gilt $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_n = M$ und somit $G \leq \tilde{G} = \tilde{M} = M$

□

6.2 Stetige Funktionen

In der Praxis treten nicht selten **unstetige** Funktionen auf. Ein bekannter unstetiger Vorgang ist der Schmelzvorgang. Wird einem festen Körper Wärme zugeführt, so steigt seine Temperatur zunächst mit dem Wärmeinhalt an. Da zum Übergang von der festen zu flüssigen Phase eine bestimmte Wärmemenge notwendig ist erhöht sich der Wärmeinhalt, während die Temperatur konstant bleibt. Ein Wasserbad mit Eiswürfeln hat eine Temperatur von $0°C$. Fasst man den Wärmeinhalt als Funktion der Temperatur auf, so ergibt sich eine unstetige Funktion. Der Graph enthält einen Sprung.

Hier ein Beispiel einer stetigen Funktion

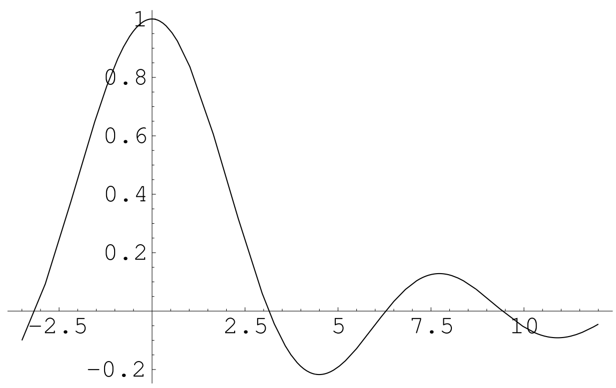


Abbildung 6.3: Graph von $(\sin x)/x$

6–63 Beispiel : Die Funktion

$$y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ist definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bei $x = 0$ entsteht der Ausdruck $\frac{0}{0}$, der Wert $f(0)$ ist nicht definiert. Nun stellt sich die folgende Frage: welche Werte nimmt die Funktion $f(x)$ an für x „nahe“ bei 0? ♢

Für einfachere Funktionen kann die Antwort auf die obige Frage leicht gegeben werden.

6–64 Beispiel : Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^2 + 1$. Ist $\{x_n\}$ eine Folge, die gegen 2 konvergiert, so gilt $f(x_n) = x_n x_n + 1 \to 5 = f(2)$. Wir benötigen nicht einmal die genaue Form der Folge, es genügt zu wissen, dass sie gegen 2 konvergiert. Wir werden sagen, dass die Funktion f stetig ist bei $x = 2$. $\diamondsuit$

6.2.1 Definitionen und Grundresultate

6–65 Definition : (Grenzwert einer Funktion)
Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $z \in I$. Man sagt, dass $f(x)$ **gegen** L **konvergiert, falls** $x \to z$, genau dann, wenn für jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \to z$ gilt: $f(x_n) \to L$. Man verwendet die Notationen

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to z} f(x) = L\\ &f(x) \to L \quad \text{falls} \quad x \to z\\ &f(x) \underset{x\to z}{\longrightarrow} L\end{aligned}$$

In der obigen Definition ist es wichtig, dass man den selben Grenzwert L erhält für **alle** Folgen x_n mit $x_n \to z$.

6–66 Beispiel : Verwenden Sie die Rechenregeln für Grenzwerte um die folgenden Grenzwerte von Funktionen zu bestimmen.

(a)

$$\lim_{x\to 0} (x+1) = 1$$

(b)

$$\lim_{x\to 2} x^3 = 8$$

(c)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x^3} = \frac{3}{8}$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = ?$$

(e)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^6 - x^3 + 1}{x^3 - 2x + (1-x)} = -1$$

Bei den meisten obigen Beispielen gilt

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Solche Funktionen heissen stetig bei $x = a$. $\diamondsuit$

Ziel dieses Kapitels ist es, Methoden zu finden, um Grenzwerte von Funktionen zu berechnen und einige Resultate über stetige Funktionen herzuleiten.

Zuerst betrachten wir zwei Beispiele, für die es **nicht** leicht ist den Grenzwert zu bestimmen. Aufgrund von "vernünftigen" Überlegungen kann man zu falschen Schlussfolgerungen kommen.

6–67 Beispiel : Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x^{1/100} - 0.933$$

und bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(a) Verwenden Sie $x = 0.1$, $x = 0.01$, $x = 0.001$, um den Grenzwert zu erraten.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert.

Lösung: Die Tabelle

x=	0.1	0.01	0.001	...
f (x)=	0.0442372	0.0219926	0.000254301	...

lässt die Vermutung aufkommen, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Aber es gilt $\lim_{x\to 0} \sqrt[100]{x} = 0$ und somit $\lim_{x\to 0} f(x) = -0.933$.

◇

6–68 Beispiel :

(a) Finden Sie eine Folge $x_n \to 0$ mit $\sin(1/x_n) \to 0$.

(b) Finden Sie eine Folge $x_n \to 0$ mit $\sin(1/x_n) \to 1$.

(c) Finden Sie eine Folge $x_n \to 0$ mit $\sin(1/x_n) \to 0.5$.

(d) Finden Sie eine Folge $x_n \to 0$ mit $\sin(1/x_n) \to -1$.

(e) Verifizieren Sie, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ nicht existiert.

◇

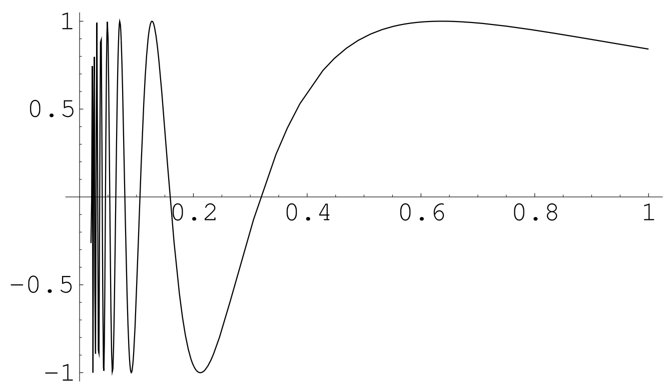


Abbildung 6.4: Graph von $\sin(1/x)$

Mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen erhalten wir die entsprechenden Resultate für Funktionen. Diese einfachen Rechenregeln sind bei weitem die wichtigsten, um Grenzwerte von Funktionen zu bestimmen.

6–69 Theorem : *Seien f und g zwei auf I definierte Funktion und $z \in \mathbb{R}$ mit*

$$\lim_{x\to z} f(x) = A \quad \text{und} \quad \lim_{x\to z} g(x) = B$$

Dann gilt

1. $\lim_{x\to z} (f(x) + g(x)) = A + B$
2. $\lim_{x\to z} (cf(x)) = c \cdot A$, *wobei c eine beliebige Konstante ist.*
3. $\lim_{x\to z} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
4. $\lim_{x\to z} (f(x)/g(x)) = A/B$ *falls* $B \neq 0$

6–70 Definition : (Stetige Funktionen)
Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $z \in I$. Man sagt, die Funktion f sei **stetig bei** $x = z$ falls

1. $\lim_{x \to z} f(x)$ existiert
2. $\lim_{x \to z} f(x) = f(z)$

Man sagt, die Funktion sei **stetig auf** I, falls sie bei allen Werten $z \in I$ stetig ist.

Die meisten Funktion, die wir in Anwendungen antreffen, werden stetig sein. Hier einige Beispiele.

6–71 Beispiel :

(a) Die Funktion $f(x) = x + 1$ ist stetig bei $x = 2.65$.

(b) Die Funktion $f(x) = x + 1$ ist stetig bei $x = 0$.

(c) Die Funktion $f(x) = x + 1$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(d) Die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 3$ ist stetig bei $x = 7$.

(e) Die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 3$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(f) Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - 2\,x + 3}{x + 1}$ ist stetig bei $x = 7$.

(g) Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - 2\,x + 3}{x + 1}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, ausser bei $x = -1$.

$\diamondsuit$

Man kann zeigen, dass die folgende Eigenschaft äquivalent ist zur obigen Definition.

6–72 Theorem : *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig für $x \in I$, wenn gilt:*
Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $z \in I$ mit $|z - x| < \delta$ die Ungleichung $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$ richtig ist.

Mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen erhalten wir das folgende Resultat.

6–73 Theorem : *Seien g und g zwei Funktionen von I auf $\mathbb{R}$ und $z \in I$ mit*

$$\lim_{x \to z} f(x) = f(z) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to z} g(x) = g(z)$$

(f und g sind stetig für $z \in I$)
Dann gilt

(a) Die Funktion $f(x) + g(x)$ ist stetig $z \in I$.

(b) Die Funktion $c \cdot f(x)$ ist stetig $z \in I$. wobei c eine Konstante ist.

(c) Die Funktion $f(x) \cdot g(x)$ ist stetig für $z \in I$.

(d) Die Funktion $f(x)/g(x)$ ist stetig für alle $z \in I$ mit $g(z) \neq 0$.

Als einfaches, aber wichtiges Resultat ergibt sich daraus

6–74 Satz :

(a) Polynome sind überall stetig.

(b) Rationale Funktionen sind überall stetig, ausser bei den Nullstellen des Nenners.

6–75 Satz : *Die Funktion* $f(x) = \sqrt{x}$ *ist stetig für* $x > 0$.

Beweis :
1. Schritt :
Um den Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \sqrt{1+h}$$

für $|h| < 1$ zu untersuchen verwenden wir

$$\left(\sqrt{1+h}\right)^2 = 1 + h \leq 1 + |h| \leq 1 + 2|h| + h^2 = (1 + |h|)^2$$

und

$$\left(\sqrt{1+h}\right)^2 \geq 1 - |h| \geq 1 - 2|h| + h^2 = (1 - |h|)^2$$

Somit weiss man, dass

$$1 - |h| \leq \sqrt{1+h} \leq 1 + |h|$$

und das Sandwich–Theorem liefert die gewünschte Aussage.

$$\lim_{h \to 0} \sqrt{1+h} = 1$$

2. Schritt :
Es ist zu zeigen, dass

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{x}$$

Mit der Abkürzung $h = \frac{\Delta x}{x}$ gilt

$$\sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{x\,(1 + \frac{\Delta x}{x})} = \sqrt{x}\,\sqrt{1+h}$$

Wegen $\Delta x \to 0$ gilt auch $h \to 0$ und somit $\sqrt{1+h} \to 1$. Damit ist der Satz bewiesen.

□

6–76 Satz :

(a) Die Funktion $f(x) = \sin x$ *ist stetig auf* $\mathbb{R}$.

(b) Die Funktion $f(x) = \cos x$ *ist stetig auf* $\mathbb{R}$.

(c) Die Funktion $f(x) = \tan x$ *ist stetig auf* $\mathbb{R}$*, ausser bei den Nullstellen von* $\cos x$*, d.h.* $(x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N})$.

Beweis : Mit einem geometrischen Argument kann man zeigen, dass

$$\lim_{h \to 0} \sin h = 0$$

Nun kann man mit den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen die gewünschten Resultate herleiten. Ein Beispiel sei hier sorgfältig durchgeführt.

(a) Für $-0.5 \leq h \leq 0.5$ weiss man, dass

$$\cos\, h = \sqrt{1 - \sin^2\, h} \to \sqrt{1+0} = 1 \quad \text{falls} \quad h \to 0$$

(b)

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h \to \sin x \cdot 1 + 0$$

□

6–77 Satz : *Die Funktion $f(x) = e^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.*

6–78 Theorem : *Kompositionen von stetigen Funktionen sind stetig.*

Beweis : Seien f und g stetige Funktionen und x_n eine konvergente Folge mit $x_n \to x$. Zu zeigen ist $g(f(x_n)) \to g(f(x))$. Da f stetig ist gilt

$$z_n := f(x_n) \to f(x) =: z$$

und aufgrund der Stetigkeit von g gilt dann

$$g(f(x_n)) = g(z_n) \to g(z) = g(f(x))$$

□

6–79 Beispiel : Verifizieren Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \sin \frac{1 - x^2 + 4x}{1 + x^2}$$

überall stetig ist. ♢

6–80 Theorem : *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

(a) *Falls die Funktion f monoton ist, so ist sie invertierbar, d.h. es gibt eine Funktion g mit*

$$g(f(x)) = x \quad \text{für} \quad x \in D$$

*Die Funktion g heisst die **inverse Funktion** und die übliche Notation ist*

$$g(z) = f^{-1}(z)$$

(b) *Ist die Funktion f monoton und stetig, so ist auch die inverse Funktion f^{-1} monoton und stetig.*

Winkel x	$\sin\, x$	$\dfrac{\sin\, x}{x}$
1.000	0.84147098	0.8414709848
0.200	0.19866933	0.9933466540
0.100	0.09833342	0.9983341665
0.010	0.00999983	0.9999833334
0.001	0.00099993	0.9999998333
0.000	0.00000000	nicht definiert

Tabelle 6.1: $\sin x \approx x$ für $|x| \ll 1$

6–81 Satz :

(a) Sei $D = \{x > 0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(x) = x^n$ ist monoton und stetig. Somit ist auch die inverse Funktion $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ monoton und stetig.

(b) Sei $D = [-\pi/2, \pi/2]$. Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist monoton und stetig. Somit ist auch die inverse Funktion $f^{-1}(x) = \arcsin x$ monoton und stetig.

(c) Sei $D = [0, \pi]$. Die Funktion $f(x) = \cos x$ ist monoton und stetig. Somit ist auch die inverse Funktion $f^{-1}(x) = \arccos x$ monoton und stetig.

Aufgrund einer geeigneten Graphik vermutet man, dass $\sin x \approx x$ für $|x| \ll 1$. Die Tabelle 6.1 illustriert dies. Es ist wichtig die Winkel im **Bogenmass** anzugeben.

6–82 Satz :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Beweis : In der Abbildung 6.5 kann man ablesen, dass die Fläche des Kreissegmentes kleiner ist als die

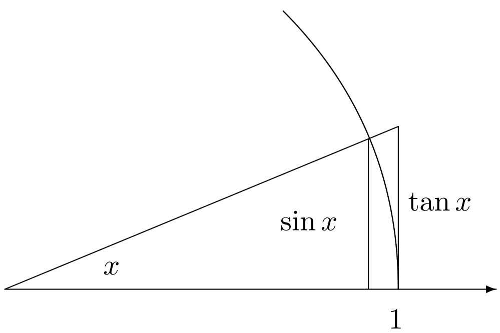


Abbildung 6.5: Beweis von $\dfrac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$

Fläche des grossen Dreiecks und die Höhe $\sin x$ kürzer als die Länge des Bogenstücks x. Somit gelten für kleine Winkel $x > 0$ die Ungleichungen

$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

richtig ist (x entspricht der Länge des Bogenstücks). Diese Ungleichung wird durch $\sin x$ geteilt und anschliessend invertiert.

$$\begin{array}{rcccl} 1 & < & \frac{x}{\sin x} & < & \frac{1}{\cos x} \\ 1 & > & \frac{\sin x}{x} & > & \cos x \end{array}$$

Nun bildet man den Grenzwert $x \longrightarrow 0+$ und erhält das gewünschte Resultat. □

6–83 Satz : *Die folgenden Resultate basieren auf den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen. Die Grenzwerte werden später den Ableitungen der trigonometrischen Funktionen entsprechen.*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\sin(x)$$

Beweis : Wir untersuchen nur den ersten Grenzwert, die Rechynungen für den zweiten sind vergleichbar.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\ \cos(h) + \cos(x)\ \sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \frac{\cos(x)\ \sin(h)}{h} + \frac{\sin(x)\ (\cos(h) - 1)}{h} \\ &= \cos(x)\ \frac{\sin(h)}{h} + \sin(x)\ \frac{(\cos(h)-1)(\cos(h)+1)}{h\ (\cos(h)+1)} \\ &= \cos(x)\ \frac{\sin(h)}{h} - \sin(x)\ \frac{\sin^2(h)}{h\ (\cos(h)+1)} \\ &= \cos(x)\ \frac{\sin(h)}{h} - \frac{\sin(x)}{\cos(h)+1}\ \frac{\sin(h)}{h}\ \sin(h) \\ &\longrightarrow \cos(x) \cdot 1 - \frac{\sin(x)}{2} \cdot 1 \cdot 0 = \cos(x) \quad \text{falls} \quad h \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Die Aufgabe 6–49 verlangt ähnliche Überlegungen und Berechnungen. □

6–84 Satz : *Sei $f(x)$ eine stetige Funktion mit $f(a) = 0$ und $g(x)$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass*

$$\lim_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = 0$$

6.2.2 Einseitige Grenzwerte

6–85 Definition : (Rechtsseitiger Grenzwert)
Sei I ein Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion und $z \in I$. Dann heisst der Ausdruck

$$\lim_{x \to z+} f(x) = L$$

rechtsseitiger Grenzwert der Funktion f bei z, falls $f(x_n) \to L$ für alle Folgen x_n mit $x_n > z$ und $x_n \to z$.

Die Definition des **linksseitigen Grenzwertes** erfolgt sinngemäss.

6–86 Theorem :

$$\lim_{x\to z} f(x) = L$$

ist genau dann richtig, wenn

$$\lim_{x\to z+} f(x) = L \qquad \lim_{x\to z-} f(x) = L$$

6–87 Satz : *Die Funktion $f(x)$ ist genau dann stetig bei $x = z$, wenn*

$$\lim_{x\to z+} f(x) = \lim_{x\to z-} f(x) = f(z)$$

6–88 Satz : *Die Funktion $f(x)$ ist nicht stetig bei $x = z$, falls*

$$\lim_{x\to z+} f(x) \neq \lim_{x\to z-} f(x)$$

oder

$$\lim_{x\to z+} f(x) = \lim_{x\to z-} f(x) \neq f(z)$$

oder

$$\lim_{x\to z} f(x) \quad \textit{existiert nicht}$$

6–89 Beispiel : Verifizieren Sie, dass

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{|x|} = 1 \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{|x|} = -1$$

Somit ist die Funktion $g(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ nicht stetig bei $x = 0$, unabhängig vom Wert, den wir für $g(0)$ wählen.

Aber die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist stetig für alle $x \in \mathbb{R}$. ♢

6–90 Beispiel : Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{für } x \neq 3 \\ 6 & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

stetig ist für alle $x \in \mathbb{R}$. Aber die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{für } x \neq 3 \\ 5.5 & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

ist nicht stetig bei $x = 3$. Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen. ♢

6–91 Beispiel : Sei $\alpha > 0$. Zu berechnen ist der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha e^{1/x}$$

Verwenden Sie $z < e^z$ für $z > 0$.

Lösung:

$$\begin{aligned} x^\alpha e^{1/x} &= (x^{1/2} \exp \frac{1}{2x\alpha})^{2\alpha} \\ &> (x^{1/2} \frac{1}{2x\alpha})^{2\alpha} \\ &= (x^{-1/2} \frac{1}{2\alpha})^{2\alpha} \\ &= x^{-\alpha} \, (\frac{1}{2\alpha})^{2\alpha} \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Wir haben eine Minorante gefunden, die gegen ∞ konvergiert. Somit muss auch der ursprüngliche Ausdruck über alle Grenzen wachsen. ♢

Ersetzt man im obigen Beispiel x durch $1/x$, so erhält man das folgende wichtige Resultat.

6–92 Satz : *Für alle $\alpha > 0$ gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$$

6.2.3 Resultate über stetige Funktionen

6–93 Theorem : *(Zwischenwertsatz von Bolzano[2])*
Sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Sind die Vorzeichen der Funktionswerte bei a und b verschieden, so gibt es einen Punkt ξ in I mit $f(\xi) = 0$.

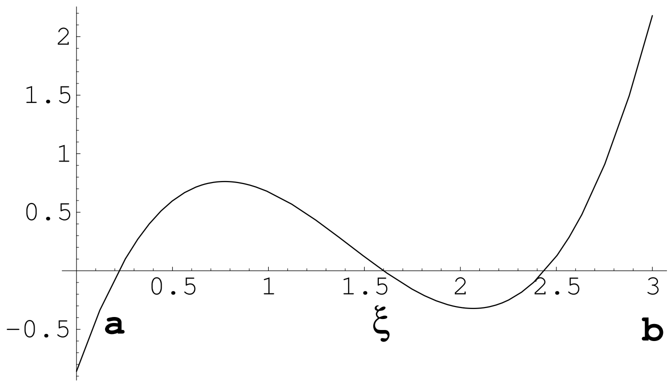


Abbildung 6.6: Zwischenwertsatz

[2]Bernhard Bolzano (1781–1848)

Beweis : Das Bisektionsverfahren erzeugt zwei Folgen a_n und b_n von Zahlen mit

$$a_n < b_n \qquad a_n \to \xi \qquad b_n \to \xi \qquad f(a_n) \leq 0 \qquad f(b_n) > 0$$

Da die Funktion stetig ist, wissen wir

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \quad \text{und} \quad f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$$

Somit muss $f(\xi) = 0$ sein. □

Bemerkung: Der Zwischenwertsatz ist falsch für nichtstetige Funktionen, z.B. $f(x) = 1/(x-1)$ auf dem Intervall $[0, \sqrt{2}]$.

6–94 Beispiel : Die Siedetemperatur T (in $°C$) von Wasser hängt von der Höhe über Meer (in m) ab gemäss der Formel

$$T(h) = 100.862 - 0.0415\sqrt{h + 431.03} \qquad .$$

Verwenden Sie den Zwischenwertsatz, um zu verifizieren, dass die Siedetemperatur für eine bestimmte Höhe zwischen $4000\ m$ und $4500\ m$ $98°C$ ist. Bestimmen Sie diese Temperatur möglichst genau mit Hilfe des Bisektionsverfahrens. ♢

Als einfache Konsequenz des Zwischenwertsatzes zeigt man, dass ein Polynom von ungeradem Grad mindestens eine Nullstelle hat.

6–95 Satz : *Sei $f(x)$ ein Polynom von ungeradem Grade. Zeigen Sie, dass dieses Polynom mindestens eine reelle Nullstelle hat.*

6–96 Theorem : *(Satz vom Maximum)*
Sei $f(x)$ eine stetige, auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ definierte Funktion. Dann gibt es ein $z \in [a,b]$ mit $f(x) \leq f(z)$ für alle $x \in [a,b]$. Die Funktion nimmt ihren Maximalwert an.

Bemerkung: Der Satz vom Maximum ist falsch, falls

(a) das Intervall nicht abgeschlossen ist.
Beispiel: $f(x) = x^2$ auf $(0,1)$.

(b) die Funktion nicht stetig ist
Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} x^3 & \text{falls } x < 3 \\ 2 & \text{falls } x \geq 3 \end{cases}$$

auf dem Intervall $[0,4]$.

(c) das Intervall nicht beschränkt ist.
Beispiel: $f(x) = -e^{-x^2}$ auf $\mathbb{R}$.

6.3 Aufgaben

6.3.1 Folgen

• Aufgabe 6–1:
Für die untenstehende Folge ist der Grenzwert a zu bestimmen. Finden Sie für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein zugehöriges m so dass

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq m$$

$$a_n = \frac{3n^2 - 21n\sin(n^2) + 2}{n^2 - 7n\sin(n^2)}$$

• Aufgabe 6–2:
Bestimmen Sie die Werte $c \in \mathbb{R}$ für welche die Folgen gegen 0 konvergieren.

$$(a) \quad n^c \qquad\qquad (b) \quad c^n \qquad\qquad (c) \quad \sqrt[n]{c} - 1$$

• Aufgabe 6–3:
Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{n!} \to \infty$.
Tip/Tuyau: $\sqrt[2n]{(2n)!} \geq \sqrt{n}$

• Aufgabe 6–4:
Sei $\{a_n\}$ eine Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n < 1 \quad .$$

Beweisen Sie, dass es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$a_n < 1 \quad \text{für alle} \quad n > m \quad .$$

• Aufgabe 6–5:
Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+3} \\ b &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{13\,n^2\,e^{-n}} \\ c &= \lim_{n\to\infty} \frac{3+4\,n^4}{2\,n - n^4 + 17} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d &= 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \\ e &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{3\,n}}{\cosh(3\,n) + n^2} \end{aligned}$$

• Aufgabe 6–6:
Verwende die Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen um die Limes der untenstehenden Folgen zu berechnen.

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1+n^4}{n^3-2n^2+13n+1} & \qquad b_n &= \tfrac{1+n^3}{n^3-2n^2+13n+1} \\ c_n &= \tfrac{1+n^2}{n^3-2n^2+13n+1} & \qquad d_n &= \tfrac{\cos\,n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

• Aufgabe 6–7:
Berechen Sie die Grenzwerte

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{n}{n+1} & a_n &= \tfrac{a\,n}{n+1} & a_n &= \tfrac{1}{1+c^n} \quad \text{für} \quad |c| < 1 \\ a_n &= \tfrac{a\,n+b}{c\,n+d} & a_n &= \tfrac{7n^3-1.234}{2n+3n^3} & a_n &= \tfrac{1}{1+c^n} \quad \text{für} \quad |c| > 1 \\ a_n &= \sqrt[n]{n^3} & & & a_n &= \tfrac{1}{1+c^n} \quad \text{für} \quad c = 1 \end{aligned}$$

Quelle : [Leup85, p.113].

• Aufgabe 6–8:
Bestimmen Sie die untenstehenden Grenzwerte Die **Binomialkoeffizienten** sind gegeben durch

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lllllllll} a_n & = & (\frac{1}{2})^{n-2} & a_n & = & \binom{n}{6} = \frac{n!}{6!\,(n-6)!} & a_n & = & \frac{1}{n^6}\binom{n}{6} \\ a_n & = & \sqrt[n]{n+12345} & a_n & = & \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(n\pi\right) & & & \end{array}$$

Quelle : [Leup85, p.113].

• Aufgabe 6–9:
Beweisen Sie mittels Widerspruch, dass die untenstehende Folge nicht konvergiert.

$$a_n = \frac{2^n}{n^2}$$

• Aufgabe 6–10:
Sei $x > 1$ eine positive Zahl und $a_0^2 > x$. Konstruieren Sie eine Folge mit Hilfe der Vorschrift

$$a_{n+1} = \frac{x}{2a_n} + \frac{a_n}{2}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $a_n^2 \geq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie das die Folge fallend ist und somit konvergent.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert

• Aufgabe 6–11:
Verwende die Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen um die Limes der untenstehenden Folgen zu berechnen.
Verwenden Sie $\cos(1/n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\begin{array}{lllllllll} a_n & = & \frac{1}{n}\cos\left(n^3\right) & b_n & = & \frac{\sin\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n}} & c_n & = & \frac{1+2n^3}{n^3+2n^2-n+10} \\ d_n & = & \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}} & e_n & = & \sqrt[n]{\sqrt{n}} & & & \end{array}$$

• Aufgabe 6–12:
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Die Überlegungen und Rechnungen sind zu zeigen.

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 17}{\sqrt{2n^2} - \sqrt{n}} \quad , \quad b = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{17n^3} \quad \text{und} \quad c = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^n}$$

• Aufgabe 6–13:
Verwenden Sie die Rechenregeln um die folgenden Grenzwerte zu berechnen.

$$a_n = n\cos\left(n^3\right) \quad , \quad b_n = \frac{\tan\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{n^3 + 2n^2 - n + 10}{1 + 2n^3}$$

• Aufgabe 6–14:
Verwenden Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen

$$\begin{array}{rclcrcl} a & = & \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{c\,n}} \quad \text{pour} \quad c>0 & \qquad & b & = & \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} \\ c & = & \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{c\,n}} & & d & = & \lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{e^n} \quad \text{für} \quad m\in\mathbb{N} \end{array}$$

• Aufgabe 6–15:
Finden Sie Folgen a_n und b_n, so dass

(a) a_n und b_n konvergieren, $c_n = a_n/b_n$ divergiert.

(b) a_n und b_n divergieren, $c_n = a_n + b_n$ konvergiert.

(c) a_n divergiert, b_n konvergiert und $c_n = a_n b_n$ divergiert.

(d) a_n divergiert, b_n konvergiert und $c_n = a_n b_n$ konvergiert.

• Aufgabe 6–16:
Betrachten Sie die Folge

$$a_n = \frac{n^2 + \cos(n) - 1}{n^3 + n - 1}$$

Bestimmen Sie den Grenzwert a und finden Sie für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist ein zugehöriges m zu finden, so dass

$$|a_n - a| \le \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \ge m$$

• Aufgabe 6–17:
Entscheiden Sie ob für die Folgen a_n die angegebenen Eigenschaften **wahr** oder **falsch** sind.

a_n	monoton	wachsend	beschränkt	konvergent	divergent
$1/n$					
$(-1)^{2-n}\frac{n^2}{2n^2+1}$					
$(-1)^{2n}\frac{n^2}{2n^2+1}$					
$-\sinh\left(\frac{n^2-1}{n+1}\right)$					
$\sin(n)$					
$\sin\left(\frac{1}{2n}\right)$					

• Aufgabe 6–18:
Betrachten Sie die Folge

$$a_n = \sqrt[n]{n^2+17}$$

(a) Finden (Raten) Sie den Grenzwert a.

(b) **Beweisen** Sie, dass $a_n \to a$.

• Aufgabe 6–19:
Finden Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\begin{array}{lllllllll} a_n &=& 2+\frac{n^3-2}{n^4} & b_n &=& \frac{(-1)^n n^3-2n^2+17}{1+n+n^2+n^3} & c_n &=& \sqrt[n]{2+\frac{n^2}{n+1}} \\ d_n &=& \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k & e_n &=& \sin\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) \end{array}$$

• Aufgabe 6–20:
Betrachten Sie die Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3-7}{3x_n^2} \quad , \quad x_0 = 100$$

Sie dürfen verwenden (ohne Verifikation), dass $x_n^3 > 7$ für alle n.

(a) Bestimme x_1 und x_2.

(b) Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert (auch ohne (b) lösbar).

• Aufgabe 6–21:
Zeigen Sie, dass

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$$

eine wachsende Folge ist (schwierig, siehe [Apos92a, p. 431]).

• Aufgabe 6–22:
Zeigen Sie, dass

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

eine fallende Folge ist (schwierig, siehe [Apos92a, p. 431]).

• Aufgabe 6–23:
Verwenden Sie die Resultate der beiden vorangehenden Aufgaben, um zu zeigen, dass die beiden Folgen

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n \quad \text{und} \quad b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

gegen die selbe Zahl konvergieren. Man kann zeigen (etwas schwieriger), dass $L = e$.

• Aufgabe 6–24:
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

$$\begin{array}{llllll} a &=& \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-3n}{1+2n+3n^3+4n^3} & b &=& \lim_{n\to\infty}\left(n\left((x+\frac{1}{n})^3-x^3\right)\right) \\ c &=& \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n-1}-\frac{2n^3}{n^2-1}\right) & d &=& 3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\ldots \\ e &=& \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+23} \end{array}$$

• Aufgabe 6–25:
Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke. Die Rechnungen sind zu zeigen.

$$\begin{array}{rclcrcl}
a & = & \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3\,n}{3\,n^2+n+27} & \qquad & d & = & \lim_{h\to -1} \dfrac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{h} \\
b & = & \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3-\cos(n)}{n^3+\cosh n} & & e & = & \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,\pi^n}{2^{2n}} \\
c & = & \lim_{h\to 0} \dfrac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{h} & & & &
\end{array}$$

6.3.2 Reihen

• Aufgabe 6–26:
Bei einem Quadrat mit Fläche A wird jede Seite um den Faktor $0<r<1$ verkürzt und das neue Quadrat rechts angefügt. Dieser Vorgang wird wiederholt.

(a) Finden Sie eine möglichst einfache Formel für die Summe alle Quadratflächen der ersten n Quadrate. Die Situation $n=3$ ist unten skizziert.

(b) Bestimmen Sie die Gesamtfläche, falls unendlich viele Quadrate berücksichtigt werden.

• Aufgabe 6–27:
Ein Ball fällt aus Höhe H auf einen ebenen Untergrund. Bei jedem Sprung erreicht der Ball das r–fache der zuletzt erreichten Höhe $(0<r<1)$.

(a) Berechnen Sie den zurückgelegten Weg nach 3 vollständigen Sprüngen (höchster Punkt zu höchstem Punkt).

(b) Berechnen Sie den zurückgelegten Weg nach n vollständigen Sprüngen.

(c) Berechnen Sie den bis zum Stillstand zurückgelegten Weg.

• Aufgabe 6–28:
Untersuchen Sie ob die folgenden Reihen konvergieren.

$$\begin{array}{rclcrcl}
a & = & \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\,\pi)}{n+1} & \qquad & d & = & \sum_{n=3}^{\infty} 3^{-n} \\
b & = & \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4711}{n+1} & & e & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \\
c & = & \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4711}{n^2+1} & & & &
\end{array}$$

• Aufgabe 6–29:
Untersuchen Sie die Folge

$$\begin{array}{rcl}
a_1 & = & 0.9 \\
a_2 & = & 0.99 \\
a_3 & = & 0.999 \\
a_4 & = & 0.9999 \\
a_5 & = & 0.99999 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

(a) Stellen Sie a_n durch eine geeignete Summe dar.

(b) Beantworten Sie die Frage $0.99999999\ldots = ?$ mathematisch korrekt, inklusive Begründung.

• Aufgabe 6–30:

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder nicht.

$$a = \sum_{n=17}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad , \quad b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad , \quad c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

(b) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihe **exakt**. Tip: Summe von zwei Reihen.

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n}{e^{2\,n}}$$

• Aufgabe 6–31:

(a) Finden Sie zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$, sodass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

divergieren, aber die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

konvergiert.

(b) Finden Sie zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$, sodass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konvergieren, aber die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

divergiert.

• Aufgabe 6–32:
Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} < \infty \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

Später werden wir sehen, dass dieser Grenzwert durch $\cosh\, x$ gegeben ist.

• Aufgabe 6–33:
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n$$

konvergiert für $|q| < 1$.

• Aufgabe 6–34:
Man zeige, dass mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 < \infty$$

die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

absolut konvergiert.

• Aufgabe 6–35:
Verwenden Sie die vorangehende Aufgabe um zu zeigen, dass mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$$

absolut konvergiert für $\alpha > 1/2$.

• Aufgabe 6–36:
Entscheiden Sie ob die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie deren Wert, falls möglich.

$$\begin{array}{rclcrcl} a &=& 3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots & \qquad & b &=& \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \\ c &=& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} & & d &=& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \end{array}$$

• Aufgabe 6–37:
Die **Binomialkoeffizienten** sind gegeben durch

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha-k+1}{k} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1}+\binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{n-2}+\ldots+\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0}=\binom{\alpha+\beta}{n}$$

Die **Binomialreihe** ist nun gegeben durch

$$B\,(x,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

(b) Zeigen Sie

$$B\,(\alpha,x)\cdot B\,(\beta,x) = B\,(\alpha+\beta,x) \quad \text{für} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\,,\ |x|<1$$

Wegen $B\,(1,x) = 1+x$ folgt hieraus

$$B\,(\alpha,x) = (1+x)^\alpha \quad \text{für} \quad \alpha\in\mathbb{Q}\,,\ |x|<1$$

• **Aufgabe 6–38:**
Untersuchen Sie ob die folgenden Reihen konvergieren. Die Antwort muss begründet werden (Konvergenzkriterium).

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$$

(b) Für welche Werte von x konvergiert die Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, x^n$$

(c) Für welche Werte von x konvergiert die Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)^n}\, x^n$$

• **Aufgabe 6–39:**
Untersuchen Sie die folgenden Folgen und Reihen. Für die Folgen ist der Grenzwert zu bestimmen, falls möglich. Für die Reihen muss entschieden werden, ob die Reihe konvergiert oder nicht.

$$\begin{array}{rclcrcl}
a &=& \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2-17}{3\,n+17\,n^2} & & b &=& \lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{-n}}{\cos(1/n)} \\
c &=& \lim_{h\to 0} \dfrac{\cosh(14+2\,h)-\cosh 14}{h} & & d &=& \lim_{h\to 1} \dfrac{\cosh(14+2\,h)-\cosh 14}{h} \\
e &=& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,\pi)}{n} & & f &=& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{1+n^2} \\
g &=& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh n}{e^{2n}} & & & &
\end{array}$$

6.3.3 Stetigkeit

• **Aufgabe 6–40:**
Wählen Sie eine Folge x_n, um die folgenden Grenzwerte zu **erraten**.

$$\begin{array}{llllll}
(a) & \lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} & (b) & \lim\limits_{x\to 1/2} \frac{2x^2+x-1}{4x^2-1} & (c) & \lim\limits_{x\to 2} \frac{-x^2-3x+10}{2x^2+x-10} \\
(d) & \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-2)^2-4}{x} & (e) & \lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} & (f) & \lim\limits_{x\to a} \frac{x^4-a^4}{x-a}
\end{array}$$

• **Aufgabe 6–41:**
Verwenden Sie Polynomdivisionen um die Grenzwerte der vorangehenden Aufgabe zu berechnen.

• **Aufgabe 6–42:**
Verwenden Sie

$$\lim_{h\to 0} e^h = 1$$

um zu zeigen, dass die Funktion $f\,(x) = e^x$ überall stetig ist.

• **Aufgabe 6–43:**
Verwenden Sie, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$$

um den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)}-e^x}{h} = e^x \quad .$$

zu bestimmen.

• Aufgabe 6–44:
Für die Funktion $f(x) = e^x$ weiss man, dass $f'(0) = 1$.

(a) Verwenden Sie die Definition der Ableitung um $f'(0) = 1$ in einen Grenzwert umzuformen.

(b) Verwenden Sie den obigen Grenzwert, die Definition der Ableitung und Eigenschaften der Exponentialfunktion um die Ableitung der Funktion $g(x) = e^{3x}$ an der Stelle x_0 zu bestimmen.

Alle Zwischenschritte sind zu zeigen.

• Aufgabe 6–45:
Verifizieren Sie, dass die Funktionen $\log x$ und $\ln x$ stetig sind auf ihrem Definitionsbereich.

• Aufgabe 6–46:
Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass $f(x) = a^x$ eine stetige Funktion ist für $x \in \mathbb{R}$.

• Aufgabe 6–47:
Zeigen Sie, dass die hyperbolischen Funktionen $\cosh x$ und $\sinh x$ stetig sind.

• Aufgabe 6–48:
Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^\circ)}{x} \quad .$$

• Aufgabe 6–49:
Verwenden Sie

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sinh(h)}{h} = 1$$

um zu zeigen, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sinh(x+h) - \sinh(x)}{h} = \cosh(x)$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cosh(x+h) - \cosh(x)}{h} = \sinh(x).$$

• Aufgabe 6–50:
Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\begin{array}{lllllllll}
a & = & \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} & b & = & \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} & c & = & \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} \\
d & = & \lim_{x\to 0} (\frac{1}{2})^x & e & = & \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x}{x} & f & = & \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} \\
g & = & \lim_{x\to \pi/2} \frac{1-\sin x}{\cos x} & & & & & &
\end{array}$$

• Aufgabe 6–51:
Berechne den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

Verwenden Sie $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

• Aufgabe 6–52:
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$a = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} \qquad b = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} \qquad c = \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

• Aufgabe 6–53:
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\begin{array}{rclrcl} a & = & \lim_{x\to\pi} \frac{x^2}{1+\cos(2x)} & b & = & \lim_{x\to 1.5} \frac{x^2-2.25}{x-1.5} \\ c & = & \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} & d & = & \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(2x)} \end{array}$$

• Aufgabe 6–54:
Verwenden Sie die Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen, um die folgenden Ausdrücke zu bestimmen.

$$\begin{array}{rclrclrcl} a & = & \lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2}{x^2-3x} & b & = & \lim_{x\to 1} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} & c & = & \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x^2)}{x+x^2} \\ d & = & \lim_{x\to 0-} \frac{\tan x}{|x|} & e & = & \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(3\,x)-1}{x^2} & f & = & \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3\,x)-1}{x^2} \end{array}$$

• Aufgabe 6–55:
Calculer les expressions suivantes — Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke

$$\begin{array}{rclrcl} a & = & \lim_{n\to\infty} \dfrac{1+n^2+3\,n^4}{e^{-n}+n^4+n+\sin(n^5)} & b & = & \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{17\,n^2\,e^{2\,n}} \\ c & = & \lim_{n\to\infty} \dfrac{17+2^n}{\cos(n)+2^n} & d & = & 3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\ldots \\ e & : & \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^3+4} \quad \text{konvergent/divergent} & f & : & \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2-\cos(n)}{n} \quad \text{konvergent/divergent} \end{array}$$

• Aufgabe 6–56:
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = e^{-1/x^2} \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

und

$$f(0) = a$$

(a) Ist es möglich, ein a zu wählen so, dass f stetig ist für alle $x \in \mathbb{R}$?

(b) Falls JA, finde a.

(c) Falls NEIN, wieso nicht?

• Aufgabe 6–57:
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x\ \sin\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ a & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) Ist es möglich ein a zu wählen, sodass f stetig ist für alle $x \in \mathbb{R}$?

(b) Falls JA, finde a.

(c) Falls NEIN, wieso nicht?

• Aufgabe 6–58:
Betrachten Sie die Funktion

$$g(x) = \sin(-1/x^2) \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

und

$$g(0) = b$$

(a) Ist es möglich, ein b zu wählen so, dass g stetig ist für alle $x \in \mathbb{R}$?

(b) Falls JA, finde b.

(c) Falls NEIN, wieso nicht?

• Aufgabe 6–59:
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\cos x - 1)\,(x-2)}{x^2-4} & \text{falls} \quad x \neq 2 \\ a & \text{falls} \quad x = 2 \end{cases}$$

(a) Ist es möglich, ein a zu wählen so, dass f stetig ist für alle $x > 0$?

(b) Falls JA, finde a.

(c) Falls NEIN, wieso nicht?

• Aufgabe 6–60:
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^4-4)}{x^2-2} & \text{falls} \quad |x| \neq \sqrt{2} \\ a & \text{falls} \quad |x| = \sqrt{2} \end{cases}$$

(a) Ist es möglich ein a zu wählen so, dass f stetig ist für alle $x > 0$?

(b) Falls JA, finde a.

(c) Falls NEIN, wieso nicht?

• Aufgabe 6–61:
Finden Sie eine Funktion $y = f(x)$ für $0 \leq x \leq 1$, mit $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [0,1]$.

• Aufgabe 6–62:
Weshalb kann man mit dem Zwischenwertsatz von Bolzano nicht beweisen, dass Polynome von geradem Grad eine reelle Nullstelle haben?

• Aufgabe 6–63:
Finden Sie die Werte von x, für welche die Funktionen stetig sind.

$$\begin{array}{lllllllll} a(x) & = & \frac{x}{|x|} & b(x) & = & \cos\frac{1}{x} & c(x) & = & x\sin\frac{1}{x} \\ d(x) & = & \frac{1}{|x|-1} & e(x) & = & \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} & f(x) & = & 2^{\frac{x}{|x|}} \\ g(x) & = & x\,2^{\frac{x}{|x|}} \end{array}$$

Entscheiden Sie, ob es möglich ist die Unstetigkeitsstellen durch geeignete Definitionen zu beheben.

6.3.4 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 6–1 : Zuerst eine vorbereitende Rechnung.

$$a_n = \frac{3n^2 - 21n\sin(n^2) + 2}{n^2 - 7n\sin(n^2)} = 3 + \frac{2}{n^2 - 7n\sin(n^2)}$$

Für $n > 8$ gilt $n^2 - 7n\sin(n^2) \geq n\,(n-7) > n$ und somit

$$|a_n - 3| = |\frac{2}{n^2 - 7n\sin(n^2)}| < \frac{2}{n}$$

Für gegebenes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|a_n - 3| < \frac{2}{n} \leq \varepsilon \quad \text{falls nur} \quad n > \max\{8, \frac{2}{\varepsilon}\}$$

Lösung zu Aufgabe 6–2 : $c < 0$, $|c| < 1$, $0 < c$

Lösung zu Aufgabe 6–3 :

$$(2n)! \geq n^n n! \geq n^n \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{(2n)!} \geq n \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[2n]{(2n)!} \geq \sqrt{n}$$

Somit konvergiert die Teilfolge $\sqrt[2n]{(2n)!}$ gegen ∞.

$$\sqrt[2n-1]{(2n-1)!} \geq \sqrt[2n]{(2n-1)!} = \frac{1}{\sqrt[2n]{2n}}\ \sqrt[2n]{(2n)!} \geq \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $\sqrt[2n]{2n} \to 1$. Damit ist die Folge nicht konvergent.

Lösung zu Aufgabe 6–5 :

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n^2}} = \frac{0}{1+0} = 0 \\
b &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{13\,n^2\,e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{13}\ \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n}\,e^{-1}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e} \\
c &= \lim_{n\to\infty} \frac{3+4\,n^4}{2\,n - n^4 + 17} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^4}+4}{\frac{2}{n^3} - 1 + \frac{17}{n^4}} = -4 \\
d &= 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = 3\sum_{k=0}^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^k = 3\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6}{1-\frac{1}{3}} = 3\,\frac{\frac{3^6-1}{3^6}}{\frac{2}{3}} = \frac{3^6-1}{2\cdot 3^4} = \frac{728}{162} \approx 4.4938 \\
e &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{3\,n}}{\cosh(3\,n)+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{3\,n}}{\frac{1}{2}\,(\exp(3\,n)+\exp(-3\,n))+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,e^{3\,n}}{\exp(3\,n)+\exp(-3\,n)+2\,n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\exp(-6\,n)+2\,n^2\,\exp(-3\,n)} = \frac{2}{1+0+0} = 2
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6–6 : ∞ oder existiert nicht, 1 , 0 , 0

Lösung zu Aufgabe 6–7 : 1 , a , 1 , a/c , $7/3$, 0 , 1 , $1/2$

Lösung zu Aufgabe 6–8 : 0 , divergent (oder ∞), $1/6!$, 1 , existiert nicht.

Lösung zu Aufgabe 6–9 : Wir nehmen an, dass die Folge konvergiert, also $a_n \to a$. Mit den Rechenregeln gilt auch $a_n^2 \to a^2$ und

$$a_n \cdot a_n = \frac{2^n}{n^2}\frac{2^n}{n^2} = \frac{2^{2n}}{(2n)^2}\frac{4}{n^2} \to a \cdot 0 = 0$$

Somit ist $a^2 = 0$ und also $a = 0$, falls der Grenzwert existiert. Gleichzeitig gilt aber

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{2^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 2 > 1 \quad \text{falls} \quad n > 3$$

und somit ist a_n eine strikt wachsende Folge. Dies ist ein klarer Widerspruch zu $a = 0$.

Lösung zu Aufgabe 6–11 : 0 , 1 , 2 , 0 , 1.

Lösung zu Aufgabe 6–12 :

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 17}{\sqrt{2}n^2 - \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{17n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{17}\ \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n} \right) = 1$$

(c) Für $n > 10$ gilt $\frac{e}{n} < \frac{1}{3}$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{n}\right)^n = 0$$

Lösung zu Aufgabe 6–13 : Existiert nicht , 1 , $1/2$.

Lösung zu Aufgabe 6–14 :

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{c\,n}} = \frac{1}{c} \lim_{n\to\infty} \frac{c\,n}{e^{c\,n}} = 0 \quad \text{pour} \quad c > 0$$

(b) Utiliser (a) et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e^{n/2}}\frac{n}{e^{n/2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n/2}} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n/2}} = 0$$

(c) Utiliser (a) et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{c\,n}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n/3}}\right)^3 = 0$$

(d) Utiliser (a) et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{e^n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n/m}}\right)^m = 0$$

Lösung zu Aufgabe 6–15 : Zum Beispiel

(a) $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$.

(b) $a_n = n^2$ und $b_n = -n^2 + \frac{1}{n}$.

(c) $a_n = n^2$ und $b_n = \frac{1}{n}$.

(d) $a_n = n^2$ und $b_n = \frac{1}{n^3}$.

Lösung zu Aufgabe 6–16 : $a = 0$ und

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| \frac{n^2 + \cos(n) - 1}{n^3 + n - 1} \right| \\ &\leq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ setzt man $m = 1/\varepsilon$, dann ist die gewünschte Ugleichung erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 6–17 :

a_n	monoton	wachsend	beschränkt	konvergent	divergent
$1/n$	w	f	w	w	f
$(-1)^{2-n}\,\frac{n^2}{2n^2+1}$	f	f	w	f	w
$(-1)^{2n}\,\frac{n^2}{2n^2+1}$	w	w	w	w	f
$-\sinh\left(\frac{n^2-1}{n+1}\right)$	w	f	f	f	w
$\sin(n)$	f	f	w	f	w
$\sin\left(\frac{1}{2n}\right)$	w	f	w	w	f

Lösung zu Aufgabe 6–18 :

(a) $a = 1$

(b) Für $n \geq 5$ gilt

$$1 \leq a_n \leq \sqrt[n]{2\,n^2} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n} \to 1$$

Nun kann das Sandwich–Theorem verwendet werden.

Lösung zu Aufgabe 6–19 : 2, divergent, 1, divergent, $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

Lösung zu Aufgabe 6–20 :

(a) $x_1 \approx 66.6669$, $x_2 \approx 44.4451$

(b) $x_n^3 > 7$ und somit $(x_n^3 - 7)/(3x_n) > 0$, und auch $x_{n+1} < x_n$. Diese Folge ist monoton fallend und nach unten beschränkt, somit konvergent.

(c) $x = \sqrt[3]{7}$

Lösung zu Aufgabe 6–21 : Betrachten Sie die $n + 1$ Zahlen

$$1 \quad , \quad 1 + \frac{1}{n} \quad , \quad 1 + \frac{1}{n} \quad , \quad 1 + \frac{1}{n} \quad , \ldots , \qquad 1 + \frac{1}{n}$$

Die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ergibt

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1}{n+1}\,\left(1 + n + \frac{n}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1}$$

und somit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Lösung zu Aufgabe 6–22 : Betrachten Sie die $n + 2$ Zahlen

$$1 \quad , \quad \frac{n}{n+1} \quad , \quad \frac{n}{n+1} \quad , \quad \frac{n}{n+1} \quad , \ldots , \qquad \frac{n}{n+1}$$

Die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ergibt

$$\sqrt[n+2]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} < \frac{1}{n+2}\,\left(1 + \frac{(n+1)\,n}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n+2}$$

und somit

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n+2}} > \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

und
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

Lösung zu Aufgabe 6–23 : Wegen
$$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = a_n \cdot (1+\frac{1}{n}) < a_n$$
sind beide Folgen monoton und beschränkt und somit konvergent. Setzt man Si $a_n \to A$ und $b_n \to B$ so gilt
$$b_n = a_n \cdot (1+\frac{1}{n}) \to A \cdot 1$$
und somit $A = B = L$.

Lösung zu Aufgabe 6–24 :

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-3n}{1+2n+3n^3+4n^3} = \frac{1}{7}$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \left(n\left((x+\frac{1}{n})^3 - x^3\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(n\left(3x^2(\frac{1}{n}) + 3x(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^3\right)\right) = 3\,x^2$$

(c)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2}{n-1} - \frac{2n^3}{n^2-1}\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)2n^2}{n^2-1} - \frac{2n^3}{n^2-1}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{n^2}} = 2\end{aligned}$$

(d)
$$3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\ldots = 3\,\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n = 3\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$$

(e)
$$1 \le \sqrt[n]{n^4+23} \le \sqrt[n]{2\,n^4} \to 1$$

und mit dem „Sandwich–Theorem“
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4+23} = 1$$

Lösung zu Aufgabe 6–25 :
$$\begin{aligned}
a &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3\,n}{3\,n^2+n+27} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-3\,\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}+\frac{27}{n^2}} = \frac{1}{3}\\
b &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-\cos(n)}{n^3+\cosh n} = 0 \quad \text{da} \quad \cosh n \approx \frac{1}{2}\,e^n\\
c &= \lim_{h\to0} \frac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{h} = 3\,\lim_{h\to0} \frac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{3\,h} = -3\,\sin 1\\
&\quad \text{Ableitung von } \cos x \text{ verwenden}\\
d &= \lim_{h\to-1} \frac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{h} = \frac{\cos(-2)-\cos 1}{-1} = \cos(1)-\cos(-2)\\
e &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\pi^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\pi}{4}\right)^n = \frac{-\pi}{4}\,\frac{1}{1-\frac{-\pi}{4}} = \frac{-\pi}{4+\pi}\\
&\quad \text{geometrische Reihe}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6–26 : Falls eine Seitenlänge mit r multipliziert wird, so ist die Fläche mir r^2 zu multiplizieren. Somit erhält man für die Flächeninhalte eine geometrische Summe: $A_k = A \cdot r^{2\,k}$ wobei $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(a) $F(n)$ sei die Summe der Flächen der ersten n Quadrate

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k = \sum_{k=0}^{n-1} A \cdot r^{2\,k} = A\,\frac{1-r^{2\,n}}{1-r^2}$$

(b)

$$F(\infty) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \sum_{k=0}^{\infty} A \cdot r^{2\,k} = \frac{A}{1-r^2}$$

Lösung zu Aufgabe 6–27 :

(a) Jeweils ein Weg nach unten und oben werden zusammengefasst. Es sind drei Beiträge zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned} W\,(3) &= H\ (1+r) + r\,H\ (1+r) + r^2\,H\ (1+r) \\ &= H\ (1+r)\ \left(1+r+r^2\right) = H\ (1+2\,r+2\,r^2+r^3) \end{aligned}$$

(b) Es sind n Beiträge zu berücksichtigen. Es entsteht eine geometrische Summe.

$$W\,(n) = H\ (1+r)\ \left(1+r+r^2+\ldots r^{n-1}\right) = H\ (1+r)\ \sum_{k=0}^{n-1} r^k = H\ (1+r)\ \frac{1-r^n}{1-r}$$

(c)

$$W\,(\infty) = \lim_{n\to\infty} W\,(n) = H\ (1+r)\ \frac{1}{1-r} = H\,\frac{1+r}{1-r}$$

Lösung zu Aufgabe 6–28 :

$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,\pi)}{n+1}$	konvergiert (Leibniz), da $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$
$b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4711}{n+1}$	divergiert, da vergleichbar zu $a_n \approx \frac{1}{n+1}$
$c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4711}{n^2+1}$	konvergiert, da vergleichbar zu $a_n \approx \frac{1}{n^2}$
$d = \sum_{n=3}^{\infty} 3^{-n}$	konvergiert, da geometrische Reihe mit Faktor $q = \frac{1}{3} < 1$
$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$	konvergiert, Wurzelkriterium $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} \to \frac{1}{2}$

Lösung zu Aufgabe 6–29 :

(a) Es handelt sich um eine geometrische Summe

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10}\,\sum_{j=0}^{n-1} 10^{-j} = \frac{9}{10}\,\frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 9\,\frac{1-10^{-n}}{10-1} = 1-10^{-n}$$

(b) Es handelt sich nun um eine geometriche Reihe, geschrieben als einfache Grenzwertberechnung.

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \lim_{n\to\infty} (1-10^{-n}) = 1$$

Lösung zu Aufgabe 6–30 :

(a) Quotientenkriterium

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2\,n^2} = \frac{1}{2} < 1 \\
a &= \sum_{n=17}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} \quad \text{ist konvergent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1 \\
b &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} \quad \text{ist konvergent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\,n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1 \\
c &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2} \quad \text{ist divergent}
\end{aligned}$$

(b) Die Reihe kann als Summe zweier geometrischer Reihen geschrieben werden.

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh n}{e^{2\,n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n - e^{-n}}{2\,e^{2\,n}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\,e^n} - \frac{1}{2\,e^{3\,n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\,e^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\,e^{3\,n}} \\
&= \frac{1}{2\,e}\,\frac{1}{1-e^{-1}} - \frac{1}{2\,e^3}\,\frac{1}{1-e^{-3}} = \frac{1}{2\,(e-1)} - \frac{1}{2\,(e^3-1)}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6–33 : Quotientenkriterium und

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |q|\frac{n+1}{n} \longrightarrow |q| \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

Lösung zu Aufgabe 6–34 : Offensichtlich gilt

$$|a_n\cdot b_n| \le a_n^2 + b_n^2$$

und somit

$$\sum_{n=0}^{N}|a_n\cdot b_n| \le \sum_{n=0}^{N}(a_n^2+b_n^2)$$

d.h. wie haben eine absolut konvergente Majorante.

Lösung zu Aufgabe 6–35 : Für $\alpha > 1/2$ ist $p = 2\,\alpha > 1$ und somit die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p} < \infty$$

absolut konvergent. Setzen Sie nun $b_n = 1/n^\alpha$ und die Behauptung folgt.

Lösung zu Aufgabe 6–36 :

(a) Dies ist eine geometrische Reihe

$$3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots = 3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k} = 3\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$$

(b) Dies ist eine geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{1-e}$$

(c) Mit dem Wurzelkriterium gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2}\,\sqrt[n]{n^2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$$

somit konvergiert die Reihe.

(d) Mit dem Quotientekriterium gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,e^n} = \frac{e}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$$

somit konvergiert die Reihe.

Lösung zu Aufgabe 6–37 :

(a) Wir verwenden das Quotientenkriterium mit $a_n = \binom{\alpha}{n} x^n$ und erhalten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} x^n} = \frac{x\,(\alpha-n)}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -x$$

(b) Für $|x| < 1$ sind die Reihen absolut konvergent und wir können sie multiplizieren. Mit Hilfe des Cauchy–Produktes von der zwei Reihen gilt

$$B(\alpha,x)\cdot B(\beta,x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \quad \text{wobei} \quad d_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}$$

Die in der Aufgabenstellung gegebene Formel besagt nun

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

und somit

$$B(\alpha,x)\cdot B(\beta,x) = B(\alpha+\beta,x)$$

Lösung zu Aufgabe 6–38 :

(a) Für grosse n gilt $\frac{n}{n^2+4} \approx \frac{1}{n}$. Folglich ist wird die Reihe vermutlich divergieren. Es gilt

$$\begin{array}{rcl} \frac{n}{n^2+4} & \geq & \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2\,n} \\ \sum\limits_{n=}^{\infty} \frac{1}{n} & & \text{ist divergent} \end{array}$$

Somit hat man eine divergente Minorante. Wegen des Minorantenkriteriums ist die Reihe also divergent.

(b) Quotientenkriterium

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2\,x^{n+1}}{n^2\,x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}\;|x| \\ &= |x| \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Reihe für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

(c) Wurzelkriterium

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{(2\,n)^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2\,n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Reihe für alle Werte von $x \in \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 6–39 :

$$\begin{array}{rcl} a & = & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-17}{3\,n+17\,n^2} = \frac{1}{17} \\ b & = & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{-n}}{\cos(1/n)} = \frac{0}{1} \\ c & = & \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cosh(14+2\,h)-\cosh 14}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cosh(2\cdot(7+h))-\cosh(2\cdot 7)}{h} \\ & = & 2\ \sinh(2\cdot 7) \quad \text{Ableitung von } \cosh(2\cdot x) \text{ bei } x = 7 \\ & & \quad \text{oder de l'Hospital anwenden} \\ d & = & \lim\limits_{h\to 1} \frac{\cosh(14+2\,h)-\cosh 14}{h} = \cosh 16 - \cosh 14 \\ e & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,\pi)}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{konvergiert, alternierende Vorzeichen} \\ f & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{1+n^2} \quad \text{konvergiert, Majorante} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ g & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh n}{e^{2n}} \quad \text{konvergiert, Majorante} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 6–41 : -6, $3/4$, $-7/9$, -4, 12, $4a^3$.

Lösung zu Aufgabe 6–42 :

$$\lim_{h\to 0} e^{x+h} = \lim_{h\to 0} e^x\,e^h = e^x \lim_{h\to 0} e^h = e^x$$

Lösung zu Aufgabe 6–44 :

(a) Da die Ableitung an der Stelle $x = 0$ gegeben ist als Wert und durch die Definition der Ableitung gilt

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(b) Aus der Definition der Ableitung, angewandt auf die Funktion $g(x) = e^{3\,x}$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\, g\,(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{3\,(x_0+h)} - e^{3\,x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{3\,x_0}\left(e^{3\,h} - 1\right)}{h} \\ &= e^{3\,x_0} \lim_{h\to 0} \frac{3\ \left(e^{3\,h} - 1\right)}{3\,h} = e^{3\,x_0}\, 3 \lim_{3h\to 0} \frac{\left(e^{3\,h} - 1\right)}{3\,h} = e^{3\,x_0}\, 3\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6–45 : $\ln x$ ($\log x$) ist die inverse Funktion der stetigen, monotonen Funktion e^x (10^x) uns somit stetig.

Lösung zu Aufgabe 6–46 : Wegen $a^x = e^{x \ln a}$ ist die zu untersuchende Funktion eine Komposition von stetigen Funktionen und als solche stetig.

Lösung zu Aufgabe 6–47 : Summe von stetigen Funktionen.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Lösung zu Aufgabe 6–48 : $\pi/180$.

Lösung zu Aufgabe 6–50 : $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$, $e = 1$, $f = 0$, $g = 0$.

Lösung zu Aufgabe 6–51 :

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 (x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin (x/2)}{x/2}\right)^2 \to \frac{1}{2} \quad \text{falls} \quad x \to 0$$

Lösung zu Aufgabe 6–52 : $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$

Lösung zu Aufgabe 6–53 : $a = \pi^2/2$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 1/2$

Lösung zu Aufgabe 6–54 :

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(x-2)}{x\,(x-3)} \lim_{x\to 0} \frac{x\,(x-2)}{(x-3)} = 0$$

(b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{\sin^2 1}{1 - \cos 1}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin (x^2)}{x + x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{x\, \sin (x^2)}{x^2\,(1+x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin (x^2)}{x^2} \lim_{x\to 0+} \frac{x}{1+x} = 0$$

(d)

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\tan x}{|x|} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin\, x}{|x|\, \cos\, x} = \lim_{x\to 0-} \left(\frac{\sin\, x}{|x|} \frac{1}{\cos\, x}\right) = -1$$

(e)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos(3\,x)-1}{x^2} = \frac{-2}{\pi^2}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3\,x)-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos(3\,x)-1)\ (\cos(3\,x)+1)}{x^2\ (\cos(3\,x)+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(3\,x)-1}{x^2\ (\cos(3\,x)+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-9\ \sin^2(3\,x)}{(3\,x)^2\ (\cos(3\,x)+1)} \\
&= -9\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3\,x)}{3\,x}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3\,x)}{3\,x}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(3\,x)+1} \\
&= -\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6–55 :

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2+3\,n^4}{e^{-n}+n^4+n+\sin(n^5)} = 3 \\
b &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{17\,n^2\,e^{2\,n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{17}\ \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n}\ e^2\right) = e^2 \\
c &= \lim_{n\to\infty} \frac{17+2^n}{\cos(n)+2^n} = 1 \\
d &= 3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\ldots = 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3\ \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

geometrische Reihe

e : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+4}$ ist konvergent, Vergleich mit $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$

f : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\cos(n)}{n}$ ist divergent, Vergleich mit $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$

Lösung zu Aufgabe 6–56 : Berechne

$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0 = a$$

und die Funktion f ist überall stetig.

Lösung zu Aufgabe 6–57 : Es gilt

$$-|x| \leq x\ \sin\frac{1}{x} \leq |x|$$

und somit (Sandwich)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

(a) Es ist möglich ein solches a zu wählen.

(b)

$$a = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

(c) Nicht zu beantworten.

Lösung zu Aufgabe 6–58 : Der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\sin(-1/x^2)$ existiert nicht und somit kann die Funktion g nicht überall stetig sein.

6.4 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- die Definitionen von Folgen und Reihen verstehen.
- einfache Grenzwerte schnell und zuverlässig berechnen können.
- mit den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen und Reihen umgehen können.
- Verfahren kennen um zu entscheiden ob eine Folge konvergiert oder nicht (Monotone Konvergenz, Sandwich Theorem).
- Grenzwerte von einigen typischen Folgen und reihen kennen.
- die Konvergenzkriterien für Reihen anwenden können (Leibniz, Majorante, Minorante, Quotientenkriterium und Wurzelkriterium)
- Grenzwerte von Funktionen berechnen können.
- mit den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen umgehen können.
- die Definition von Stetigkeit kennen.
- stetige und unstetige Funktionen unterscheiden können.
- den Zwischenwertsatz von Bolzano und den Satz vom Maximum kennen.

Kapitel 7

Die Ableitung

7.1 Was ist Geschwindigkeit?

Wir beginnen mit einem einführenden Beispiel.

Betrachten wir ein Auto auf einem geraden Strassenstück. Wie bestimmt man die Geschwindigkeit? Oft hört man die Antwort

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \qquad .$$

Diese Antwort ist richtig, falls die Geschwindigkeit nicht ändert. Wie kann man die Momentangeschwindigkeit berechnen, falls das Auto beschleunigt oder abgebremst wird?

Wir nehmen an, dass ein Auto zu einem Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $y = 0$ auf einer geraden Strasse ist. Zur Zeit t habe es y Meter auf der Strasse zurückgelegt, d.h. y ist eine Funktion der Zeit.

$$y = f(t)$$

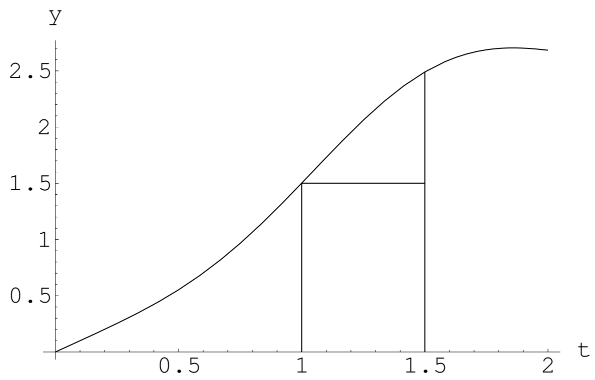


Abbildung 7.1: Ort als Funktion der Zeit

Betrachten wir nun zwei Zeiten $t_0 < t$, so gilt für die Zeitdifferenz $\Delta t = t - t_0$. In dieser Zeit hat das Auto die Strecke $\Delta y = f(t) - f(t_0)$ zurückgelegt. Somit berechnet sich die durchschnittliche Geschwindigkeit zwischen zwei Zeiten $t_0 < t$ durch

$$v_{t_0,t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \qquad .$$

Will man die Momentangeschwindigkeit v_{t_0} zum Zeitpunkt t_0 besser bestimmen, so muss die Länge des Zeitintervalles kleiner gemacht werden. Konvergiert der obige Ausdruck gegen eine feste Zahl, so lässt sich zurecht sagen, dass die (Momentan–)Geschwindigkeit des Fahrzeuges gegeben ist durch

$$v_{t_0} := \lim_{t\to t_0} v_{t,t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{t\to t_0} \frac{f\,(t) - f\,(t_0)}{t - t_0} \qquad .$$

7–1 Beispiel : (Fallgeschwindigkeit)
Ein Stein fällt in einen 10 m tiefen Brunnen. Wie gross ist die Geschwindigkeit, mit der er unten auftrifft?

Die Bewegung des Steines wird durch

$$y\,(t) = f\,(t) = \frac{g}{2}\,t^2 \quad \text{mit} \quad g = 9.81\,\frac{m}{s^2}$$

beschrieben. Zuerst berechnen wir die Auftreffzeit t_0 leicht als

$$10m = \frac{g}{2}\,t_0^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t_0 = \sqrt{\frac{20m}{g}} = 1.43s \quad .$$

Nun ist die Geschwindigkeit v_{t_0} zu bestimmen. Dazu bilden wir für $t \neq t_0$ den **Differenzenquotienten**

$$\frac{f\,(t) - f\,(t_0)}{t - t_0} = \frac{g}{2}\,\frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} = \frac{g}{2}\,\frac{(t - t_0)\,(t + t_0)}{t - t_0} = \frac{g}{2}\,(t + t_0) \quad .$$

Somit ist leicht zu sehen, dass

$$v_{t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = g \cdot t_0 = 14.0\,\frac{m}{s} \qquad .$$

Später werden wir die obigen Rechnungen erheblich vereinfachen können, indem wir Ableitungen verwenden, d.h.

$$\frac{d}{dt}\,f(t_0) = g \cdot t_0 \qquad .$$

♢

7.2 Tangenten

Als Beispiel wollen wir die Funktion $f\,(x) = (\sin x)^6 + x$ ansehen und versuchen, die Tangente an die Kurve $y = f\,(x)$ im Punkt $P = (1, f\,(1))$ zu bestimmen. Ein Punkt P auf der Tangente ist bereits bekannt; falls wir also noch die Steigung M_P bestimmen können, so ist die Gleichung der Geraden bestimmt. In Abbildung 7.2 sehen Sie den Graphen der Funktion.

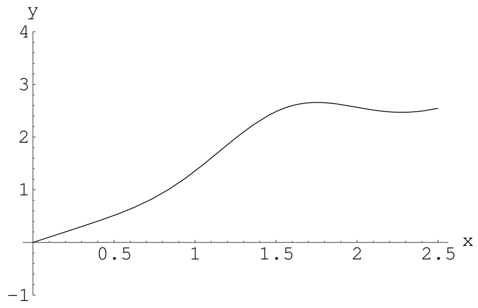
Dazu betrachten wir zusätzlich den Punkt $Q = (z, f\,(z))$ auf der Kurve, wobei $z \neq 1$. In der Figur ist $z = 2$ gezeichnet. Sei l_{PQ} die Sekante durch die Punkte P und Q. Ziel wird es sein, dem Punkt Q näher und näher beim Punkt P zu wählen und von den Steigungen der Sekanten auf die Steigung der Tangente zu schliessen. Von der Sekante sind zwei Punkte bekannt, also kann man die Steigung m_{PQ} bestimmen.

$$m_{PQ} = \frac{f\,(z) - f\,(1)}{z - 1}$$

Somit ergibt sich für die Gleichung der Sekante

$$l_Q : \qquad y(x) = f\,(1) + (x - 1)\,m_{PQ} = f(1) + (x - 1)\,\frac{f\,(z) - f\,(1)}{z - 1}$$

Für die Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $P = (1, f(1))$ erhalten wir:



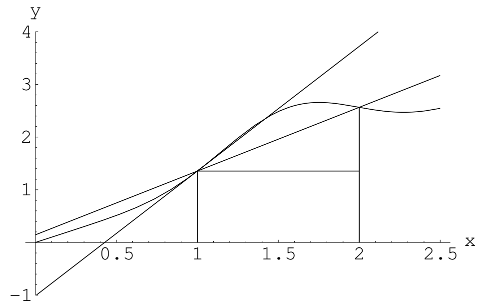


Abbildung 7.2: Graph von $f(x) = \sin^6 x + x$, mit Sekante und Tangente

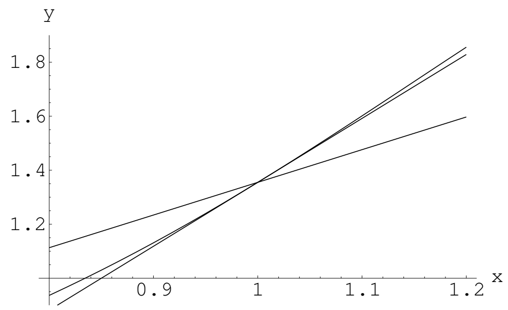


Abbildung 7.3: Vergrösserung des Graphen, der Sekante und Tangente

$$m_P = \lim_{z\to 1} m_{PQ} = \lim_{z\to 1} \frac{f(z) - f(1)}{z-1}$$

Für die obige Funktion wurde dieser Grenzwert berechnet, und man erhält einen numerischen Wert von $m_P \approx 2.36768$. In der obigen Figur sind die Kurve, eine Sekante und die Tangente eingezeichnet. Man sieht, dass sich die Tangente sehr gut an die Kurve anschmiegt, falls x nahe bei 1 liegt. Die wird durch die folgende Vergrösserung noch besser ersichtlich.

Die Tangente liefert die bestmögliche Approximation durch eine Gerade an die Kurve $y = f(x)$**, aber nur für** x**–Werte die nahe bei 1 sind.** So ist z.B. für $x = 2$ die Sekante eine viel bessere Annäherung.

7.3 Definition derAbleitung

Betrachte eine Funktion $y = f(x)$, d.h. mit unabhängiger Variablen x und abhängiger Variablen y. Geometrisch soll die Ableitung $f'(x_0)$ die Steigung der Kurve $y = f(x)$ im Punkt $P_0 = (x_0, f(x_0))$ liefern. Das führt aufgrund der obigen Überlegungen zu der folgenden Definition:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Der Ausdruck $\frac{d}{dx} f(x_0)$ heisst **Ableitung von** f **bezüglich** x, ausgewertet für x_0.

Die folgenden Notationen sind allgemein gebräuchlich und bedeuten für die Funktion $y = f(x)$ alle dasselbe

$$f'(x_0) = y'(x_0) = D_x f(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx}\, f(x_0) = \frac{d}{dx}\, y(x_0)$$

oder auch

$$f' = y' = D_x f = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\, f = \frac{d}{dx}\, y \qquad .$$

Das Symbol f' steht für die Ableitung bezüglich **der** unabhängigen Variablen. Ist also nicht aus dem Zusammenhang klar ersichtlich, was die unabhängige Variable ist, so ist diese Notation zu vermeiden. Diese Notationen sind entsprechend abzuändern, falls andere Symbole als x und y für die unabhängige (bzw. abhängige) Variable verwendet werden. Ist die unabhängige Variable die Zeit t und $y = f(t)$, so wird oft die Notation

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

verwendet.

7–2 Definition : Die Funktion f heisst **differenzierbar für** $x = x_0$, falls die Ableitung $f'(x_0)$ (d.h. der Limes) existiert. Oft sagt man auch, die Funktion sei **ableitbar**.

7–3 Beispiel : Berechne die Ableitung der Funktion $g(x) = x^2$ für $x = 3$.

$$\begin{aligned} g'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (\frac{6h}{h} + \frac{h^2}{h}) \\ &= 6 = 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Mit fast der selben Rechnung zeigt man, dass

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2\,x \qquad ,$$

somit gilt

$$\frac{d}{dx}\, x^2 = 2\,x \qquad .$$

♢

Bemerkung: Sehen Sie sich nun das einleitende Beispiel zu diesem Kapitel (fahrendes Auto) noch einmal an, und Sie werden feststellen, dass für die Momentangeschwindigkeit v_{t_0} tatsächlich gilt

$$v_{t_0} = \frac{df}{dt}(t_0) \qquad .$$

Für ein Fahrzeug, das sich entlang einer Geraden bewegt, ist die Geschwindigkeit gleich der Ableitung des Ortes bezüglich der Zeit.

7–4 Definition : Die Ableitung $f'(x)$ kann wieder als neue Funktion von x aufgefasst werden, und das führt zu den Definitionen:

- Die Funktion $f(x)$ ist **differenzierbar auf dem offenen Intervall** (a, b), falls $f'(x)$ existiert für alle $a < x < b$.
- Die Funktion $f(x)$ ist **differenzierbar auf dem abgeschlossenen Intervall** $[a, b]$, falls
  1. Die Funktion $f(x)$ ist differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b)
  2. und
  $$\lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{existiert}$$
  3. und
  $$\lim_{x\to b-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{existiert.}$$
- Die Funktion $f(x)$ ist **stetig differenzierbar auf einem Intervall** I, falls die Funktion auf dem Intervall differenzierbar ist und die Ableitung f' eine stetige Funktion auf dem Intervall ist. Man schreibt
  $$f \in C^1(I, \mathbb{R})$$
- Die Funktion $f(x)$ ist **stetig auf einem Intervall** I, so schreibt man
  $$f \in C\,(I, \mathbb{R}) \quad \text{oder auch} \quad f \in C^0(I, \mathbb{R})$$

7–5 Satz : *Eine differenzierbare Funktion ist stetig.*

Der Beweis dieser Tatsache ist nicht sehr schwierig, das Resultat ist aber oft nützlich. Ist nämlich eine Funktion in einem Punkt nicht stetig, so ist sie sicher auch nicht differenzierbar.

Aufgrund des entsprechenden Resultates für die Existenz von Grenzwerten erhält man:

7–6 Satz : *Eine Funktion $f(x)$ ist differenzierbar bei $x = a$ genau dann, wenn*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

7–7 Beispiel : In Abbildung 7.4 sehen Sie den Graphen der Funktion $y = |x|$. Zeigen Sie, dass sie überall ableitbar ist, ausser in $x = 0$. Berechne die Ableitung (dort wo sie existiert). Was sagt dieses Resultat aus über die Tangente an die Kurve $y = |x|$ im Punkt $(0, 0)$? $\diamondsuit$

7–8 Satz : *Die trigonometrischen Funktionen* $\sin x$ *und* $\cos x$ *sind differenzierbar und es gilt.*

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \qquad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass sie beliebig oft differenzierbar sind.

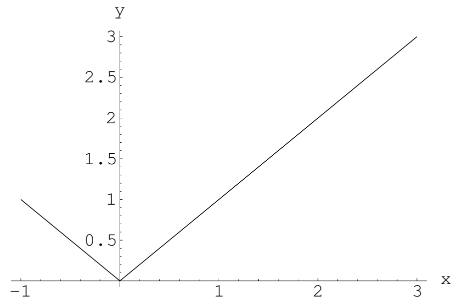


Abbildung 7.4: Graph von $|x|$

Beweis : Der Beweis dieses Resultates beruht auf den folgenden Grenzwerten:

(a)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\cos(x)$$

(b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=-\sin(x)$$

Diese wurden im Kapitel über Grenzwerte von Funktionen bereits bestimmt. □

Es ist möglich auch die Ableitungen von anderen trigonometrischen Funktionen mittels Grenzwerten zu berechnen, es ist aber effizienter, Rechenregeln zu verwenden. Wir werden diese später kennenlernen.

7.4 Lineare Approximationen und die Symbole $o(x)$ und $O(x)$.

Fast alle Anwendungen von Ableitungen beruhen auf der Tatsache, dass die Ableitung eine gute Approximation der „komplizierten“ Funktion duch eine „einfache“ (lineare) Funktion liefert. Die Tangente liefert die best mögliche Approximation einer Kurve $y=f(x)$ durch eine Gerade, d.h. für kleine h–Werte gilt:

$$f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h \qquad .$$

Mathematisch genauer gilt

$$f(x+h)-f(x)-f'(x)h\to 0 \quad \text{falls} \quad h\to 0 \qquad .$$

Tatsächlich ist die Approximation sogar viel besser, nämlich

$$\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h}{h}\to 0 \quad \text{falls} \quad h\to 0 \qquad ,$$

oder auch

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot h+r(h) \quad \text{falls} \quad \frac{r(h)}{h}\to 0 \quad \text{si } h\to 0 \qquad ,$$

Diese Eigenschaft schreibt man auch als

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\,h+o(h) \quad ,$$

d.h. der Fehler ist von kleinerer Ordnung als h. Für jede Zahl $A\in\mathbb{R}$ mit $A\neq f'(x)$ gilt

$$f(x+h)\neq f(x)+A\,h+o(h) \quad ,$$

Dies entspricht der Tatsache, dass sich die Tangente besser an die Kurve anschmiegt als jede andere Gerade.

7–9 Definition : Die Funktion $g(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ heisst auch **lineare Approximation** der Funktion $f(x)$ bei $x = x_0$.

7–10 Definition : Sei $r(z)$ eine Funktion von z. Dann verwendet man die folgenden Notationen

(a)

$$r(z) = o(z) \quad \text{falls} \quad \lim_{z \to 0} \frac{r(z)}{z} = 0 \quad ,$$

d.h. der Ausdruck $r(x)$ ist **von kleinerer Ordnung** als x.

(b)

$$r(z) = O(z)$$

falls es eine Konstante c gibt, so dass

$$|\, r(z)\,| \leq c\,|z|$$

falls nur $|z|$ klein genug ist. Der Ausdruck $r(x)$ ist (höchstens) **von der selben Ordnung** wie x.

7–11 Beispiel : Die Symbole $o(x)$ und $O(x)$ seien durch einige einfache Beispiele illustriert. Wegen

$$\frac{\sin\, x}{x} \to 1 \quad \text{si} \quad x \to 0$$

gilt

$$\begin{aligned}
\sin\, x &= O(x) \\
\frac{\sin\, x}{x} &= O(1) \\
\sin(x^2) &= o(x) \\
\cos\, x &= 1 + O(x^2) \\
\cos\, x &= 1 + o(x) \\
\cos\, x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\
\cos\, x &= 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)
\end{aligned}$$

Die beiden letzten Beispiele verlangen allerdings Kenntnisse über die Taylorreihe

$$\cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$$

♢

7–12 Beispiel : Bestimmen Sie $\sqrt{143}$ ohne Taschenrechner möglichst genau mittels einer linearen Approximation. Verwenden Sie, dass $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ für $x > 0$.

Lösung: Mit den Notationen $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 144$ und $h = -1$ müssen wir nun $f(x_0 + h)$ berechnen. Die lineare Approximation ist gegeben durch

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$$

Für unsere Funktion ergibt sich $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ und $f'(x_0) = 1/(2\sqrt{144}) = 1/24$. Somit gilt

$$\sqrt{143} = f(x_0 + h) \approx 12 + \frac{1}{24}(-1)$$

♢

7–13 Beispiel : Die lineare Approximation der Funktion $f(x) = \sin(x)$ bei $x_0 = \pi/6$ ist gegeben durch

$$f\,(\frac{\pi}{6} + h) \approx g\,(h) = f\,(\frac{\pi}{6}) + f'\,(\frac{\pi}{6}) \cdot h = \frac{1+\sqrt{3}h}{2}$$

Das folgende *Octave*–Programm berechnet eine Tabelle mit den Eintraeeeeegen h, $f\,(x_0 + h)$, der linearen Approximation $g\,(h)$ und dem Fehler $g(h) - f(x_0 + h)$. Beachte, dass wenn x_0 mit einer Stelle genauer approximiert wird, so ist die Approximation um zwei Stellen genauer.

Octave

```
x0 = pi/6;
function y = f(x)
  y = sin(x);
endfunction
function y = g(x0,h)
  y = sin(x0) + cos(x0)*h;
endfunction
format short e
h = 10.^-(0:6)';
[h, f(x0+h), g(x0,h), g(x0,h)-f(x0+h)]
-->
ans =
    1.0000e+00   9.9889e-01   1.3660e+00   3.6714e-01
    1.0000e-01   5.8396e-01   5.8660e-01   2.6422e-03
    1.0000e-02   5.0864e-01   5.0866e-01   2.5144e-05
    1.0000e-03   5.0087e-01   5.0087e-01   2.5014e-07
    1.0000e-04   5.0009e-01   5.0009e-01   2.5001e-09
    1.0000e-05   5.0001e-01   5.0001e-01   2.5000e-11
    1.0000e-06   5.0000e-01   5.0000e-01   2.4991e-13
```

Beachten Sie, dass die Approximation für grosse Werte von h miserabel ist (z.B. $h = 1.0$). ◊

7.5 Rechenregeln für Ableitungen

Für Anwendung wäre es sehr mühsam, mit der Definition der Ableitung als Limes rechnen zu müssen. Deshalb stellt man einige ausserordentlich nützliche Rechenregeln zusammen, die uns erlauben werden, fast alle Ableitungen mit Hilfe von wenigen Grundableitungen zu bestimmen. Mittels dieser Regeln können die Rechnungen vereinfacht werden.

7–14 Theorem : *Seien f und g zwei auf dem Intervall $I = (a,b)$ differenzierbare Funktionen. Dann gilt:*

(a) **Summenregel:** *Die Funktion $(f+g)(x)$ ist differenzierbar auf I und*

$$(f+g)' = f' + g' \qquad .$$

(b) *Sei $c \in \mathbb{R}$, dann ist die Funktion $(cf)(x)$ differenzierbar auf I und*

$$(cf)' = c \cdot f'$$

(c) **Produktregel:** *Die Funktion $(f \cdot g)(x)$ ist differenzierbar auf I und*

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

(d) *Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so ist die Funktion $\frac{1}{g(x)}$ differenzierbar und*

$$(\frac{1}{g})' = \frac{-g'}{g^2} \qquad .$$

(e) **Quotientenregel:** *Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ differenzierbar und*

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \qquad .$$

Beweis : Die Beweise dieser ausserordentlich wichtigen Regeln werden in der Klasse gegeben. □

Mit diesen Rechenregeln ist es nun ein Leichtes die folgenden Resultate zu verifizieren.

7–15 Satz :

1. *Eine Funktion der Form $f(x) = x^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, ist überall differenzierbar, und es gilt*

$$\frac{d}{dx}\, x^n = n x^{n-1}$$

2. *Ein Polynom $f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$ ist überall differenzierbar und*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\, (\sum_{n=0}^{m} a_n x^n) = \sum_{n=1}^{m} a_n n x^{n-1}$$

3. *Eine gebrochen rationale Funktion $f(x)/g(x)$ ist, ausser in den Nullstellen von g, überall differenzierbar und*

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \qquad .$$

Beweis :

1. Verwende die Produktregel um einen Induktionsbeweis nach n zu führen.
2. Verwende die Summen– und Produktregel.
3. Verwende die ersten beiden Resultate und die Quotientenregel.

□

7–16 Satz : *Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist für alle $x > 0$ differenzierbar und*

$$\frac{d}{dx}\,\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad .$$

Beweis : Der Beweis kann auf mindestens zwei Arten geführt werden:

1. Durch Berechnen des Grenzwertes
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad .$$
Diese Rechnung ist trickreich. Tip: erweitere mit $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$.

2. Falls wir annehmen, dass $f(x) = \sqrt{x}$ differenzierbar ist, so kann die Ableitung durch einen eleganten Trick berechnet werden. Es gilt nämlich
$$x = \sqrt{x}\sqrt{x} = f(x)\cdot f(x) \qquad .$$
Verwenden wir die Produktregel mit $f = g$, so ergibt sich durch Ableiten der obigen Gleichung
$$1 = f'(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot f'(x) = 2f'(x)\cdot f(x) = 2f'(x)\cdot\sqrt{x}$$
Löst man diese Gleichung nach $f'(x)$ auf, so erhält man das gewünschte Resultat.

$\square$

7–17 Beispiel : Zeigen Sie mit einer ähnlichen Rechnung, dass

$$\frac{d}{dx}\,\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

für alle $x > 0$. Sie müssen nicht zeigen, dass die Funktion differenzierbar ist, sondern nur den Wert der Ableitung bestimmen. $\diamondsuit$

Durch die vorangehenden Rechenregeln ist es nur sehr schwer möglich die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(e^x)$ zu bestimmen. Es fehlt noch ein Verfahren um die Komposition von Abbildungen behandeln zu können. Hier ist ein passendes Beispiel.

7–18 Beispiel : Sei $f(x) = \sin(2x)$. Um die Ableitung zu bestimmen ist der folgende Grenzwert zu berechnen.

$$\begin{aligned}
\lim\nolimits_{h\to 0}\frac{\sin(2x+2h)-\sin(2x)}{h} &= 2\,\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+2h)-\sin(2x)}{2h}\\
&= 2\,\lim_{d\to 0}\frac{\sin(2x+d)-\sin(2x)}{d}\\
&= 2\,\cos(2x)
\end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass 2 die Ableitung von $2x$ bezüglich x ist. $\diamondsuit$

Dieses Beispiel führt auf das grundlegende Resultat:

7–19 Theorem : *(Kettenregel)*
Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen. Dann ist die Komposition

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ebenfalls differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dx}\, h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Beweis : Zu bestimmen ist der Grenzwert

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

Dazu setzen wir $\Delta y = g(x+\Delta x) - g(x)$. Es gilt

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) - g(x) = 0$$

und somit auch

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta y}\, \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x)+\Delta y) - f(g(x))}{\Delta y}\, \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(g(x)+\Delta y) - f(g(x))}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Die obigen Überlegungen sind nur richtig, falls $\Delta y \neq 0$. Dieses technische Problem kann umgangen werden. □

7–20 Beispiel : Die HP–Taschenrechner der 48-er Reihe können die Ableitungsregeln sehr gut illustrieren. Stellen Sie sicher, dass Sie keine Variable X definiert haben im Verzeichniss und der Modus `SYM` muss eingeschaltet sein. Dann kann die Funktion $\sin(X \cdot X)$ abgeleitet werden, indem immer wieder die Taste `EVAL` gedrückt wird. Es ergibt sich die folgende Serie von Resultaten.

$$\begin{aligned}
&\partial X(SIN(X * X)) \\
&COS(X * X) * \partial X(X * X) \\
&COS(X * X) * (\partial X(X) * X + X * \partial X(X)) \\
&COS(X * X) * (X + X)
\end{aligned}$$

Es werden **alle Zwischenschritte** angezeigt. Das Schlussresultat stimmt mit dem Resultat $\frac{d}{dx}\sin(x^2) = \cos(x^2)\, 2x$ überein. Gibt man die beiden Ausdrücke $SIN(X * X)$ und X in den HP ein und drückt anschliessend die Taste ∂ , so wird das Resultat direkt berechnet. ♢

7–21 Beispiel : Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen mittels Kettenregel.

(a) $f(x) = \sinh(e^{-x})$

(b) $f(x) = 1/\cos x$

(c) $g(x) = (\cos x)^3$

(d) $g(x) = \cos(x^3)$

$\diamondsuit$

7–22 Satz : *Durch mehrfache Anwendung der Kettenregel können auch Ableitungen von Kompositionen von mehr als zwei Funktionen bestimmt werden. Für*

$$h(x) = (f \circ g \circ k)(x) = f(g(k(x)))$$

gilt zum Beispiel

$$\frac{d}{dx}\,h(x) = f'(g(k(x))) \cdot g'(k(x)) \cdot k'(x)$$

7–23 Beispiel : Bestimmen sie die Ableitungen der folgenden Funktionen mittels Kettenregel.

(a) $f(x) = \sinh(e^{-2x})$

(b) $f(x) = \cos(\cos(\cos x))$

(c) $f(x) = \cosh(\sinh(\cos x))$

(d) $g(x) = (\sin x^2)^3$

(e) $g(x) = (\sin(x^3))^2$

$\diamondsuit$

In diesem Abschnitt haben Sie alle wichtigen Ableitungsregeln kennengelernt. Hier ist der Vollständigkeit zu liebe noch eine Tabelle mit den Ableitungen von elementaren Funktionen. Für diese wenigen Ableitungen und für die Rechenregeln sollten Sie nach einigen Übungen keine Tabellen und Formelsammlungen mehr benötigen.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Tabelle 7.1: Tabelle der Ableitungen von elementaren Funktionen

7.6 Höhere Ableitungen

Ist $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion, so kann die Ableitung $f'(x)$ auch wieder als Funktion aufgefasst werden. Man kann untersuchen ob diese „neue“ Funktion auch ableitbar ist. Ist dies der Fall, so nennt man die Ableitung von $f'(x)$ auch **zweite Ableitung** von $f(x)$. Man schreibt

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\, f'(x) = \frac{d^2}{dx^2}\, f(x) = D_x^2\, f(x)$$

Ebenso kann man auch **höhere Ableitungen** bestimmen. Wir brauchen keinerlei neue Rechenregeln für das Berechnen der höheren Ableitung, es müssen nur die üblichen Regeln mehrfach angewandt werden.

7–24 Beispiel : Betrachte die folgenden Funktionen und bestimme die n–te Ableitung.

(a) $f(x) = x^3$ und $n = 2$.

(b) $f(x) = \sin(1 + x)$ und $n = 2$.

(c) $f(x) = (1 + 5x)^8$ und $n = 2$.

(d) $f(x) = (1 + 5x^2)^8$ und $n = 2$.

(e) $f(x) = \sin(2x)$ und $n = 3$.

(f) $f(x) = x \sin(x)$ und $n = 2$.

(g) $f(x) = e^x \sin(2x)$ und $n = 2$.

(h) $f(x) = 1/(1 + x)$ und $n = 3$.

$\diamondsuit$

7–25 Definition : Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst n**–mal stetig differenzierbar**, falls sie n–mal differenzierbar ist und die n–te Ableitung noch stetig ist auf dem Intervall I. Man schreibt

$$f \in C^n(I, \mathbb{R}) \quad .$$

7.7 Resultate über Ableitungen

7.7.1 Satz von Rolle

7–26 Satz : *Satz von Rolle*[1]
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die für $a < x < b$ differenzierbar ist, und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis : Das Resultat ist unbedingt durch geeignete Beispielgraphen zu illustrieren. Für die Funktion f muss eine der drei Eigenschaften zutreffen:

1. $f(x)$ ist konstant, dann ist die Ableitung gleich Null für alle Werte von $x \in (a, b)$.
2. Es gibt ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) > f(a)$. Wegen des Satzes vom Maximum gibt es dann ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) \geq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und es gilt $f'(\xi) = 0$.
3. Es gibt ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) < f(a)$. Dann geht man ähnlich vor wie im zweiten Fall.

$\square$

[1] Michel Rolle (1652–1719), französischer Mathematiker

7.7.2 Zwischenwertsatz der Differentialrechnung, mit Anwendungen

7–27 Theorem : *Zwischenwertsatz der Differentialrechnung*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die für $a < x < b$ differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

oder auch

$$f'(\xi)\,(b-a) = f(b) - f(a)$$

Beweis : Betrachten Sie die neue Funktion

$$g(x) = f(x) - \frac{x-a}{b-a}\,(f(b) - f(a)) \quad .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} g(a) = f(a) \quad &\text{und} \quad g(b) = f(a) \\ g'(x) = f'(x) - &\tfrac{1}{b-a}\,(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Rolle, angewandt auf die Funktion g, folgt

$$g'(\xi) = 0$$

für ein geeignetes ξ. Das entspricht genau der Behauptung. □

7–28 Satz : *Für $x > 0$ gilt*

$$\sin x \leq x$$

Beweis : Wir verwenden den Zwischenwertsatz mit $a = 0$, $b = x$ für die sin–Funktion und erhalten

$$(x-0)\cos\xi = \sin x - \sin 0$$

Weil $|\cos\xi| \leq 1$ folgt daraus die Behauptung. Beachten Sie, dass es nicht nötig ist die genaue Lage von ξ zu bestimmen. □

7–29 Beispiel : Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}\,x^2 + 1$ auf dem Intervall $[-1, 4]$ die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes erfüllt und finden Sie das entsprechende ξ. Stellen Sie das Resultat graphisch dar. ♢

7–30 Beispiel : Zeigen Sie, dass der Zwischenwertsatz für die Funktion $f(x) = \sin|x|$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ falsch ist. Stellen Sie das Resultat graphisch dar. ♢

7–31 Satz : *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die für $a < x < b$ differenzierbar ist und es gebe eine Zahl M mit*

$$|\,f'(x)\,| \leq M \quad \text{für alle } x\,, \quad a < x < b \quad .$$

Dann ist

$$|\,f(b) - f(a)\,| \leq M\,(b-a)$$

7–32 Satz : *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die für $a < x < b$ differenzierbar ist.*

- *Ist*
$$0 < f'(x) \quad \text{für alle} \quad a < x < b$$
so gilt
$$f(a) < f(b)$$
- *Ist*
$$0 \leq f'(x) \quad \text{für alle} \quad a < x < b$$
so gilt
$$f(a) \leq f(b)$$

Als wichtige Anwendung des Zwischenwertsatzes können wir nun bestimmen, wie gut die Approximation einer Funktion durch ihre Tangente ist. Die ist das erste einer Reihe von Resultaten von Taylor[2].

7–33 Theorem : ***(Taylor Approximation erster Ordnung)***
Sei I ein Intervall und x_0 , $x_0 + h \in I$ mit einer Funktion
$$f \in C^2(I, \mathbb{R})$$
Dann gilt
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + R$$
mit
$$R = \frac{1}{2}\, f''(\xi)\, h^2 \qquad \text{für ein } \xi \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x_0 + h$$

Beweis : Seien x_0 und x fixiert ($x - x_0 = h$). Die Konstante c ist definiert durch die Beziehung
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2$$
Wir müssen somit eine Formel für c finden. Für diese feste Wahl von x_0 und x betrachten wir die Funktion g mit der neuen unabhängigen Variablen z
$$g(z) = f(z) + f'(z)\,(x - z) + c\,(x - z)^2$$
Für diese Funktion gilt $g(x_0) = f(x)$ und $g(x) = f(x)$ mit der Ableitung (bezüglich z)
$$g'(z) = f'(z) + f''(z)\,(x - z) - f'(z) - 2c(x - z)$$
Wegen des Satzes von Rolle muss es ein ξ zwischen x_0 und $x_0 + h$ geben mit $g'(\xi) = 0$. Daraus folgt
$$0 = g'(\xi) = f''(\xi)\,(x - \xi) - 2c(x - \xi)$$
Lösen wir diese Gleichung auf nach c so erhalten wir
$$c = \frac{1}{2}\, f''(\xi)$$
□

[2]Brook Taylor (1685–1731), britischer Mathematiker

7–34 Beispiel : Die Approximation von $f(x) = \sin\, x$ durch die Tangente durch den Koordinatenursprung ist gegeben durch

$$\sin\, x \approx x$$

Das obige Theorem besagt nun, dass der Fehler R von der Form

$$R = \frac{1}{2}\, f''(\xi)\, x^2$$

ist für ein geeignetes $|\xi| \leq |x|$. Für dieses Beispiel ist $f''(x) = -\sin\, x$ und somit

$$R = -\frac{1}{2}\, \sin(\xi)\, x^2$$

Wegen $|\sin\, \xi| \leq 1$ gilt somit

$$|R| \leq \frac{1}{2}\, x^2$$

In diesem speziellen Beispiel gilt

$$|\sin\, \xi| \leq |\xi| \leq |x|$$

et ainsi on a même

$$|R| \leq \frac{1}{2}\, x^3$$

Wir versuchen **nicht** den Fehler exakt zu berechnen, es genügt eine obere Schranke zu finden. ♢

7–35 Beispiel : Eine Approximation von $f(x) = \sqrt{x}$ für x nahe bei 1 ist gegeben durch

$$\sqrt{x} \approx f(1) + f'(1)\,(x-1) = 1 + \frac{1}{2}\,(x-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, x$$

weil $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ und somit $f'(1) = 1/2$. Das obige Theorem besagt nun, dass der Fehler R von der Form

$$R = \frac{1}{2}\, f''(\xi)\,(x-1)^2$$

für ein geeignetes ξ ist. Für dieses Beispiel ist

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2\,x^{1/2}}\right)' = \frac{-1}{4\,x^{3/2}}$$

Ist $x > 1$ so gilt $x^{3/2} > 1$ und somit

$$|R| < \frac{1}{8}\,(x-1)^2 \quad \text{für} \quad x > 1$$

Ist $1/2 < x < 1$ so verwenden wir $\xi > 1/2$ und somit auch

$$f''(\xi) \leq \frac{1\sqrt{8}}{4} \leq \frac{3}{4}$$

Somit ist

$$|R| < \frac{3}{8}\,(x-1)^2 \quad \text{für} \quad 1/2 < x < 1$$

Bei diesem Beispiel haben wir für verschiedene Bereiche von x–Werten auch verschiedene Schranken für die Fehler gefunden. Wiederum wird der Fehler nicht exakt berechnet, sondern nur eine obere Schranke gesucht. ♢

7–36 Beispiel : Finden Sie eine Approximation von $f(x) = \tan x$ für kleine Werte von $|x|$. Finden Sie eine Schranke für den maximal möglichen Fehler, falls $-1 \leq x \leq 1$ zugelassen ist. ♢

7–37 Theorem : *Erweiterter Mittelwertsatz*
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die für $a < x < b$ differenzierbar sind und $g(a) \neq g(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweis : Sei

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g(x)$$

Dann ist $h(b) - h(a) = 0$. Also können wir den Zwischenwertsatz für die Funktion $h(x)$ verwenden und wissen, dass es ein ξ gibt mit

$$0 = h'(\xi) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(x) \quad ,$$

woraus die Behauptung folgt. □

7.8 Methode von de l'Hospital zur Berechnung von Grenzwerten

7–38 Beispiel : Der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

lässt sich nicht bestimmen, indem man $x = 0$ einsetzt, da die unbestimmte Form $0/0$ entsteht. Verwendet man aber die Approximation

$$\sin x = x - \frac{1}{2} \sin(\xi)\, x^2$$

und dividiert Zähler und Nenner durch x, so ergibt sich

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 + \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} (\sin(\xi)\, x) = 1 + 0$$

◇

Der obige Rechenweg verwendet die folgende allgemeine Idee:
Sei $f(0) = g(0)$. Um den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

zu bestimmen, setzt man die Approximationen

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(0)\, x + \tfrac{1}{2} f''(\xi)\, x^2 = x\ (f'(0)\, x + O(x)) \\ g(x) &= g'(0)\, x + \tfrac{1}{2} g''(\nu)\, x^2 = x\ (g'(0)\, x + O(x)) \end{aligned}$$

ein und dividiert Zähler und Nenner durch x. So erhält man

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(0)}{g'(0) + O(x)} + \lim_{x \to 0} \frac{O(x)}{g'(x) + O(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

Die Grundlage für diese Methode von **de l'Hospital** [3] ist das folgende Theorem.

[3] Marquis de l'Hospital (1661–1704) hat die nach ihm benannten Regeln von Johann Bernoulli „gekauft"! Regeln, Beweise und Beispiele wurden ihm von Bernoulli mitgeteilt. De l'Hospital bezahlte Bernoulli, um die Resultate veröffentlichen zu dürfen. Er schrieb 1696 das erste Lehrbuch der Differentialrechnung.

7–39 Theorem : *Seien f und g zwei stetig differenzierbare Funktionen mit*

$$f(a) = g(a) = 0$$

und $g'(x) \neq 0$ für x nahe genug bei a. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

dann ist

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Beweis : Quelle : [Apos92b, p196]
Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $g'(a) > 0$, ansonsten müssten wir f und g je mit -1 multiplizieren. Für ein festes $0 < \varepsilon$ (typischerweise klein) gilt

$$L - \varepsilon \leq \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon$$

falls x nur nahe genug bei a ist. Somit

$$(L - \varepsilon)\, g'(x) \leq f'(x) \leq (L + \varepsilon)\, g'(x)$$

- Wegen $f(a) = g(a) = 0$ ist für $x > a$ (wegen des Zwischenwertsatzes)

  $$(L - \varepsilon)\, g(x) \leq f(x) \leq (L + \varepsilon)\, g(x)$$

  Weil $g(x) > 0$ ist also auch

  $$(L - \varepsilon) \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq (L + \varepsilon) \quad \text{für} \quad x > a$$

- Ebenso erhalten wir für $x < a$

  $$(L - \varepsilon)\, g(x) \geq f(x) \geq (L + \varepsilon)\, g(x)$$

  Weil $g(x) < 0$ ist also auch

  $$(L - \varepsilon) \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq (L + \varepsilon) \quad \text{für} \quad x < a$$

Somit haben wir gezeigt, dass der Ausdruck $f(x)/g(x)$ um weniger als ε von L abweicht, falls wir nur x nahe genug bei a wählen. □

7–40 Theorem : *(Regeln von de l'Hospital)*
Seien f und g differenzierbare Funktionen für die

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

gilt. Es sei ferner $g'(x) \neq 0$ für alle x nahe bei a. Dann gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

falls der linksstehende Grenzwert existiert. Hierbei ist $a = \pm\infty$ zugelassen.

Beweis : Der Fall $a \neq \pm\infty$ mir endlichen Grenzwerten wurde im vorangehenden Theorem bewiesen. Ist $a = \infty$ so verwenden wir die Substitution $z = 1/x$ und den Rechentrick

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z\to 0+} \frac{f(1/z)}{g(1/z)} = \lim_{z\to 0+} \frac{f'(1/z)/z^2}{g'(1/z)/z^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Der Beweis für den Fall

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

sei hier weggelassen. □

Um Grenzwerte der Form

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

kann das folgende Schema verwendet werden:

1. Stelle immer sicher, dass die Funktionen genügend oft ableitbar sind.
2. Entscheide, ob durch einsetzen von $x = a$ eine unbestimmte Form entsteht ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$). Falls nicht, so ist das Problem sehr leicht lösbar!
3. Bestimme $f'(x)$ und $g'(x)$ und untersuche den neuen Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4. Falls notwendig, wiederhole das Verfahren für den neuen Grenzwert.

7–41 Beispiel : Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{10x^{12} - 11x^{11} + x}{(1-x)^2}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$$

(c)

$$\lim_{x\to 8} \frac{3-\sqrt{x+1}}{x^2-64}$$

(d)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$$

(e)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$$

♢

7–42 Beispiel : Um den Grenzwert
$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$$
berechnen zu können, muss zuerst die Funktion umgeschrieben werden.
$$x^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right)$$
Somit untersuchen wir zuerst den Grenzwert
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$
Da der Limes rechts existiert und die Exponentialfunktion stetig ist, gilt
$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \exp 0 = 1$$
♢

7–43 Beispiel : Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{21}}{e^x}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0+}(\sin x)^x$$

(c)
$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

(d)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$
♢

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Voraussetzung $g'(x) \neq 0$ für x nahe bei a wichtig ist. Glücklicherweise treten aber in Anwendungen sehr selten solche Funktionen auf.

7–44 Beispiel : (Gegenbeispiel) Quelle : [Apos92b, p192]
Sei
$$f(x) = 2x + \sin(2x) \quad \text{und} \quad g(x) = f(x)\cdot e^{\sin x}$$
Somit ist
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\;, \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$
und wir könnten versuchen, de l'Hospitals Regel anzuwenden, um
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$
zu bestimmen.

Es ist
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + 2\cos(2x) = 4\cos^2 x \\ g'(x) &= e^{\sin x}\left(f'(x) + \cos x\cdot f(x)\right) \\ &= e^{\sin x}\left(4\cos^2 x + \cos x\,(2x - \sin(2x))\right) \\ &= e^{\sin x}\cos x\,(4\cos x + 2x - \sin(2x))) \end{aligned}$$
und somit
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = e^{-\sin x}\,\frac{\cos x}{4\cos x + 2x - \sin(2x)}$$

Somit ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

aber der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} e^{\sin x}$$

existiert nicht. $\diamondsuit$

7.9 Taylor-Polynome, Approximationen höherer Ordnung

7.9.1 Polynome und das Hornerschema

Im Kapitel über Polynome haben wir das **grosse Hornerschema** diskutiert. Wir werden nun sehen, dass man mit diesem Rechenverfahren das Verhalten eines gegebenen Polynomes $f(x)$ für x nahe bei einem festen Wert x_0 gut approximieren kann.

Wir betrachten als Beispiel das Polynom

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12 \; .$$

und das grosse Hornerschema ergibt

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & -2 & 5 & -7 & -12 \\
x_0 = -2 & & -6 & 16 & -42 & 98 \\
\hline
 & 3 & -8 & 21 & -49 & \underline{86} \\
x_0 = -2 & & -6 & 28 & -98 & \\
\hline
 & 3 & -14 & 49 & \underline{-147} & \\
x_0 = -2 & & -6 & 40 & & \\
\hline
 & 3 & -20 & \underline{89} & & \\
x_0 = -2 & & -6 & & & \\
\hline
 & 3 & \underline{-26} & & & \\
x_0 = -2 & & & & & \\
\hline
 & 3 & & & &
\end{array}$$

Aus dem obersten Block des Schemas kann man das Resultat der Polynomdivision von $f(x)$ durch den Linearfaktor $(x+2)$ ablesen

$$f(x) = 86 + (x+2)\,(3x^3 - 8x^2 + 21x - 49)$$

Durch Repetition der Division durch $(x+2)$ erhält man schliesslich

$$f(x) = 86 - 147\,(x+2) + 89\,(x+2)^2 - 26\,(x+2)^3 + 3\,(x+2)^4$$

Für Werte von x nahe bei -2 sieht der Graph des Polynoms also aus wie die nach oben geöffnete Parabel

$$p(x) = 86 - 147\,(x+2) + 89\,(x+2)^2$$

Es gilt

$$f(-2+h) = p(-2+h) + o(h^2) \; ,$$

d.h. der Fehler ist von kleinerer Ordnung als $h^2 = (x+2)^2$. Das selbe Resultat kann auch geschrieben werden als

$$f(-2+x) = 86 - 147\,x + 89\,x^2 + o(x^2)$$

7–45 Definition : Das neue Polynom $p(x)$ heisst **Taylor-Polynom der Ordnung 2** der Funktion $f(x)$, **entwickelt um den Punkt** $x_0 = -2$.

Nun versuchen wir die Koeffizienten 86, -147 und 89 mit Ableitungen der ursprünglichen Funktion $f(x)$ in Verbindung zu bringen. Betrachten wir dazu die folgende Darstellung der Funktion und ihrer Ableitungen

$$\begin{array}{rccccc}
f(x) = & 86 & -147\,(x+2) & +89\,(x+2)^2 & -26\,(x+2)^3 & +3\,(x+2)^4 \\
f'(x) = & & -147 & +89\cdot 2\,(x+2) & -26\cdot 3\,(x+2)^2 & +3\cdot 4\,(x+2)^3 \\
f''(x) = & & & +89\cdot 2 & -26\cdot 3\cdot 2\,(x+2) & +3\cdot 4\cdot 3\,(x+2)^2 \\
f'''(x) = & & & & -26\cdot 3\cdot 2 & +3\cdot 4\cdot 3\cdot 2\,(x+2) \\
f^{(4)}(x) = & & & & & +3\cdot 4\cdot 3\cdot 2
\end{array}$$

Für $x = x_0 = -2$ gilt somit

$$f(-2) = 86\;, \quad f'(-2) = -147\;, \quad f''(-2) = 2!\cdot 89\;, \quad f'''(-2) = -3!\cdot 26\;, \quad f^{(4)}(-2) = 4!\cdot 3$$

Wir haben die Zahlen entlang der rechten unteren Kante im grossen Hornerschema wieder gefunden als Ableitungen des Polynoms $f(x)$ an der Stelle x_0, einzig die Fakultäten sind neu dazugekommen. Das Taylor Polynom der Ordnung 2 kann somit auch geschrieben werden als

$$\begin{array}{rccccc}
f(-2+x) = & 86 & -147\,x & +89\,x^2 & +o(x^2) \\
= & f(-2) & +f'(-2)\,x & +\frac{1}{2!}\,f''(-2)\,x^2 & +o(x^2)
\end{array}$$

Ebenso kann man auch das Taylor Polynom der Ordnung 3 entwickelt um den Punkt $x_0 = -2$ bestimmen und erhält

$$\begin{array}{rcccccc}
f(-2+x) = & 86 & -147\,x & +89\,x^2 & -26\,x^3 & +o(x^3) \\
= & f(-2) & +f'(-2)\,x & +\frac{1}{2!}\,f''(-2)\,x^2 & +\frac{1}{3!}\,f'''(-2)\,x^3 & +o(x^3)
\end{array}$$

Mit dem Summensymbol kann das letzte Resultat auch geschrieben werden als

$$f(-2+x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(-2)\,x^n \quad + o(x^3).$$

oder auch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(-2)\,(x+2)^n + o((x+2)^3)$$

7.9.2 Allgemeine Funktionen

Leider ist das Hornerschema nur für Polynome verwendbar und nicht für allgemeinere Funktionen. Ableitungen lassen sich aber auch für „beliebige“ Funktionen berechnen und somit kann man auch Taylor–Polynome für diese Funktionen bestimmen.

7–46 Definition : Ist eine Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ n–mal ableitbar, so nennt man

$$T_n(\Delta x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\, \Delta x^k$$

das **Taylor Polynom der Ordnung** n der Funktion $f(x)$, **entwickelt um den Punkt** x_0 .

Ohne Summensymbol lautet die selbe Formel

$$T_n(\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\, \Delta x + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)\, \Delta x^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)\, \Delta x^3 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\, \Delta x^n$$

Die obigen Beobachtungen über Polynome f kann man nun wie folgt formulieren

$$f(x_0 + \Delta x) = T_n(\Delta x) + O\left(\Delta x^{n+1}\right)$$

Das folgende fundamentale Theorem besagt nun, dass dieses Taylor Polynom eine gute Approximation der ursprünglichen Funktion liefert, aber nur für x nahe bei x_0.

7–47 Theorem : *(Approximationsformel von Taylor)*
Sei I ein Intervall und x_0 , $x_0 + h \in I$ mit einer Funktion

$$f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$$

Dann gilt

$$f(x_0 + h) = T_n(h) + R_n$$

wobei

$$T_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, h^k$$

und das Restglied ist gegeben durch

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\, h^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x_0 + h$$

Setzen wir in diesem Theorem $n = 1$ so erhalten wir die „alte“ Aussage über die Taylorapproximation erster Ordnung (Tangente). Der Beweis des Theorems ist eine Kopie des alten Beweises, mit minimalen Modifikationen. Vergleichen Sie die beiden Beweise.

Beweis : Seien x_0 und x fixiert ($x - x_0 = h$). Die Konstante c ist definiert durch die Beziehung

$$f(x) = T_n(x - x_0) + c\,(x - x_0)^{n+1}$$

Wir müssen somit eine Formel für c finden. Für diese feste Wahl von x_0 und x betrachten wir die Funktion g mit der neuen unabhängigen Variablen z

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z)\,(x - z)^k + c\,(x - z)^{n+1}$$

Für diese Funktion gilt $g\,(x_0) = T_n(x - x_0) = f(x)$ und $g\,(x) = f(x)$ mit der Ableitung (bezüglich z)

$$\begin{aligned} g'(z) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(f^{(k+1)}(z)\;(x-z)^k - k\; f^{(k)}(z)\;(x-z)^{k-1} \right) - (n+1)\;c\;(x_0 - z)^n \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(z)\;(x-z)^n - (n+1)\;c\;(x_0-z)^n \end{aligned}$$

Wegen des Satzes von Rolle muss es ein ξ zwischen x_0 und $x_0 + h$ geben mit $g'(\xi) = 0$. Daraus folgt

$$0 = g'(\xi) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\;(x-\xi)^n - (n+1)\;c\;(x_0-\xi)^n$$

Lösen wir diese Gleichung auf nach c so erhalten wir

$$c = \frac{1}{(n+1)\,!}\; f^{(n+1)}(\xi)$$

$\square$

Hier ist ein zweiter möglicher Beweis für das selbe Theorem

Beweis : Quelle : [Apos92a, p.247] Sei

$$g\,(x) = T_n(x - x_0) + c\;(x - x_0)^{n+1} - f\,(x)$$

wobei c so zu bestimmen ist, dass

$$g\,(x_0 + h) = 0 \quad .$$

Somit ist

$$g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1,\,2,\,3,\ldots n$$

Wegen $g\,(x_0) = g\,(x_0 + h) = 0$ gibt es ein x_1 zwischen x_0 und $x_0 + h$ mit $g'\,(x_1) = 0$. Wegen $g'\,(x_0) = g'\,(x_1) = 0$ gibt es ein x_2 zwischen x_0 und x_1 mit $g'\,(x_2) = 0$. Verfährt man im selben Stil mit allen Ableitungen bis zur Ordnung n, so ergibt sich wegen $g^{(n)}\,(x_0) = g^{(n)}\,(x_n) = 0$ ein x_{n+1} zwischen x_0 und x_n mit $g^{(n+1)}\,(x_{n+1}) = 0$. Löst man diese Gleichung

$$g^{(n+1)}\,(x_{n+1}) = c\;n! - f^{(n+1)}\,(x_{n+1}) = 0$$

nach c auf, so ergibt sich die Behauptung, wobei x_{n+1} genau dem ξ in der Restformel von Taylor entspricht.

$\square$

7–48 Beispiel : Gesucht ist die Taylorapproximation der Funktion $f\,(x) = sin\,(x)$ dritter Ordnung um den Punkt $x_0 = 0$. Der Fehler ist abzuschätzen.

Lösung: Für die Ableitungen von $f\,(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ ergibt sich folgende Tabelle

n	0	1	2	3	4	5	6	...
$f^{(n)}\,(x)$	$\sin\,(x)$	$\cos\,(x)$	$-\sin\,(x)$	$-\cos\,(x)$	$\sin\,(x)$	$\cos\,(x)$	$-\sin\,(x)$	...
$f^{(n)}\,(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	...

Somit ist das Taylorpolynom der Ordnung 3 gegeben durch

$$T_3(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3$$

wobei

$$\sin\,(x) = T_3(x) + R_3 = x - \frac{1}{6}\,x^3 + R_3$$

mit

$$R_3 = \frac{1}{24}\ \sin(\xi)\ x^4$$

für ein $|\xi| \le |x|$. Weil $|\sin(\xi)| \le 1$ gilt also sicher

$$R_3 \le \frac{1}{24}\, x^4\ .$$

Auf dem Intervall $[-1/2, 1/2]$ ist $x^4 \le 1/16$ und folglich ist

$$|R_3| \le \frac{1}{24\cdot 16} < 0.003 \quad \text{für} \quad \frac{-1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\ .$$

Auf dem Intervall $[-0.1, 0.1]$ ist $x^4 \le 0.0001$ und folglich ist

$$|R_3| \le \frac{0.0001}{24} < 0.000005 \quad \text{für} \quad -0.1 \le x \le 0.1 \quad .$$

Je kleiner das zu untersuchende Intervall um 0 ist, desto kleiner wird also der Fehler.

Mit *Mathematica* kann man die Taylorapproximation maschinell berechnen und dann die Graphen von $\sin(x)$ und $T_3(x)$ vergleichen.

Mathematica

```
ser[x_] = Normal[Series[Sin[x],{x,0,3}]]
Plot[{Sin[x],ser[x]},{x,-1,2.5},PlotStyle ->{GrayLevel[0],GrayLevel[0.5]}]
```

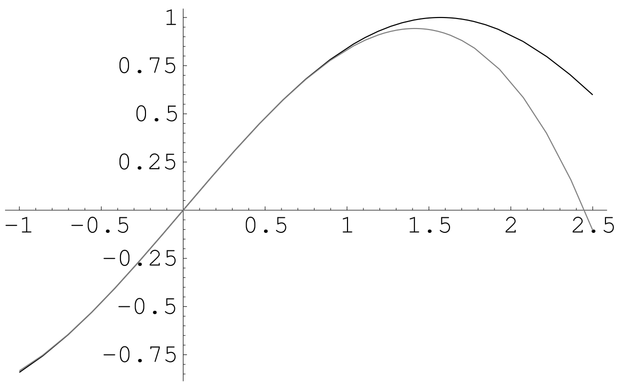


Abbildung 7.5: $\sin(x)$ und die Approximation dritter Ordnung

$\diamondsuit$

Es ist unbedingt zu beachten, dass die Approximation nur für kleine Werte von x „gut“ ist. Ist x gross, so ist oft das Wort Approximation nicht angebracht. In einigen Fällen kann das Approximationsverhalten verbessert werden, indem man mehr Terme berücksichtigt. Diese Idee wird später unter dem Stichwort **Taylorreihen** wieder aufgegriffen. Grundsätzlich liefern Taylorpolynome **lokale Approximationen**, sind in einer Anwendung **globale Approximationen** einer Funktion gesucht, d.h. muss die Funktion auf einem ganzen Intervall gleichmässig gut approximiert werden, so sind andere Verfahren zu verwenden. Mögliche Stichworte zum Thema der globalen Approximation sind: **Lagrange–Interpolation**, **Legendre–Polynome**, **Tschebyschew–Polynome**, **Fourier–Approximationen**,...

Zur Illustration sei hier noch die Taylor–Approximation zehnter Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$ der Funktion $f(x) = \sin(x)$ angegeben. Auch hier ist deutlich zu sehen, dass die Approximation für kleine Argumente ausgezeichnet ist, für grosse Werte aber miserabel. Diese Tatsache ist in Abbildung 7.6 illustriert.

Mathematica

```
ser[x_] = Normal[Series[Sin[x],{x,0,10}]]
Plot[{Sin[x],ser[x]},{x,-1,2 Pi},
        PlotRange ->{-1,1},
        PlotStyle ->{GrayLevel[0],GrayLevel[0.5]}]
```

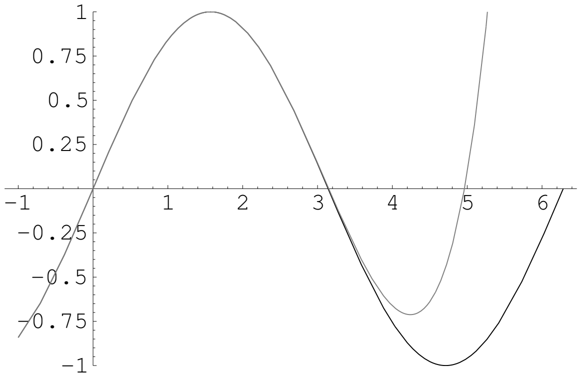


Abbildung 7.6: $\sin(x)$ und die Approximation zehnter Ordnung

7–49 Beispiel : Wir suchen eine gute Approximation der Funktion $f(x) = \cos(x - x^2)$ für Argumente mit kleinem Absolutbetrag. Der Fehler ist abzuschätzen, falls wir Werte von x mit $|x| \leq 0.1$ betrachten. Hierzu setzen wir Taylor–Polynome ein und verwenden

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x - x^2) & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin(x - x^2)\,(1 - 2x) & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos(x - x^2)\,(1 - 2x)^2 + 2\,\sin(x - x^2) & f''(0) &= -1 \end{aligned}$$

und

$$f'''(x) = \sin(x - x^2)\,(1 - 2x)^3 + 4\,\cos(x - x^2)\,(1 - 2x) + 2\,\cos(x - x^2)\,(1 - 2x)$$

Somit gilt für $|x| \leq 0.1$

$$|f'''(x)| \leq 2 + 6 + 4 = 12$$

und

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + R_2(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + R_2(x)$$

mit

$$|R_2(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6}\,|x|^3 \leq \frac{12}{6}\,0.1^3 = 0.002$$

$\diamondsuit$

Für allgemeine Funktionen liefern die Taylorpolynome gute lokale Approximationen der ursprünglichen Funktion, im Allgemeinen wird aber die Funktion **nicht exakt wiedergegeben**. Die Situation für Polynome ist etwas anders.

7–50 Satz : *Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grad n, x_0 ein beliebiger Punkt und $T_n(x)$ das Taylorpolynom vom Grad n, entwickelt um den Punkt x_0, so gilt*

$$f(x) = T_n(x - x_0) \quad .$$

Die Koeffizienten des Polynoms $T_n(x)$ lassen sich durch das Schema von Horner effizient bestimmen.

Beweis : Für ein Polynom vom Grad n gilt

$$f^{(n+1)}(\xi) = 0 \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathbb{R} \quad .$$

Somit verschwindet das Restglied in der Approximationsformel von Taylor und wir haben die Behauptung verifiziert. □

7.9.3 Binomischer Lehrsatz

Als Anwendung dieses Resultates können wir den **Binomischen Lehrsatz** herleiten. Die einfachste (und bekannteste) Variante ist

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Setzen wir in dieser Beziehung $x = b/a$ so lautet die selbe Formel

$$a^2\ (1+x)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2\ (1 + 2x + x^2)$$

Somit folgt aus der Beziehung

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \ .$$

die obige einfache binomische Formel. Nun wollen wir die passenden Formeln für

$$(1+x)^n = \ldots$$

herleiten, wobei $n = 2,\ 3,\ 4\ldots$

Dazu untersuchen wir das Polynom $f(x) = (1+x)^n$ und seine Ableitungen an der Stelle $x_0 = 0$.

m	$f^{(m)}\,(x)$	$f^{(m)}\,(0)$
0	$(1+x)^n$	1
1	$n\ (1+x)^{n-1}$	n
2	$n\,(n-1)\ (1+x)^{n-2}$	n (n-1)
3	$n\,(n-1)\,(n-2)\ (1+x)^{n-3}$	n (n-1) (n-2)
.	$\ldots$	$\ldots$
k	$n\,(n-1)\ldots(n-k+1)\ (1+x)^{n-k}$	n (n-1)… (n-k+1)
k	$\frac{n!}{(n-k)!}\ (1+x)^{n-k}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
.	$\ldots$	$\ldots$
n	$n!\ (1+x)^0$	$n!$

Weil $f\,(x) = (1+x)^n$ ein Polynom vom Grad n ist gilt

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ f^{(k)}\,0\ x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ \frac{n!}{(n-k)!}\ x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ x^k
\end{aligned}$$

hierbei sind

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$$

die **Binomialkoeffizienten**.

Setzen wir in der obigen Gleichung $x = b/a$ und multiplizieren anschliessend mit a^n, so erhalten wir den

7–51 Satz : *(Binomischer Lehrsatz)*
Für $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\; a^{n-k} b^k$$

Aus der Definition der Binomialkoeffizienten lassen sich einige Werte elementar ablesen (Achtung $0! = 1$).

$$\binom{n}{0} = 1\,, \quad \binom{n}{1} = n\,, \quad \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}\,, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Für einige kleine Werte von n erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2 + 2\,a^1b^1 + b^2\\
(a+b)^3 &= a^3 + 3\,a^2b^1 + 3\,a^1b^2 + b^3\\
(a+b)^4 &= a^4 + 4\,a^3b^1 + 6\,a^2b^2 + 4\,a^1b^3 + b^4
\end{aligned}$$

Die Berechnung der Binomialkoeffizienten kann durch die obige Definition mittels Fakultäten erfolgen oder auch durch das **Pascalsche Dreieck**.

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0: & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1: & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2: & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3: & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4: & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5: & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6: & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

In der n-ten Zeile stehen die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ für $k = 0, 1, 2 \ldots n$. Ab der zweiten Zeile gilt: Jede Zahl ist die Summe der rechts und links über ihr stehenden Zahlen. Diese Aussage kann auch als Formel geschrieben werden.

7–52 Satz : *Für $k = 2, 3, \ldots n$ gilt*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Beweis : Dieses Resultat kann durch einen Beweis mit Induktion nach k gegeben werden. Der binomische Lehrsatz erlaubt aber einen einfacheren Zugang. Es gilt

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$$

Ebenso kann man den selben Ausdruck aus einem leicht verschiedenen Blickwinkel betrachten.

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)\,(1+x)^n \\
&= (1+x)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} x^k + \binom{n}{k} x^{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^j \\
&= 1 + x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) x^k
\end{aligned}$$

Aufgrund des Identitätssatzes für Polynome müssen die Koeffizienten von x^k in den obigen beiden Ausdrücken übereinstimmen und wir erhalten die Behauptung. □

7–53 Satz : *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Beweis : Dieses Resultat kann durch einen Beweis mit Induktion nach n gegeben werden. Der binomische Lehrsatz erlaubt aber einen **viel** einfacheren Zugang. Tip: $1 + 1 = 2$. □

7.9.4 Rationale Approximationen

In diesem Abschnitt haben wir die Taylor–Approximationen kennen gelernt. Es muss aber hervorgehoben werden, dass es auch anderer Arten der Approximation von gegebenen Funktionen gibt. Im Kapitel über Polynome haben wir die Methode der **Interpolation** verwendet. Ebenso werden **Spline–Interpolation** und **Tschebyschew–Polynome** eingesetzt. Hier sein nun noch an einem einfachen Beispiel die **Approximation durch eine rationale Funktion** illustriert. Wir suchen Koeffizienten a_0, a_1 und b_1, so dass die Approximation

$$e^x \approx \frac{a_0 + a_1\,x}{1 + b_1\,x}$$

möglichst gut ist für kleine Werte von x. Hierzu verwenden wir die Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{4!}\,x^4 + \ldots$$

und verlangen

$$(1 + b_1\, x)\ \left(1 + x + \frac{1}{2!}\, x^2 + \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{4!}\, x^4 + \ldots\right) \approx a_0 + a_1\, x$$

Durch Sortieren nach wachsenden Exponenten von x erhalten wir

$$1 - a_0 + x\,(1 - a_1 + b_1) + x^2\,(\frac{1}{2} + b_1) + x^3\,(\frac{1}{6} + b_1\frac{1}{2}) + \ldots \approx 0$$

Diese Gleichung ist für kleine Werte von $|x|$ gut gelöst, falls die ersten drei Koeffizienten null sind. Das führt auf das System von linearen Gleichungen

$$1 - a_0 = 0 \quad , \quad 1 - a_1 + b_1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} + b_1 = 0$$

mit den Lösungen

$$b_1 = -\frac{1}{2} \quad , a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

Somit ist

$$e^x \approx \frac{1 + x/2}{1 - x/2} = \frac{2 + x}{2 - x}$$

Die Abbildung 7.7 zeigt, dass die Approximation für Werte zwischen -1 und 1 recht gut ist. Für grössere Werte (z.B. $x \approx 2$) wird die Approximation allerdings unbrauchbar.

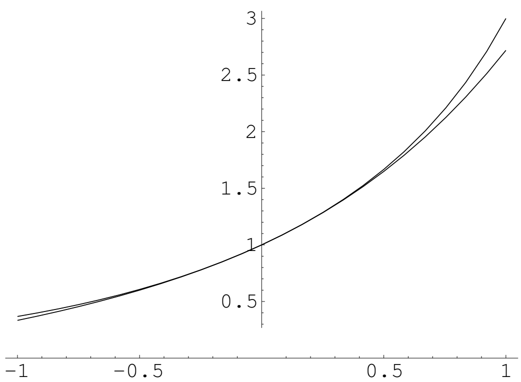


Abbildung 7.7: Rationale Approximation von e^x

7.10 Aufgaben

7.10.1 Grundaufgaben

• Aufgabe 7–1:
Betrachte die Funktion $f(x) = x^3$ und benutze die Definition durch Grenzwerte, um die folgenden Ableitungen zu berechnen

(a) $f'(1)$

(b) $f'(7.2)$

(c) $D_x f(x)$

• Aufgabe 7–2:
Betrachte die Funktion $f(x) = 1/x$ und benutze die Definition durch Grenzwerte, um die folgenden Ableitungen zu berechnen

(a) $f'(2)$

(b) $f'(7)$

(c) $\frac{d}{dx} f(x)$

• Aufgabe 7–3:
Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = 1/x^2$ mittels der Definition der Ableitung.

• Aufgabe 7–4:
Für die Funktion $f(x) = e^x$ weiss man, dass $f'(0) = 1$.

(a) Verwenden Sie die Definition der Ableitung um $f'(0) = 1$ in einen Grenzwert umzuformen.

(b) Verwenden Sie den obigen Grenzwert, die Definition der Ableitung und Eigenschaften der Exponentialfunktion um die Ableitung der Funktion $g(x) = e^{3\,x}$ an der Stelle x_0 zu bestimmen.

Alle Zwischenschritte sind zu zeigen.

• Aufgabe 7–5:
Für die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ weiss man, dass $f'(1) = 1$.

(a) Verwende die Definition der Ableitung um $f'(1) = 1$ in einen Grenzwert umzuformen.

(b) Verwende den obigen Grenzwert, die Definition der Ableitung und Eigenschaften der Logarithmusfunktion um die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(x)$ an der Stelle x_0 zu bestimmen.

Alle Zwischenschritte sind zu zeigen.

• Aufgabe 7–6:
Verwenden Sie die Definition der Ableitung, Eigenschaften der Funktion $f(x) = e^{2\,x}$ und den untenstehenden Grenzwert um die Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ zu bestimmen.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

• Aufgabe 7–7:
Verwenden Sie

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

und Identitäten für trigonometrische Funktionen, um die folgenden Resultate zu verifizieren.

(a) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

(b) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

(c) $\frac{d}{dx} \cos(2x) = -2\sin(2x)$

(d) $\frac{d}{dx} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$

• Aufgabe 7–8:
Verwenden Sie Additionstheoreme und die gegebene Tatsache

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sinh h}{h} = 1$$

um mittles der Definition die Ableitung der Funktion $y(x) = \cosh x$ zu bestimmen.

• Aufgabe 7–9:
Die Funktion $y = g(t)$ sei differenzierbar bei $t = t_0$, somit gilt

$$\frac{g(t_0 + h) - g(t_0) - g'(t_0)h}{h} \to 0 \quad \text{falls } h \to 0 \qquad .$$

Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t_0 + h) - g(t_0) - A\,h}{h}$$

nicht 0 ist, falls $A \neq g'(t_0)$.

• Aufgabe 7–10:
Seien f, g, h drei differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion $(f \cdot g \cdot h)(x)$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

• Aufgabe 7–11:

(a) Betrachte die Funktion $f(x) = 1/x$ und benutze die Definition durch Grenzwerte, um die Ableitung $f'(x)$ zu bestimmen.

(b) Verwenden Sie das obige Resultat und die Produktregel um die Ableitung von $g(x) = \frac{1}{x^2}$ zu bestimmen.

• Aufgabe 7–12:
Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Ableitung (Differenzenquotient)

$$\left(f^2(x)\right)' = 2\,f(x)\,f'(x)$$

(b) Verwenden Sie die Identität

$$f(x)\,g(x) = \frac{1}{2}\,\left((f(x) + g(x))^2 - f^2(x) - g^2(x) \right)$$

und das Resultat der ersten Teilaufgabe um die Produktregel zu verifizieren.

(c) Verwenden Sie $h = f/g$ oder $h(x)\;g(x) = f(x)$ und die Produktregel um die Quotientenregel zu verifizieren.

• Aufgabe 7–13:
Benutzen Sie die Rechenregeln für Ableitungen um die folgenden Ableitungen zu berechnen.

(a) $f(x) = \tan x$

(b) $f(x) = 1/\sin x$

(c) $f(x) = 1/\cos x$

(d) $f(x) = \sin x/\cos x$

(e) $f(x) = \sin x \cos x$

(f) $f(x) = \cos^2 x$

(g) $f(x) = \sin^3 x$

(h) $f(x) = \tan^2 x$

(i) $f(x) = 1/\sin^2 x$

(j) $f(x) = 1/\cos^2 x$

(k) $f(x) = \cos x/\sin x$

• Aufgabe 7–14:
Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{d}{dx}\left(x - 3\,x^3 + \sin(2\,x)\right) & c(x) &= \frac{d^2}{dx^2}\,(e^x)^x \\ b(x) &= \frac{d}{dx}\,\frac{e^{2x}}{1+x^2} & d(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^2\,\tan(\frac{x}{2})\right) \end{aligned}$$

• Aufgabe 7–15:
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Zwischenresultate sind zu zeigen.

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dx}\,\sin\left(2\,x + e^{(x^2)}\right) & d &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{2\,x} - 2\,x} \\ b &= \frac{d}{dz}\,\frac{x^2 - x\,z}{z^2 + 4\,x} & f &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2\,x} - 1 - 2\,x}{x^2} \\ c &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{2\,x} + x^x\right) \end{aligned}$$

• Aufgabe 7–16:
Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{d}{dx}\,\tfrac{\cos x}{\sin x} & d &= \tfrac{d}{dy}\,x^y \\ b &= \tfrac{d}{dx}\,\sin(x^2)\cdot e^{-3x} & e &= \tfrac{d}{da}\,\log_a x \\ c &= \tfrac{d}{dx}\,x^y \end{aligned}$$

• Aufgabe 7–17:
Verwenden Sie die Rechenregeln um zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit f auch f^n eine differenzierbare Funktion ist und

$$\frac{d}{dx}\,f^n(x) = n f^{n-1}(x)\,\frac{d}{dx}\,f(x) \qquad .$$

• Aufgabe 7–18:
Berechnen Sie die folgenden Ableitungen

(a) $f(z) = (z-3)^3$

(b) $g(z) = (z+2)^{17}$

(c) $h(x) = \sin^2(x)$

(d) $k(x) = \cos(3x)$ Das Resultat soll die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ enthalten. Tip: trigonometrische Formeln verwenden.

• Aufgabe 7–19:
Untersuchen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a) Berechnen Sie $\frac{d\,f}{dx}$, wobei

$$f(x) = e^{\sin(x^2+1)}$$

(b) Berechnen Sie $\frac{d\,h}{dt}$, wobei

$$h(t) = \frac{\cosh^2 t}{t^4+1}$$

(c) Berechnen Sie $\dot{x}$, wobei

$$x(t) = \cos^2(\ln(t^4+t^2+8)) + \sin^2(\ln(t^4+t^2+8))$$

(d) Berechnen Sie $\frac{d^2\,g}{dz^2}$, wobei

$$g(z) = \sqrt[3]{1+z^2}$$

• Aufgabe 7–20:
Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke

(a) $\frac{d}{dx}\left(x^2 - 3\,x^3 - \frac{1}{x^2}\right)$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\,x) - 2\,x}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(2\,x) - 2\,x}{x^3}$

(d) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(\sinh(3\,x^3))}{1+x^2}\right)$

(e) $\frac{d^2}{dx^2}\, e^{\cos x}$

• Aufgabe 7–21:
Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke. Die Zwischenresultate sind zu zeigen, d.h. ohne Taschenrechner.

(a) $a = f'(0)$, wobei $f(x) = e^{2\,x}\,\sin(x^2)$

(b) $b = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)-1}{x^2}$

(c) $c = g^{(101)}(x)$ wobei/avec $g(x) = \sin(2\,x)$

(d) $d = f'''(x)$ wobei $f(x) = e^{x/2} + x^3 - 17\,x$

(e) $e = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)+1}{x^2}$

• Aufgabe 7–22:
Zu untersuchen sind die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

wobei wir voraussetzen, dass $b < 0$ und $c > 0$ fest gegeben sind. Der Parameter a wird variiert.

(a) Für welche Werte von $a > 0$ hat diese Funktion zwei verschiedene, reelle Nullstellen?

(b) Berechnen Sie für die oben bestimmen Nullstellen x_1 und x_2 die Grenzwerte

$$A = \lim_{a\to 0+} x_1 \quad \text{und} \quad B = \lim_{a\to 0+} x_2$$

• Aufgabe 7–23:
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Zwischenresultate sind zu zeigen.

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dx}\,\cos(x^2) \\ b &= \frac{d}{dx}\,\left(\sqrt{x}\,\sin(x)\right) \\ c &= \frac{d}{dx}\,\frac{1+2\,x+3\,x^3}{1+\sin^2 x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sin(n^3)}{3\,n^2-n+1/n} \\ e &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\,x)}{x} \\ f &= 6+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81} \end{aligned}$$

• Aufgabe 7–24:
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Zwischenresultate sind zu zeigen.

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dx}\,\sin\left(2\,x+e^{(x^2)}\right) \\ b &= \frac{d}{dz}\,\frac{x^2-x\,z}{z^2+4\,x} \\ c &= \frac{d}{dx}\,\left(\sqrt[3]{2\,x}+x^x\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{2\,x}-2\,x} \\ f &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2\,x}-1-2\,x}{x^2} \end{aligned}$$

• Aufgabe 7–25:
Bestimmen Sie die n–te Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $u\,(x)=\sqrt{1-x}$ mit/avec $n=1$.

(b) $f\,(x)=(2x-1)^5$ mit/avec $n=2$.

(c) $g\,(x)=\sin\left(\cos\left(3x\right)\right)$ mit/avec $n=1$.

(d) $h\,(x)=\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x^2-1}$ mit/avec $n=1$.

(e) $r\,(x)=2x^{3x}$ mit/avec $n=1$.

• Aufgabe 7–26:
Für die nachstehenden Funktionen ist zu bestimmen, für welche x die Ableitung existiert. Anschliessend sind die Funktionen abzuleiten.

(a) $y=(2x^2-1)^{10}$

(b) $y=(x^3-2x)\,(1-x^3)^5$

(c) $y=(6x-2\sqrt[3]{x^2})^8$

(d) $y=\sqrt{1-x}$

(e) $y=\sin\left(2t\right)$

(f) $y=1/\tan\left(1-2x\right)$

• Aufgabe 7–27:
Für die nachstehenden Funktionen ist zu bestimmen für welche x die Ableitung existiert. Anschliessend sind die Funktionen abzuleiten.

(a) $y=(3-2\sqrt{2x})^5$

(b) $y=(1-\sqrt{1+x^2})^6$

(c) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

(d) $y=\cos\frac{1}{1-x}$

(e) $y=\sqrt{\tan x}$

(f) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

• Aufgabe 7–28:
Verwenden Sie $(e^x)'=e^x$ und die Eulersche Formel

$$e^{i\,x}=\cos x+i\sin x$$

um die Ableitungen der Funktion $\sin(x)$ und $\cos(x)$ zu bestimmen.

• Aufgabe 7–29:
Bestimmen Sie für $a > 0$ die Ableitung der Funktion $f\,(x) = a^x$.

• Aufgabe 7–30:
Bestimmen Sie für $a > 0$ die Ableitung der Funktion $f\,(x) = \log_a\, x$.

• Aufgabe 7–31:
Bestimmen Sie für $a > 0$ die Ableitung der Funktion $f\,(x) = a^{g\,(x)}$.

• Aufgabe 7–32:
Bestimmen Sie für $a > 0$ die Ableitung der Funktion $f\,(x) = \log_a g\,(x)$.

• Aufgabe 7–33:
Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $(f\,(x))^{g\,(x)}$.

• Aufgabe 7–34:
Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $\log_{f\,(x)} g\,(x)$.

• Aufgabe 7–35:
Für eine „unbekannte“ Funktion $f\,(x)$ gilt

$$\sin\,(f\,(x)) = x$$

Bestimmen Sie $f'\,(x)$, indem Sie die obige Gleichung nach x ableiten.

• Aufgabe 7–36:
Von zwei differenzierbaren Funktionen $f\,(x)$ und $g\,(x)$ weiss man, dass

$$f\,(0) = 1 \quad , \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f\,(h) - 1}{h} = 2 \quad , \qquad f^2\,(x) - g\,(x) = -3\,x$$

Bestimmen Sie $g'\,(0)$ mittels der Definition der Ableitung und algebraischen Operationen $(+ - */)$ und den Rechenregeln für Limites.

7.10.2 Weitere Aufgaben

• Aufgabe 7–37:
Finden Sie die richtige Methode um die Aufgaben zu lösen.

(a) Bestimmen Sie $\tan 46°$ mit einer einfachen Rechnung möglichst genau. Tip: $46 = 45 + 1$

(b) Bestimmen Sie den maximal möglichen Fehler im obigen Problem.

• Aufgabe 7–38:
Berechnen Sie die 99999. Ableitung von $g\,(t) = t \sin\,(t)$

• Aufgabe 7–39:
Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ weiss man, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$f\,(a + b) = f\,(a) \cdot f(b) \quad , \quad f\,(b) \neq 0 \quad \text{et} \quad f'\,(0) = 2$$

(a) Finden Sie $f(0)$.

(b) Verwenden Sie die Definition der Ableitung um eine Beziehung zwischen $f'(x)$ und $f(x)$ zu finden.

• **Aufgabe 7–40:**
Berechnen sie die 9999. Ableitung von $g(t) = \sin^2(t/2)$
Tip: zuerst vereinfachen, dann rechnen.

• **Aufgabe 7–41:**
Betrachte die folgenden Funktionen und bestimme die n–te Ableitung.

(a) $f(x) = 1/(1+x)$ und/et $n = 5$.

(b) $f(x) = \sqrt{1+x}$ und/et $n = 5$.

(c) $f(x) = (1+5x)^8$ und/et $n = 3$.

(d) $f(x) = \sin(x)$ und/et $n = 3$.

(e) $f(x) = x\sin(x)$ und/et $n = 3$.

(f) $f(x) = x^2\sin(x)$ und/et $n = 3$.

(g) $f(x) = x^2\sin(x)$ und/et $n = 40$. Antwort/réponse: $x^2\sin x - 80x\cos x - 1560\sin x$

(h) $f(x) = x\cos(x)$ und/et $n = 39$. Antwort/réponse: $-39\cos x + x\sin x$

(i) $f(x) = x^7 - 0.5x^3 + 23x - 37$ und/et $n = 7$.

• **Aufgabe 7–42:**
Bestimme den Wert des Ausdrucks

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

• **Aufgabe 7–43:**
Bestimme den Wert des Ausdrucks

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

• **Aufgabe 7–44:**
Eine Variable y hängt von x ab, durch drei gegebene Hilfsfunktionen $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ und die Beziehung

$$y(x) = u(x)\, v(x)\, w(x)$$

Betrachten Sie nun

$$F(x) = \ln y(x)$$

(a) Bestimmen Sie $\frac{dF}{dx}$ mit Hilfe von Rechenregeln für Logarithmen und den Ableitungen der Hilfsfunktionen u, v und w.

(b) Bestimmen Sie $\frac{dF}{dx}$ abhängig von y und y'.

(c) Setzen Sie die Resultate der beiden obigen Teilaufgaben gleich und lösen Sie auf nach $y'(x)$.

7.10.3 Regel von de l'Hospital

• Aufgabe 7–45:
Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\,x) - 2\,x}{x^3}$$

• Aufgabe 7–46:
Finden Sie drei verschiedene Grenzwerte, zu deren Berechnung die Regel von de l'Hospital 1, 2 bzw. 3 mal angewandt werden muss.

• Aufgabe 7–47:
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\cos x)}{\tan(2x)}$$

(c)

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{1-x} - \frac{\cos(1-x)}{\sin(1-x)}\right)$$

(d)

$$\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{2x^2-2\pi}$$

• Aufgabe 7–48:
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2-x^5}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\tan^2(x/2)}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

(d)

$$\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{(2x-2\pi)^2}$$

• Aufgabe 7–49:
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit den Regeln von de l'Hospital

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x/2)}{3x}$$

(b)

$$\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{(\pi-x)^3}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(2x)} - \frac{1}{2x}\right)$$

(d)

$$\lim_{x\to 0+} (\sin x)^x$$

7.10.4 Approximationen

• Aufgabe 7–50:
Finden Sie die Taylorentwicklung des Polynoms $f(z) = 2z^4 - 3z^2 + 1$ an der Stelle $z = -2$.

• Aufgabe 7–51:
Finde die Taylorentwicklung des Polynoms $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 23.5x - 18$ an den gegebenen Stellen x_0.

(a) Bei $x_0 = 2$.

(b) Bei $x_0 = -2$.

(c) Bei $x_0 = 0$.

(d) Bei $x_0 = 1$.

• Aufgabe 7–52:
Finde die Taylorentwicklung des Polynoms $f(x) = x^7$ an den gegebenen Stellen x_0.

(a) Bei $x_0 = 0$.

(b) Bei $x_0 = 1$.

(c) Bei $x_0 = -1$.

(d) Bei $x_0 = 2$.

• Aufgabe 7–53:
Finde die Taylorentwicklung der Funktion $f(x)$ bei $x = x_0$ der Ordnung n

(a) $f(x) = \cos x$ bei $x_0 = 0$ mit $n = 3$.

(b) $f(x) = \tan(2x)$ bei $x_0 = 0$ mit $n = 4$.

(c) $f(x) = \cos x$ bei $x_0 = 0$ mit $n = 6$.

(d) $f(x) = \sin x$ bei $x_0 = \pi/3$ mit $n = 3$.

(e) $f(x) = 1/(1+x)$ bei $x_0 = 0$ mit $n = 6$.

(f) $f(x) = 1/(1-x)$ bei $x_0 = 0$ mit $n = 6$.

Bei all den obigen Aufgaben können die durch die Approximation gemachten Fehler zuverlässig abgeschätzt werden.

• Aufgabe 7–54:
Berechnen Sie $z = \sqrt{1 + \sin(\pi\ 0.99)}$ ohne Taschenrechner möglichst genau mit wenig Aufwand.

• Aufgabe 7–55:
Zu berechnen ist $\cos(32°)$ mit Hilfe von Taylorapproximationen. und dem bekannten Wert von $\cos 30°$.

(a) Mit Hilfe eine Taylorapproximation erster Ordnung.

(b) Mit Hilfe eine Taylorapproximation zweiter Ordnung.

(c) Für die beiden obigen Approximationen ist der maximale Fehler R_1 (resp. R_2) zu bestimmen.

• Aufgabe 7–56:
Verwenden Sie eine Approximation von Taylor der Ordnung 1 um die Aufgabe zu lösen.

(a) Bestimmen Sie $\tan 28°$ mit einer einfachen Rechnung möglichst genau. Tip: $28 = 30 - 2$

(b) Bestimmen Sie den maximal möglichen Fehler im obigen Problem.

• Aufgabe 7–57:
Finde den maximal möglichen Fehler der Approximation

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

falls nur $|x| \leq 0.5$ betrachtet werden.

• Aufgabe 7–58:
Betrachten Sie die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall I .

$$f(x) = e^{\sin(x)} \quad \text{mit} \quad x \in I = [\pi - 0.2,\ \pi + 0.2]$$

(a) Finden Sie das Taylorpolynom zweiter Ordung an der Stelle $x_0 = \pi$.

(b) Finden Sie eine obere Schranke für den Fehler der obigen Approximation von $f(x)$.

• Aufgabe 7–59:
Finden Sie die ersten drei Terme der Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \cos(2\sin(3x))$ für kleine Werte von $|x|$. Wie gross ist der maximal mögliche Fehler für $-1 < x < 1$?

• Aufgabe 7–60:
Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sin(e^x)$ auf dem Intervall $[0.8\,,\,1.2]$.

(a) Finden Sie das Taylorpolynom zweiter Ordung an der Stelle $x_0 = 1.0$.

(b) Finden Sie eine obere Schranke für den Fehler der obigen Approximation von $f(x)$.

• Aufgabe 7–61:
Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = e^{2\,x}$ in der Nähe des Punktes $x_0 = 1$.

(a) Bestimmen Sie die Taylorapproximation $T_2(x)$ der Ordnung 2 dieser Funktion. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x)$ und $T_2(x)$ auf dem Intervall $0 < x < 2$.

(b) Bestimmen Sie die Taylorapproximation $T_4(x)$ der Ordnung 4 dieser Funktion. und bestimmen Sie den maximalen Fehler auf dem Intervall $0.5 < x < 1.5$.

• Aufgabe 7–62:
Von einem Polynom f vom Grad 3 weiss man, dass

$$f(1) = -2 \qquad f'(1) = 0 \qquad f''(1) = 0 \qquad f^{(3)}(1) = 3$$

Finden Sie die Taylorentwicklung dieses Polynoms an der Stelle $x_0 = 2$.

• Aufgabe 7–63:
Die Hyperbeltangens–Funktion ist gegeben durch

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

(a) Drücken Sie $\tanh x$ nur mit Hilfe der Exponentialfunktion aus.

(b) Zeigen Sie, dass wegen $e^x > 0$ immer gilt $-1 < \tanh x < 1$.

(c) Zeigen Sie, dass diese Funktion strikt monoton wachsend ist.
Tip: Ableitung und Teil (b).

(d) Finden Sie eine gute Approximation von $\tanh x$ durch ein Polynom vom Grade 2 für kleine Werte von $|x|$.

(e) **Leiten Sie eine Formel her**, um aus dem gegebenen Wert von z und der Beziehung $z = \tanh x$ den Wert von x zu bestimmen. Sie dürfen nur Exponential– und Logarithmusfunktionen verwenden.
Tip: Auflösen nach x.

• Aufgabe 7–64:
Betrachten Sie die Funktion $y(x) = \cos(x)$.

(a) Finden Sie einige Terme der Taylorreihe bei $x_0 = \pi/2$.

(b) Wie viele Terme müssen minimal berücksichtigt werden, damit der Approximationsfehler auf dem Intervall $[0, \pi]$ sicher kleiner als 10^{-8} ist?

(c) Wie viele Multiplikationen sind nötig um für ein x diesen approximativen Wert von $\cos\, x$ zu bestimmen?

• Aufgabe 7–65:
Betrachten Sie die Funktion $f\,(x) = \ln x$ in der Nähe von $x_0 = e$.

(a) Finden Sie die Taylorapproximation der Ordnung 5 bei $x_0 = e$.

(b) Wie gross ist der Fehler maximal für Werte von $f\,(x)$ für $2 \leq x \leq 3$?

(c) Auf welchem Intervall um $x_0 = e$ ist der Approximationsfehler kleiner als 10^{-3} ?

• Aufgabe 7–66:
Mit einem Prozessor, der nur multiplizieren und addieren kann, soll die Funktion $\sin(x)$ durch eine Taylorreihe mit einem Fehler der kleiner ist als 10^{-8} bestimmt werden. Wegen Symmetrieüberlegungen muss nur das Intervall $[0, \pi/2]$ betrachtet werden.

(a) Finden Sie ein Taylorpolynom möglichst niedriger Ordnung mit den verlangten Eigenschaften.

(b) Wie viele Additionen und Multiplikationen sind notwendig um einen Funktionswert auszurechnen?

(c) Schreiben Sie ein Programm (MODULA, C, Assembler,…) um diese Funktion zu berechnen.

• Aufgabe 7–67:
Der Intelprozesser 80486 stellt den Floatingpoint–Befehl $2^x - 1$ zur Verfügung, wobei nur Argumente $-1 \leq x \leq 1$ zugelassen sind. Entwickeln Sie einen Algorithmus, um diese Funktion nur mit Hilfe der arithmetischen Grundfunktionen auszurechnen. Der Fehler soll kleiner als 10^{-8} sein.

• Aufgabe 7–68:
Untersuchen Sie die folgende Funktion für kleine Werte von $|x|$. Diese Aufgabe ist ohne Taschenrechner zu lösen.

$$f\,(x) = \ln\,(1 + x)$$

(a) Finden Sie die ersten drei Terme (nicht Null) der Taylorapproximation.

(b) Berechnen Sie $\ln 1.2$ mit der oben erhaltenen Formel approximativ.

(c) **Schätzen** Sie die den Fehler der Approximation von $\ln 1.2$ in der obigen Teilaufgabe.

• Aufgabe 7–69:
Untersuchen Sie die Funktion

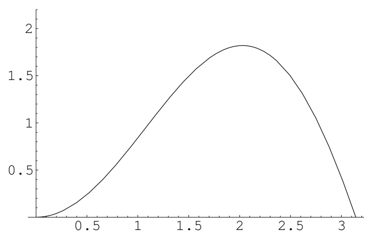
$$f\,(x) = x - \cos\, x$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an die Kurve im Punkt $x = \frac{\pi}{4}$.

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der obigen Tangente mit der x–Achse. Was hat dieser Punkt mit der ursprünglichen Funktion $f\,(x)$ zu tun? Tip: Graphik.

• Aufgabe 7–70:

Der Graph der Funktion $f(x) = x\ \sin x$ ist rechts zu sehen. Es gibt einen genau einen Punkt $0 < x_0 < \pi$, sodass die Tangente an den Graphen von $f(x)$ an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ die y-Achse auf der Höhe 1 schneidet. Zeichnen Sie diese Situation und finden Sie eine **Gleichung** für den Wert von x_0.



• Aufgabe 7–71:
Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \sin x$

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an die Kurve im Punkt $x = x_0$.

(b) Der Schnittpunkt der obigen Tangente mit der y–Achse liegt auf der Höhe 2. Finden Sie die **Gleichung** für x_0.

7.10.5 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 7–3 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h\,(x+h)^2\,x^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h\,(x+h)^2\,x^2} = \frac{-2}{x^3} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–4 :

(a) Da die Ableitung an der Stelle $x = 0$ gegeben ist als Wert und durch die Definition der Ableitung gilt

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(b) Aus der Definition der Ableitung, angewandt auf die Funktion $g(x) = e^{3\,x}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\, g(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{3\,(x_0+h)} - e^{3\,x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{3\,x_0}\left(e^{3\,h} - 1\right)}{h} \\ &= e^{3\,x_0} \lim_{h\to 0} \frac{3\ \left(e^{3\,h} - 1\right)}{3\,h} = e^{3\,x_0}\ 3\ \lim_{3h\to 0} \frac{\left(e^{3\,h} - 1\right)}{3\,h} = e^{3\,x_0}\ 3 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–5 :

(a) Da die Ableitung an der Stelle $x = 1$ gegeben ist als Wert und durch die Definition der Ableitung gilt

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

(b) Aus der Definition der Ableitung, angewandt auf die Funktion $f(x) = \ln(x)$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\, f(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\frac{x_0+h}{x_0})}{h} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{x_0\ \frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \lim_{h=\frac{\Delta x}{x_0}\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{1}{x_0}\ 1 = \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–6 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\, f(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{2\,(x_0+h)} - e^{2\,x_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{2\,x_0}\left(e^{2\,h} - 1\right)}{h} \\ &= e^{2\,x_0} \lim_{h\to 0} \frac{2\ \left(e^{2\,h} - 1\right)}{2\,h} \\ &= e^{2\,x_0}\ 2 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–8 : Wegen der Definition der Ableitung ist der folgende Grenzwert zu berechnen.

$$\frac{d}{dx}\ \cosh x = \lim_{h\to 0} \frac{\cosh(x+h)-\cosh x}{h}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\cosh(x+h)-\cosh x}{h} &= \frac{\sinh x \sinh h + \cosh x \cosh h - \cosh x}{h} \\
&= \frac{\sinh x \sinh h}{h} + \frac{\cosh x \cosh h - \cosh x}{h} \\
&= \sinh x\ \frac{\sinh h}{h} + \cosh x\ \frac{\cosh h - 1}{h} \\
&= \sinh x\ \frac{\sinh h}{h} + \cosh x\ \frac{(\cosh h - 1)(\cosh h + 1)}{h(\cosh h + 1)} \\
&= \sinh x\ \frac{\sinh h}{h} + \cosh x\ \frac{\cosh^2 h - 1}{h(\cosh h + 1)} \\
&= \sinh x\ \frac{\sinh h}{h} + \cosh x\ \frac{\sinh^2 h}{h(\cosh h + 1)} \\
&= \sinh x\ \frac{\sinh h}{h} + \cosh x\ \frac{\sinh h}{h}\ \frac{\sinh h}{\cosh h + 1} \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \sinh x + \cosh x \cdot 1 \cdot 0 = \sinh x
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\frac{d}{dx}\ \cosh x = \sinh x$$

Lösung zu Aufgabe 7–10 : Die Funktion $f \cdot g \cdot h = (f \cdot g) \cdot h$ ist zu untersuchen. Da f und g differenzierbar sind, ist auch $f \cdot g$ ableitbar und es gilt

$$\frac{d}{dx}\ (f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Durch nochmaliges Anwenden der Produktregel wissen wir nun, dass auch $(f \cdot g) \cdot h$ ableitbar ist und

$$\frac{d}{dx}\ ((f \cdot g) \cdot h) = (f \cdot g)' \cdot h + (f \cdot g) \cdot h' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

Lösung zu Aufgabe 7–11 :

(a)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{(x+h)\,x\,h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)\,x} = \frac{-1}{x^2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-2}{x^3}$$

Lösung zu Aufgabe 7–12 :

(a)

$$\begin{aligned}
\left(f^2(x)\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) + f(x))\,(f(x+h) - f(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(f(x+h) + f(x)) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \\
&= 2\,f(x)\,f'(x)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(f(x)\,g(x))' &= \frac{1}{2}\,\Big(\,(f(x) + g(x))^2 - f^2(x) - g^2(x)\,\Big)' \\
&= (f(x) + g(x))\,\left(f'(x) + g'(x)\right) - f(x)\,f'(x) - g(x)\,g'(x) \\
&= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
h(x)\,g(x) &= f(x) \\
h'(x)\,g(x) + h(x)\,g'(x) &= f'(x) \\
h'(x) &= \frac{1}{g(x)}\,\left(f'(x) - h(x)\,g'(x)\right) \\
&= \frac{1}{g(x)}\,\left(f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}\,g'(x)\right) \\
&= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–14 :

$$\begin{aligned}
(a) &: \frac{d}{dx}\,\left(x - 3\,x^3 + \sin(2\,x)\right) = 1 - 9\,x^2 + 2\,\cos(2\,x) \\
(b) &: \frac{d}{dx}\,\frac{e^{2x}}{1+x^2} = \frac{2\,e^{2x}(1+x^2) - e^{2x}2\,x}{(1+x^2)^2} \\
(c) &: \frac{d^2}{dx^2}\,(e^x)^x = \frac{d^2}{dx^2}\,e^{x\cdot x} = \frac{d}{dx}\,2\,x\,e^{x\cdot x} = 2\,e^{x\cdot x} + 4\,x^2\,e^{x\cdot x} \\
(d) &: \frac{d}{dx}\,\left(x^2\,\tan(\frac{x}{2})\right) = 2\,x\,\tan(\frac{x}{2}) + \frac{x^2}{2}\,(1 + \tan^2(\frac{x}{2}))
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–15 :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{d}{dx}\,\sin\left(2\,x + e^{(x^2)}\right) = \cos\left(2\,x + e^{(x^2)}\right) \cdot \left(2 + 2\,x\,e^{(x^2)}\right) \\
b &= \frac{d}{dz}\,\frac{x^2 - x\,z}{z^2 + 4\,x} = \frac{-x\,(z^2 + 4\,x) - 2\,z\,(x^2 - x\,z)}{(z^2 + 4\,x)^2} = \frac{x\,z^2 - 2\,x^2\,z - 4\,x^2}{(z^2 + 4\,x)^2} \\
c &= \frac{d}{dx}\,\left(\sqrt[3]{2\,x} + x^x\right) = \frac{d}{dx}\,\left((2\,x)^{1/3} + e^{x\,\ln x}\right) = \frac{2}{3}\,(2\,x)^{-2/3} + e^{x\,\ln x}(\ln x + 1) \\
d &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{2\,x} - 2\,x} = \frac{0}{1-0} = 0 \\
f &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{2\,x} - 1 - 2\,x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,e^{2\,x} - 2}{2\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\,e^{2\,x}}{2} = 2
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–16 :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{d}{dx}\,\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} \\
b &= \frac{d}{dx}\,\sin(x^2)\cdot e^{-3x} = 2\,x\,\cos(x^2)\cdot e^{-3x} - \sin(x^2)\cdot 3\,e^{-3x} \\
c &= \frac{d}{dx}\,x^y = \frac{d}{dx}\,e^{y\,\ln x} = e^{y\,\ln x}\,\frac{y}{x} = y\,x^{y-1} \\
d &= \frac{d}{dy}\,x^y = \frac{d}{dy}\,e^{y\,\ln x} = e^{y\,\ln x}\,\ln x = x^y\,\ln x \\
e &= \frac{d}{da}\,\log_a x = \frac{d}{da}\,\frac{\ln x}{\ln a} = -\frac{\ln x}{(\ln a)^2}\,\frac{1}{a} = \frac{-\ln x}{a\,(\ln a)^2}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–19 :

$$\begin{aligned}
\frac{d\,f}{dx} &= e^{\sin\,(x^2+1)}\;\cos\,(x^2+1)\;2x \\
\frac{d\,h}{dt} &= \frac{2\,\cosh t\,\sinh\,t\,(t^4+1) - \cosh^2\,t\,4\,t^3}{(t^4+1)^2} \\
x\,(t) &= \cos^2\left(\ln\left(t^4+t^2+8\right)\right) + \sin^2\left(\ln\left(t^4+t^2+8\right)\right) = 1 \qquad \dot{x}\,(t) = 0 \\
g\,(z) &= \sqrt[3]{1+z^2} = (1+z^2)^{1/3} \\
g'\,(z) &= \frac{1}{3}\,(1+z^2)^{-2/3}\;2\,z \\
g''\,(z) &= \frac{-2}{9}\,(1+z^2)^{-5/3}\;4\,z^2 + \frac{1}{3}\,(1+z^2)^{-2/3}\;2
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–20 :

(a)

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - 3\,x^3 - \frac{1}{x^2}\right) = 2\,x - 9\,x^2 + \frac{2}{x^3}$$

(b) Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin\,(2\,x) - 2\,x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\,\cos\,(2\,x) - 2}{3\,x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-4\,\sin\,(2\,x)}{6\,x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-8\,\cos\,(2\,x)}{6} = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\,(2\,x) - 2\,x}{x^3} = \frac{\sin\,(2\,\pi) - 2\,\pi}{\pi^3} = \frac{-2\,\pi}{\pi^3} = \frac{-2}{\pi^2}$$

(d)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(\sinh(3\,x^3))}{1+x^2}\right) = \frac{\cos(\sinh(3\,x^3))\;\cosh\,(3\,x^3)\;9\,x^2\cdot(1+x^2) - \sin(\sinh(3\,x^3))\cdot 2\,x}{(1+x^2)^2}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\,e^{\cos x} &= \frac{d}{dx}\,\left(-e^{\cos x}\,\sin x\right) \\
&= +e^{\cos x}\,\sin^2 x - e^{\cos x}\,\cos x
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–21 :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{2x}\,2\,\sin(x^2)+e^{2x}\,\cos(x^2)\,2\,x\\
a &= f'(0)=0\\
b &= \lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x)}{2\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x)}{2}=\frac{1}{2}\\
c &= 2^{101}\,\cos(2\,x)\approx 2.5\cdot 10^{30}\,\cos(2\,x)\\
d &= \frac{1}{8}\,e^{x/2}+6\\
e &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)+1}{x^2}\quad\text{existiert nicht, wegen}\quad\frac{2}{0}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–22 :

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}$$

(a)

$$b^2-4\,a\,c>0\qquad\Longrightarrow\qquad a<\frac{b^2}{4\,c}$$

(b) Wegen $b<0$ ist $\sqrt{b^2}=-b>0$ und man erhält

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{a\to 0+}x_1=\lim_{a\to 0+}\frac{-b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}=+\infty\\
B &= \lim_{a\to 0+}x_2=\lim_{a\to 0+}\frac{-b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}\\
&= \lim_{a\to 0+}\frac{\frac{4\,c}{2\sqrt{b^2-4\,a\,c}}}{2}=\lim_{a\to 0+}\frac{c}{\sqrt{b^2-4\,a\,c}}=\frac{c}{\sqrt{b^2}}=\frac{c}{-b}>0
\end{aligned}$$

Für den zweiten Grenzwert wurde das Verfahren von de l'Hospital eingesetzt.

Es gibt auch eine Möglichkeit den Grenzwert graphisch zu bestimmen:

- Eine Parabel $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ schneidet die y–Achse bei $y=c$ mit einer Steigung von b.
- Der Wert von a gibt an wie stark die Parabel „gekrümmt“ ist. Für $a\to 0$ nähert sich der Graph von f immer mehr einer Geraden an.
- Die Gerade mit y–Achsenabschnitt c und Steigung b schneidet die x–Achse bei $x=-c/b$.

Lösung zu Aufgabe 7–23 :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{d}{dx}\,\cos(x^2)=-\sin(x^2)\cdot 2\,x\\
b &= \frac{d}{dx}\,\left(\sqrt{x}\,\sin(x)\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\sin x+\sqrt{x}\,\cos(x)\\
c &= \frac{d}{dx}\,\frac{1+2\,x+3\,x^3}{1+\sin^2 x}=\frac{(0+2+9\,x^2)(1+\sin^2 x)-(1+2\,x+3\,x^3)(0+2\,\sin x\,\cos x)}{(1+\sin^2 x)^2}\\
&= \frac{(2+9\,x^2)(1+\sin^2 x)-(1+2\,x+3\,x^3)(2\,\sin x\,\cos x)}{(1+\sin^2 x)^2}\\
d &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sin(n^3)}{3\,n^2-n+1/n}=\frac{1}{3}\\
e &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\,x)}{x}=\pi\lim_{\pi\,x\to 0}\frac{\sin(\pi\,x)}{\pi\,x}=\pi\\
f &= 6+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}=6\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{3^k}=6\,\frac{1-\frac{1}{3^6}}{1-\frac{1}{3}}=6\,\frac{3-\frac{1}{3^5}}{2}=9-\frac{1}{81}=\frac{728}{81}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–24 :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{d}{dx}\,\sin\left(2\,x+e^{(x^2)}\right) \;=\; \cos\left(2\,x+e^{(x^2)}\right)\cdot\left(2+2\,x\,e^{(x^2)}\right)\\
b &= \frac{d}{dz}\,\frac{x^2-x\,z}{z^2+4\,x} \;=\; \frac{-x\,(z^2+4\,x)-2\,z\,(x^2-x\,z)}{(z^2+4\,x)^2}\\
c &= \frac{d}{dx}\,\left(\sqrt[3]{2\,x}+x^x\right) \;=\; \frac{d}{dx}\,\left((2\,x)^{1/3}+e^{x\,\ln x}\right) \;=\; \frac{2}{3}\,(2\,x)^{-2/3}+e^{x\,\ln x}(\ln x+1)\\
d &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{2\,x}-2\,x} \;=\; \frac{0}{1-0} \;=\; 0\\
f &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2\,x}-1-2\,x}{x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{2\,e^{2\,x}-2}{2\,x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{4\,e^{2\,x}}{2} \;=\; 2
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–38 : $g^{(9999)}\,(t) = -9999\;\sin\,(t) - t\;\cos\,(t)$

Lösung zu Aufgabe 7–39 :

(a) Es gilt

$$f\,(b) = f\,(0+b) = f\,(0)\cdot f\,(b)$$

und somit

$$f\,(0) = \frac{f\,(b)}{f\,(b)} = 1$$

(b)

$$\begin{aligned}
f'\,(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f\,(x+h)-f\,(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f\,(x)\;(f\,(h)-f\,(0)}{h}\\
&= f\,(x)\;\lim_{h\to 0}\frac{f\,(h)-f\,(0)}{h}\\
&= f\,(x)\;f'\,(0) = 2f\,(x)
\end{aligned}$$

Später (Differentialgleichungen) werden wir zeigen können, dass diese Funktion $f\,(x) = 1e^{2x}$ sein muss.

Lösung zu Aufgabe 7–40 : Verwenden Sie zuerst die Umformung $\sin^2(t/2) = \frac{1}{2}\;(1-\cos\,t)$ um dann zum Ergebnis $g^{(9999)}\,(t) = -\dfrac{\sin\,t}{2}$ zu kommen.

Lösung zu Aufgabe 7–42 : Aufgrund der binomischen Formel gilt

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}\;(-1)^k = (1-1)^n = 0$$

Lösung zu Aufgabe 7–43 : Aufgrund der binomischen Formel gilt

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}\;2^k = (1+2)^n = 3^n$$

Lösung zu Aufgabe 7–44 :

(a)

$$\begin{aligned} F(x) = \ln y(x) &= \ln\left(u(x)\; v(x)\; w(x)\right) \\ &= \ln\, u(x) + \ln\, v(x) + \ln\, w(x) \\ \frac{d}{dx}\, F(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)} \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\, F(x) = \frac{d}{dx}\, \ln\left(y(x)\right) = \frac{y'(x)}{y(x)}$$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{y(x)} &= \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)} \\ y'(x) &= y(x)\, \left(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)}\right) \\ &= u'(x)\; v(x)\; w(x) + u(x)\; v'(x)\; w(x) + u(x)\; v(x)\; w'(x) \end{aligned}$$

Dies ist die wohlbekannte Produktregel.

Lösung zu Aufgabe 7–45 :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\,x) - 2\,x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\,\cos(2\,x) - 2}{3\,x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-4\,\sin(2\,x)}{6\,x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-8\,\cos(2\,x)}{6} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–47 :

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} = 2$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\cos x)}{\tan(2x)}\, \frac{1}{2}$$

(c)

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{1-x} - \frac{\cos(1-x)}{\sin(1-x)}\right) \quad \text{existiert nicht}$$

(d)

$$\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{2x^2 - 2\pi} = 0$$

Einige Zeilen *Mathematica* bestimmen die selben Grenzwerte

Mathematica

```
{Limit[(1-Cos[2x])/x^2, x -> 0],
Limit[Sin[x Cos[x]]/Tan[2x], x -> 0],
Limit[2/(1-x)- Cos[1-x]/Sin[1-x], x -> 1],
Limit[(1+Cos[x])/(2 x^2 - 2 Pi), x -> Pi]}
.
              1
      {2, -, -Infinity , 0}
              2
```

Lösung zu Aufgabe 7–48 :

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^2-x^5}=0$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{\tan^2(x/2)}=4$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{6}$$

(d)

$$\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos(x)}{(2x-2\pi)^2}=\frac{1}{8}$$

Einige Zeilen *Mathematica* bestimmen die selben Grenzwerte

Mathematica

```
{Limit[(Sin[x]-x)/(x^2-x^5),x-> 0],
 Limit[Sin[x^2]/Tan[x/2]^2,x-> 0],
 Limit[1/(1-Cos[x])-2/x^2, x -> 0],
 Limit[(1+Cos[x])/(2x - 2 Pi)^2,x -> Pi]}
.
        1  1
{0, 4, -, -}
        6  8
```

Lösung zu Aufgabe 7–50 :

$$f(z)=f(-2+(z+2))=21-52\ (2+z)+45\,(2+z)^2-16\,(2+z)^3+2\,(2+z)^4$$

Lösung zu Aufgabe 7–51 :

(a) Bei $x_0=2\ f(x)=-3.-0.5\ (-2+x)+2\,(-2+x)^3$

(b) Bei $x_0=-2\ f(x)=-129.+95.5\ (2+x)-24\,(2+x)^2+2\,(2+x)^3$

(c) Bei $x_0=0\ f(x)=2\,x^3-12\,x^2+23.5\,x-18$

(d) Bei $x_0=1\ f(x)-4.5+5.5\ (-1+x)-6\,(-1+x)^2+2\,(-1+x)^3$

Lösung zu Aufgabe 7–52 :

(a)

$$f(x) = x^7$$

(b)

$$\begin{gathered} 1 + 7\,(-1+x) + 21\,(-1+x)^2 + 35\,(-1+x)^3 \\ +35\,(-1+x)^4 + 21\,(-1+x)^5 + 7\,(-1+x)^6 + (-1+x)^7 \end{gathered}$$

(c)

$$\begin{gathered} -1 + 7\,(1+x) - 21\,(1+x)^2 + 35\,(1+x)^3 \\ -35\,(1+x)^4 + 21\,(1+x)^5 - 7\,(1+x)^6 + (1+x)^7 \end{gathered}$$

(d)

$$\begin{gathered} 128 + 448\,(-2+x) + 672\,(-2+x)^2 + 560\,(-2+x)^3 \\ +280\,(-2+x)^4 + 84\,(-2+x)^5 + 14\,(-2+x)^6 + (-2+x)^7 \end{gathered}$$

Lösung zu Aufgabe 7–53 :

(a) $1 - \frac{x^2}{2}$

(b) $2\,x + \frac{8\,x^3}{3}$

(c)

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

(d)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(x-\pi/3)}{2} - \frac{\sqrt{3}\,(x-\pi/3)^2}{4} - \frac{(x-\pi/3)^3}{12}$$

(e) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$

(f) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$

Lösung zu Aufgabe 7–55 : Mit Hilfe von $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ erhält man $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ und $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Als Vergleich kann der 'exakte' Wert von $\cos 32^\circ \approx 0.848048$ herangezogen werden.

(a)

$$\cos(32^\circ) = \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{90}) \approx \cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{6})\,\frac{\pi}{90} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{180} \qquad (\approx 0.848572)$$

(b)

$$\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{90}) \approx \cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{6})\,\frac{\pi}{90} - \frac{1}{2}\,\cos(\frac{\pi}{6})\,(\frac{\pi}{90})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{180} - \frac{\sqrt{3}\,\pi^2}{4\cdot 90^2} \qquad (\approx 0.848044)$$

(c) Für den Fehler der linearen Approximation gilt

$$R_1 = -\frac{1}{2}\,\cos\xi\cdot(\frac{\pi}{90})^2 \quad \text{und somit} \quad |R_1| \leq \frac{1}{2}\,1\,(\frac{\pi}{90})^2 \approx 0.0006$$

Für den Fehler der quadratischen Approximation gilt

$$R_2 = -\frac{1}{6}\,\sin\xi\cdot(\frac{\pi}{90})^3 \quad \text{und somit} \quad |R_2| \leq \frac{1}{6}\,1\,(\frac{\pi}{90})^3 \approx 7\cdot 10^{-6}$$

In beiden Fällen ist der effektive Fehler kleiner als die gefundene Schranke.

Lösung zu Aufgabe 7–56 : Es ist zu beachten, dass die Rechnungen im Bogenmass durchgeführt werden sollten.

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + R \quad \text{wobei} \quad R = \frac{1}{2}\,f''(\xi)\cdot h^2 \\ f(x) &= \tan x \\ f'(x) &= 1+\tan^2 x \\ f''(x) &= 2\,\tan x\,(1+\tan^2 x) \end{aligned}$$

(a) $x_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$, $h = -2° = \frac{-\pi}{90}$, $f(x_0) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(x_0) = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$$\tan(28°) \approx \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\,\frac{-\pi}{90} \qquad (\approx 0.530808)$$

(b) Da $28° < \xi < 30°$ gilt $f''(\xi) \leq f''(30°) = \frac{8}{3\sqrt{3}} < 2$ und somit

$$|\,R\,| = \frac{1}{2}\,|\,f''(\xi)\,|\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \leq \left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \approx 0.0012$$

Lösung zu Aufgabe 7–57 : $|\text{Fehler}\,| \leq \frac{0.5^7}{7!} < 1.6\cdot 10^{-6}$.

Lösung zu Aufgabe 7–58 :

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\pi)$
0	$e^{\sin(x)}$	1
1	$e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)$	-1
2	$e^{\sin(x)}\cdot\cos^2(x) - e^{\sin(x)}\cdot\sin(x)$	$+1$
3	$e^{\sin(x)}\cdot\cos^3(x) - 3\,e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)\,\sin(x) - e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)$	

(a) Setze $x_0 = \pi$ und verwende

$$\begin{aligned} f(x) \approx T_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}\,f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + R \\ &= 1-(x-\pi) + \frac{1}{2}\,(x-\pi)^2 + R \end{aligned}$$

oder auch

$$f(\pi+\delta x) = e^{\sin(\pi+\Delta x)} \approx 1-\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^2$$

(b) Für den Rest R gilt

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{3!}\, f'''(\xi)\cdot(x-\pi)^3 \\ |R| &\leq \frac{1}{6}\left|e^{\sin(\xi)}\cdot\cos^3(\xi) - 3\,e^{\sin(\xi)}\cdot\cos(\xi)\,\sin(\xi) - e^{\sin(\xi)}\cdot\cos(\xi)\right|\cdot 0.2^3 \\ &\leq \frac{1}{6}\,|e+3\,e+e|\cdot 0.2^3 = \frac{5\,e}{6}\cdot 0.008 \approx 0.018 \end{aligned}$$

Verwendet man statt $|\sin(\xi)|\leq 1$ die bessere Abschätzung $|\sin(\xi)|\leq 0.2$, so erhält man

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{3!}\, f'''(\xi)\cdot(x-\pi)^3 \\ |R| &\leq \frac{1}{6}\left|e^{\sin(\xi)}\cdot\cos^3(\xi) - 3\,e^{\sin(\xi)}\cdot\cos(\xi)\,\sin(\xi) - e^{\sin(\xi)}\cdot\cos(\xi)\right|\cdot 0.2^3 \\ &\leq \frac{1}{6}\,e^{0.2}\,|1+3\cdot 0.2+1|\cdot 0.2^3 = \frac{2.6\,e^{0.2}}{6}\cdot 0.008 \approx 0.00423 \end{aligned}$$

Der effektive Fehler ist sogar kleiner als 0.00023 .

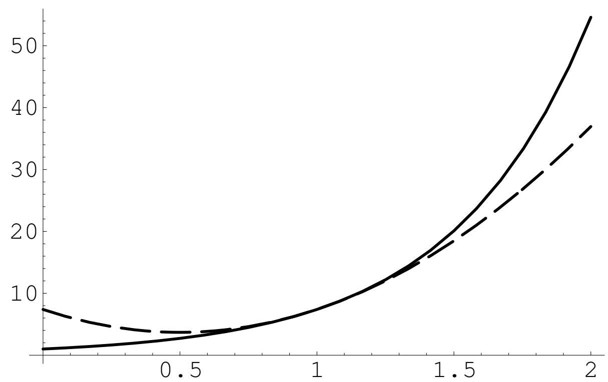
Lösung zu Aufgabe 7–61 : Die Ableitungen von $f(x)=e^{2\,x}$ sind $f^{(n)}(x)=2^n\,e^{2\,x}$.

(a)

$$T_2(x) = f(1)+f'(1)\cdot(x-1)+\frac{1}{2}\,f''(1)\cdot(x-1)^2 = e^2+2\,e^2\cdot(x-1)+\frac{4}{2}\,e^2\cdot(x-1)^2$$

Mathematica

```
T2[x_] = Normal[Series[Exp[2x], {x, 1, 2}]]
Plot[{Exp[2x], T2[x]}, {x, 0, 2},
     PlotStyle -> {Thickness[0.005],
                   {Thickness[0.005],Dashing[{0.05, 0.02}]}}];02}]}}];
```



(b) Die Taylorapproximation ist

$$T_4(x) = e^2+2\,e^2\cdot(x-1)+\frac{4}{2}\,e^2\cdot(x-1)^2+\frac{8}{6}\,e^2\cdot(x-1)^3+\frac{16}{24}\,e^2\cdot(x-1)^4$$

und für den Approximationsfehler gilt

$$|\text{ Fehler }| = |\frac{32}{120}\,e^{2\,\xi}\cdot(x-1)^5| \leq \frac{32}{120}\,e^{2\cdot 1.5}\,\frac{1}{2^5} = \frac{e^3}{120} \approx 0.167$$

Der effektive maximale Fehler im Intervall $(0.5\,,\,1.5)$ ist ca. 0.08 .

Lösung zu Aufgabe 7–62 : Aus den Werten der Ableitungen bei $x = 1$ erhält man

$$f(x) = -2 + \frac{3}{3!}\,(x-1)^3 = \frac{-4 + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{2}$$

Nun kann man das grosse Hornerschema verwenden, mit Vorteil für die neue (leicht modifizierte) Funktion

$$g(x) = 2\,f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 3 & -5 \\
x_0 = 2 & & 2 & -2 & 2 \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & \underline{-3} \\
x_0 = 2 & & 2 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 1 & \underline{3} & \\
x_0 = 2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \underline{3} & & \\
x_0 = 2 & & & & \\
\hline
 & \underline{1} & & &
\end{array}$$

Somit gilt

$$g(x) = -3 + 3\,(x-2) + 3\,(x-2)^2 + (x-2)^3$$

oder

$$f(x) = \frac{-3}{2} + \frac{3}{2}\,(x-2) + \frac{3}{2}\,(x-2)^2 + \frac{1}{2}\,(x-2)^3$$

Die Lösung kann mit *Mathematica* kontrolliert werden.

Mathematica

```
Clear[f,x];
f[x_] = -2 + 1/2(x-1)^3;
{Expand[f[x],x],Normal[Series[f[x],{x,2,3}]]}
.
                    2      3
   5      3 x    3 x      x
{-(-) + ---- - ----- + --,
   2       2      2      2

                          2              3
    3     3 (-2 + x)   3 (-2 + x)    (-2 + x)
  -(-) + ---------- + ----------- + ---------}
    2        2            2              2
```

Lösung zu Aufgabe 7–63 :

(a)

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(b) Wegen $e^x > 0$ und $e^{-x} > 0$ gelten die folgenden Ungleichungen

$$-1 = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}} < \frac{-e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh\,x < \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

(c) Es gilt

$$f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x > 0$$

Somit ist die Ableitung strikt positiv und die Funktion streng monoton wachsend.

(d) Taylor–Approximation für $f(x) = \tanh x$. Es gilt

$$f''(x) = -2\,\tanh\,x\,\left(1 - \tanh^2 x\right) = -2\,\tanh\,x + 2\,\tanh^3 x$$

und somit

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2}\,f''(0)\,x^2 = 0 + x + 0\,x^2 = x$$

(e) Zu bestimmen ist eine Formel für die Funktion $\operatorname{arctanh} z$.

$$\begin{aligned}
z &= \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
z\left(e^x + e^{-x}\right) &= e^x - e^{-x} \\
z\left(e^{2x} + 1\right) &= e^{2x} - 1 \\
e^{2x}\,(z-1) &= -1 - z \\
e^{2x} &= \frac{1+z}{1-z} \\
x &= \frac{1}{2}\,\ln\frac{1+z}{1-z} = \operatorname{arctanh} z
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7–64 :

(a) Die Tabelle

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$f^{(n)}(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	...
$f^{(n)}(\frac{\pi}{2})$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	...

führt auf die Taylorentwicklung um den Punkt $x_0 = \pi/2$

$$\cos(\pi/2 + x) = -x + \frac{1}{3!}\,x^3 - \frac{1}{5!}\,x^5 + \frac{1}{7!}\,x^7 - \ldots$$

(b) Der Fehler nach $n-1$ Termen ist von der Form

$$\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(\xi)x^n$$

Da in unserem Fall $|x| \leq \pi/2$ und $|f^{(n)}(\xi)| \leq 1$, ist die Bedingung

$$\frac{1}{n!}\,\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \leq 10^{-8}$$

zu erfüllen. Ein kurzes Probieren zeigt, dass diese Bedingung für $n = 14$ erfüllt ist, aber für $n = 13$ nicht. Somit müssen Terme bis und mit x^{13} berücksichtigt werden.

(c) Mit der Substitution $z = x^2$ muss der Ausdruck

$$x\,\left(-1 + \frac{1}{3!}\,z^1 - \frac{1}{5!}\,z^2 + \frac{1}{7!}\,z^3 - \frac{1}{9!}\,z^4 + \frac{1}{11!}\,z^5 - \frac{1}{13!}\,z^6\right)$$

bestimmt werden. Um das obige Polynom vom Grade 6 (in z) zu berechnen braucht es 6 Multiplikationen (Horner–Schema), dazu noch je eine Multiplikation um $z = x * x$ zu bestimmen und das Resultat mit x zu multiplizieren. Es genügen also 8 Multiplikationen. Die Terme $\frac{1}{k!}$ können als Konstanten eingesetzt werden.

Lösung zu Aufgabe 7–65 :

n	0	1	2	3	4	5	6	...
$f^{(n)}(x)$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{2}{x^3}$	$\frac{-6}{x^4}$	$\frac{24}{x^5}$	$\frac{-120}{x^6}$	...
$f^{(n)}(e)$	1	$\frac{1}{e}$	$\frac{-1}{e^2}$	$\frac{2}{e^3}$	$\frac{-6}{e^4}$	$\frac{24}{e^5}$	$\frac{-120}{e^6}$	...

(a) Mit der Notation $\Delta x = x - e$ gilt die Taylorapproximation

$$\ln(e + \Delta x) \approx 1 + \frac{1}{e}\,\Delta x - \frac{1}{2\,e^2}\,(\Delta x)^2 + \frac{1}{3\,e^3}\,(\Delta x)^3 - \frac{1}{4\,e^4}\,(\Delta x)^4 + \frac{1}{5\,e^5}\,(\Delta x)^5$$

(b) Für den Fehler gilt

$$R = \frac{1}{6!}\,f^{(6)}(\xi)\,(\Delta x)^6 = \frac{1}{6\,\xi^6}\,(\Delta x)^6$$

Da $2 \leq x \leq 3$ gilt $\Delta x \leq e - 2$ und $\frac{1}{\xi} \leq \frac{1}{2}$ und damit lässst sich der Fehler abaschätzen durch

$$|R| \leq \frac{1}{6 \cdot 2^6}\,(e-2)^6 \approx 3 \cdot 10^{-4}$$

(c) Die zu erfüllende Bedingung ist

$$\frac{1}{6 \cdot (e - \Delta x)^6}\,(\Delta x)^6 \leq 10^{-3}$$

Diese Bedingung ist erfüllt für $\Delta x < 0.8$.

Lösung zu Aufgabe 7–66 : Es gibt einige verschiedene, richtige Lösungen zu dieser Aufgabe. Hier sind drei davon vorgestellt. Sie verwenden die Tabelle

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$f^{(n)}(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	...
$f^{(n)}(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	...
$f^{(n)}(\frac{\pi}{4})$	$/1\sqrt{2}$	$/1\sqrt{2}$	$-/1\sqrt{2}$	$-/1\sqrt{2}$	$/1\sqrt{2}$	$/1\sqrt{2}$	$-/1\sqrt{2}$	$-/1\sqrt{2}$	...

(a) **Taylorentwicklung um** $x_0 = 0$.
Der grösst mögliche Wert von $h = x$ ist $|x| = \pi/2$. Es ergibt sich die Reihe

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 - \frac{1}{7!}\,x^7 - \ldots$$

Der Fehler nach $n-1$ Termen ist von der Form

$$\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(\xi)\,x^n$$

Da in unserem Fall $|x| \leq \pi/2$ und $|f^{(n)}(\xi)| \leq 1$, ist die Bedingung

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \leq 10^{-8}$$

zu erfüllen. Ein kurzes Probieren zeigt, dass diese Bedingung für $n = 14$ erfüllt ist, aber für $n = 13$ nicht. Somit müssen Terme bis und mit x^{13} berücksichtigt werden. Mit der Substitution $z = x^2$ muss der Ausdruck

$$x\left(1 - \frac{1}{3!}\,z^1 + \frac{1}{5!}\,z^2 - \frac{1}{7!}\,z^3 + \frac{1}{9!}\,z^4 - \frac{1}{11!}\,z^5 + \frac{1}{13!}\,z^6\right)$$

bestimmt werden. Um das obige Polynom vom Grade 6 (in z) zu berechnen braucht es 6 Multiplikationen (Horner–Schema), dazu noch je eine Multiplikation um $z = x * x$ zu bestimmen und das Resultat mit x zu multiplizieren. Es genügen also 8 Multiplikationen. Die Terme $\frac{1}{k!}$ können als Konstanten eingesetzt werden.

(b) **Taylorentwicklung um** $x_0 = \pi/4$.
Der grösst mögliche Wert von $h = x - x_0$ ist $|h| = \pi/4$. Es ergibt sich die Reihe

$$\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{4} + h) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + h - \frac{1}{2!}\,h^2 - \frac{1}{3!}\,h^3 + \frac{1}{4!}\,h^4 + \frac{1}{5!}\,h^5 - \frac{1}{6!}\,h^6 - \frac{1}{7!}\,h^7 + \ldots\right)$$

Der Fehler nach $n-1$ Termen ist von der Form

$$\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(\xi)\,h^n$$

Da in unserem Fall $|h| \leq \pi/4$ und $|f^{(n)}(\xi)| \leq 1$, ist die Bedingung

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n \leq 10^{-8}$$

zu erfüllen. Ein kurzes Probieren zeigt, dass diese Bedingung für $n = 11$ erfüllt ist, aber für $n = 10$ nicht. Somit müssen Terme bis und mit h^{10} berücksichtigt werden. Somit haben wir die Approximation

$$\sin(\frac{\pi}{4} + h) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + h - \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^6}{6!} - \frac{h^7}{7!} + \frac{h^8}{8!} + \frac{h^9}{9!} - \frac{h^{10}}{10!}\right)$$

Mittels des Hornerschemas braucht man also 11 Multiplikationen um für ein $0 \leq x \leq \pi/2$ den Wert von $\sin x$ zu bestimmen. Die Terme $\frac{1}{k!}$ wurden als Konstanten eingesetzt.

(c) **Taylorentwicklung um** $x_0 = 0$ **und um** $x_0 = \pi/2$.
Wir können auch die Fallunterscheidung

$$\sin x = \begin{cases} \sin(x) & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi/4 \\ \sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) & \text{falls } \pi/4 \leq x \leq \pi/2 \end{cases}$$

betrachten und die Approximationen

$$\sin(x) \approx x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 - \frac{1}{7!}\,x^7 + \frac{1}{9!}\,x^9$$

für $0 \leq x \leq \pi/4$ und

$$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) \approx 1 - \frac{1}{2!}\,(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}\,(x - \frac{\pi}{2})^4 - \frac{1}{6!}\,(x - \frac{\pi}{2})^6 + \frac{1}{8!}\,(x - \frac{\pi}{2})^8 - \frac{1}{10!}\,(x - \frac{\pi}{2})^{10}$$

für $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$ verwenden. In beiden Fällen ist der Fehler keiner als 10^{-8} und wir benötigen nur je 6 Multiplikationen. Die zusätzliche (im Vergleich zu den ersten beiden Lösungen) Fallunterscheidung wird für die gesamte Rechenzeit kaum ins Gewicht fallen.

Lösung zu Aufgabe 7–67 : Wegen $2^x = e^{x \ln 2}$ und

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

gilt

$$\begin{aligned} 2^x - 1 = e^{x \ln 2} - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^k}{k!} \\ &= x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2} + \frac{(x \ln 2)^3}{6} + \frac{(x \ln 2)^4}{24} + \ldots + \frac{(x \ln 2)^k}{k!} + R_k \end{aligned}$$

wobei für den Fehler gilt

$$|R_k| \leq \frac{(\ln 2)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Somit ist für $k = 9$ der Fehler kleiner als 10^{-9} (Ausprobieren mit Taschenrechner). Wir können also aus x zuerst mit einer Multiplikation $z = x \ln 2$ ausrechnen und dann mit dem Hornerschema

$$\begin{aligned} 2^x - 1 &\approx z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \ldots + \frac{z^9}{9!} \\ &= z \left(1 + \frac{z}{2} \left(1 + \frac{z}{3} \left(1 + \frac{z}{4} \left(\ldots \left(1 + \frac{z}{9}\right)\right)\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Insgesamt sind 9 Multiplikationen, 8 Additionen und noch 8 Divisionen durch kleine ganze Zahlen notwendig um $2^x - 1$ mit der verlangten Genauigkeit auszurechnen.

Intel verwendet vermutlich nicht eine einfache Approxiation dieser Art, mit erheblich mehr Aufwand (andere Approximationsmethoden) kann der Rechenaufwand noch weiter gesenkt werden.

Lösung zu Aufgabe 7–68 : Verwende die Taylorapproximation

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + \frac{1}{2}\, f''(x_0)\,\Delta x^2 + \frac{1}{6}\, f'''(x_0)\,\Delta x^3 + \frac{1}{24}\, f^{(4)}(\xi)\,\Delta x^4$$

mit $x_0 = 0$, $\Delta x = x$ und $f(x) = \ln(1 + x)$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\ln(1+x)$	0
1	$(1+x)^{-1}$	1
2	$-(1+x)^{-2}$	-1
3	$2\,(1+x)^{-3}$	2
4	$-6\,(1+x)^{-4}$	

(a)

$$\ln(1 + x) \approx 0 + 1\,x - \frac{x^2}{2} + \frac{2\,x^3}{6}$$

(b)

$$\ln(1.2) = \ln(1 + 0.2) \approx 0 + 0.2 - \frac{0.04}{2} + \frac{0.008}{3} = 0.1826666\ldots$$

(c) Der Fehler ist von der Form (für ein $0 < \xi < 0.2$)

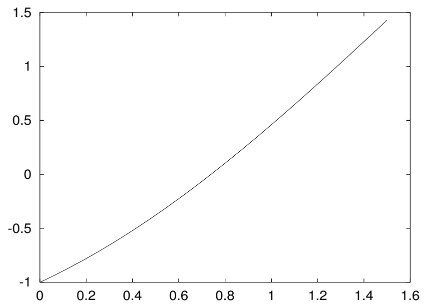
$$|\text{Fehler}\,| = \left|\frac{1}{4!}\, f^{(4)}(\xi)\, x^4\right| = \frac{1}{24}\, \frac{6}{(1+\xi)^4}\, 0.2^4 \leq \frac{6}{24}\; 0.0016 = 0.0004$$

Der effektive Fehler ist ca. 0.00034 (mit Taschenrechner).

Lösung zu Aufgabe 7–69 : Gibt man sich mit numerischen Approximationen zufrieden, so werden die Rechnungen wesentlich kürzer und einfacher.

(a) Zuerst Steigung der Tangente bestimmen, dann die Geradengleichung anschreiben.

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \cos(x) \\ f'(x) &= 1 + \sin(x) \\ f'(\frac{\pi}{4}) &= 1 + \sin(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y(x) &= f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4}) \cdot (x - \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (x - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$



(b) In der obigen Tangentengleichung muss $y = 0$ gesetzt werden, dann nach x auflösen.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (x - \frac{\pi}{4}) \\ (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot x &= -\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - \pi}{4} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \frac{\pi}{4} \\ x &= \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \, \frac{2\sqrt{2} - \pi}{4} + \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{2\,(2 + \sqrt{2})} \\ &\approx 0.739536 \end{aligned}$$

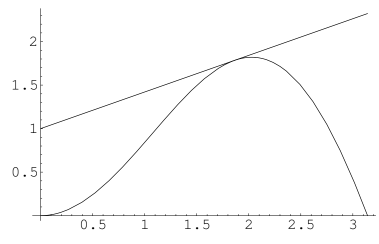
Da die Tangente eine gute Approximation der Kurve liefert, sollte die Nullstelle der Tangente nahe bei einer Nullstelle der Funktion $f(x) = x - \cos x$ sein. Das wird bestätigt durch das Resultat von *Mathematica*.

Mathematica

```
FindRoot[f[x]==0,{x,1}]
.
{x -> 0.739085}
```

Lösung zu Aufgabe 7–70 :
Die Gleichung der Tangente am Punkt $(x_0\,,\ f(x_0))$ ist

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ &= x_0 \sin x_0 + (\sin x_0 + x_0 \cos x_0) \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$



Damit diese Tangente die y-Achse bei $y = 1$ schneidet muss $g(0) = 1$ sein, d.h.

$$\begin{aligned} 1 &= x_0 \sin x_0 + (\sin x_0 + x_0 \cos x_0) \cdot (0 - x_0) \\ 0 &= x_0^2 \cos x_0 + 1 \end{aligned}$$

Numerische Verfahren (z.B. Newton) zeigen, dass $x_0 \approx 1.863$ die richtige Lösung ist.

Lösung zu Aufgabe 7–71 :

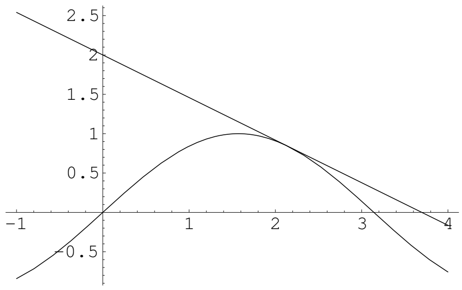
(a) Die allgemeine Gleichung einer Tangente ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ y(x) &= \sin(x_0) + \cos(x_0) \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

(b) Die Bedingung ist beschrieben durch $y(0) = 2$ und somit

$$\begin{aligned} 2 &= f(x_0) + f'(x_0)\ (-x_0) \\ 2 &= \sin(x_0) - x_0\ \cos(x_0) \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nicht elementar lösbar. Die Graphik zeigt, dass eine der Lösungen in der Nähe von 2 liegt. Diese Information ist nützlich als Startwert für das Verfahren von Newton.



7.11 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- die Definition der Ableitung und die Interpretation als Steigung der Tangente **sehr gut kennen**.
- Ableitungen schnell und zuverlässig bestimmen können.
- lineare Approximationen bestimmen können.
- Taylor Polynome von differenzierbaren Funktionen bestimmen können und in einfachen Situationen den Fehler abschätzen können.
- Grenzwerte mittels der Regel von de l'Hospital berechnen können.
- den Zwischenwertsatz der Differentialrechnung formulieren können und verstehen.

Kapitel 8

Anwendungen der Ableitung

In diesem Kapitel werden verschiedene Anwendungen der Ableitung vorgestellt.

8.1 Extremalprobleme

8.1.1 Theorie

8–1 Definition : Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1. f nimmt bei $x = x_0$ ihr **globales Maximum** an, falls
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für alle} \quad x \in [a, b]$$
2. f nimmt bei $x = x_0$ ein **lokales Maximum** an, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass
$$f(x_0 + h) \leq f(x_0) \quad \text{für alle } h \text{ mit} \quad |h| < \varepsilon \quad \text{und} \quad x_0 + h \in [a, b]$$
3. Analoge Definitionen gelten für **globale (lokale) Minima**.
4. Die Funktion nimmt ein globales (lokales) **Extremum** an, falls sie ein globales (lokales) Maximum oder Minimum annimmt.

Es ist leicht zu sehen, dass ein globales Extremum auch ein lokales Extremum sein muss, aber nicht umgekehrt.

8–2 Beispiel : Verifizieren Sie, dass die Funktion in Abbildung 8.1 auf dem Intervall $[0, 6]$ je ein globales Maximum und Minimum hat und zusätzlich noch ein lokales Maximum und 2 lokale Minima.

Mathematica

```
Clear[f,x,fig];
f[x_] = -(x-0.5)(x-2)(x-3)(x-5.5);
fig=Plot[f[x],{x,0,6},AxesLabel -> {"x","y"}];
```

◇

8–3 Theorem : *Notwendige Bedingung für ein Extremum*
Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die bei $x = x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum hat. Dann gilt
$$f'(x_0) = 0 \qquad .$$

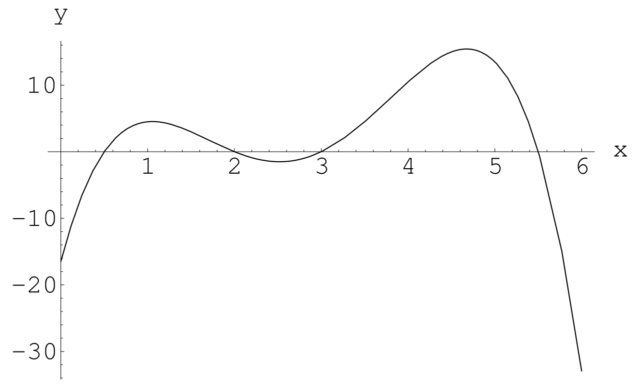


Abbildung 8.1: Lokale und globale Extrema

Beweis : Wir betrachten den Fall eines lokalen Maximums. Somit gilt $f(x_0+h) \leq f(x_0)$ für alle $|h|$ die klein genug sind. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &\leq 0 \\ \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &\geq 0 \end{aligned}$$

und somit muss $f'(x_0) = 0$ sein. □

Das obige Resultat zeigt, dass Extrema von Funktionen bei Nullstellen der Ableitung sein können, falls die Funktion differenzierbar ist. Zusätzlich kann es aber auch sein, dass eine Funktion in einzelnen Punkten nicht ableitbar ist und dort ein Extremum vorliegt. Als Beispiel sei die Funktion $g(x) = |x|$ erwähnt, die bei $x = 0$ ein lokales Minimum hat.

8–4 Definition : Sei $f(x)$ eine stetige Funktion. Der Punkt x_0 heisst **kritischer Punkt**, falls $f'(x_0) = 0$ oder die Ableitung nicht existiert.

Somit kann das obige Theorem auch so formuliert werden:

> Nimmt eine stetige Funktion in einem Punkt x_0 ein lokales Extremum an, so muss x_0 ein kritischer Punkt sein.

Diese Tatsache ist sehr nützlich und führt auf das folgende Verfahren, um Extrema von Funktionen in einer Variablen zu finden.

8–5 Satz : Methode zum Finden von Extrema
Um das Maximum (Minimum) einer Funktion $f(x)$ im Bereich $a \leq x \leq b$ zu finden, kann man folgendermassen vorgehen.

1. *Verifiziere, dass die Funktion stetig ist. Somit nimmt sie nach dem Satz vom Maximum ihr Maximum (und Minimum) an.*
2. *Finde alle kritischen Punkte der Funktion $f(x)$ im Bereich $a < x < b$.*
3. *Berechne die Werte der Funktion für die oben gefundenen x–Werte.*
4. *Berechne $f(a)$ und $f(b)$.*
5. *Finden den maximalen (minimalen) Wert unter den oben berechneten.*

Es ist unbedingt darauf zu achten, dass auch die Randpunkte a und b berücksichtigt werden.

8–6 Beispiel : Suche das Minimum und das Maximum der Funktion $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ auf dem Intervall $[-5, 5]$.

Mathematica
```
Clear[f,x,fig];
f[x_] = x^3 - 2x^2 + x - 5 ;
fig=Plot[f[x],{x,-5,5},AxesLabel -> {"x","y"},PlotRange->{-10,15}];
```

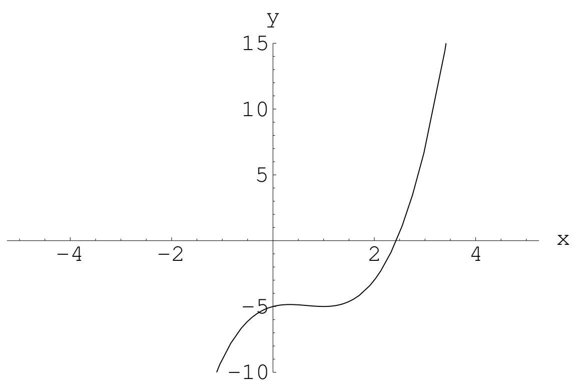


Abbildung 8.2: Randextrema

1. Die Funktion ist überall differenzierbar. Somit kommen nur Nullstellen der Ableitung als kritische Punkte in Frage.
2. Wir suchen nun alle kritischen Punkte. Dazu ist die Ableitung zu berechnen und dann sind die Nullstellen zu finden.
$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$$
Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x = \frac{1}{6}(4 \pm \sqrt{16 - 12})$, d.h. für $x = 1$ und $x = 1/3$. Man berechnet leicht $f(1) = -5$ und $f(1/3) = -4.851\ldots$.
3. Für die beiden Randpunkte gilt $f(-5) = -185$ und $f(5) = 75$.
4. Somit wird das Maximum von 75 bei $x = 5$ erreicht und das Minimum von -185 bei $x = -5$. Die beiden Nullstellen der Ableitung führen zu lokalen Extrema.

Dieses Resultat wird durch Abbildung 8.2 bestätigt. ♢

Das folgende Resultat ist manchmal nützlich, um Rechnungen zu vereinfachen.

8–7 Theorem : *Sei f eine stetige Funktion und g eine streng monotone, stetige Funktion. Die Funktion $f(x)$ nimmt genau dann ein Extremum an für $x = x_0$, falls auch die Funktion $g(f(x))$ bei $x = x_0$ ein Extremum annimmt.*

Beweis : Wir untersuchen nur eine streng monoton steigende Funktion g und eine Funktion f, die bei $x = x_0$ ein Maximum annimmt. Die anderen Fälle sind ähnlich zu behandeln.

Wegen

$$f(x) \leq f(x_0)$$

und der Monotonie von g gilt auch

$$g(f(x)) \leq g(f(x_0)) \qquad .$$

Somit nimmt auch $g(f(x))$ ein Maximum an in x_0. Genauso zeigt man

$$g(f(x)) \leq g(f(x_0)) \quad \Longleftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

$\square$

Auch wenn man weiss, dass x_0 ein kritischer Punkt ist ($f'(x_0) = 0$), so hat man noch keine Information, ob ein Maximum, Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt. Nun wollen wir ein Verfahren finden, um die verschiedenen Typen von kritischen Punkten zu unterscheiden. Ist $f \in C^3$, so weiss man wegen der Taylorapproximation für $|h| \ll 1$, dass

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)\, h + \frac{1}{2}\, f''(x_0)\, h^2 + o(h^2) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2}\, f''(x_0)\, h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

Vernachlässigt man den Term $o(h^2)$, so ist der Graph der Funktion (mit h als unabhängiger Variablen) eine Parabel, die nach oben oder unten geöffnet sein kann. Das Vorzeichen von $f''(x_0)$ entscheidet, ob ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt.

8–8 Satz : *Sei $x_0 \in I = (a, b)$ und $f \in C^3(I, \mathbb{R})$ mit $f'(x_0) = 0$.*

1. *Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f bei x_0 ein lokales Minimum.*
2. *Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f bei x_0 ein lokales Maximum.*
3. *Ist $f''(x_0) = 0$, so kann ein Maximum, Minimum oder auch ein Sattelpunkt vorliegen.*

Meistens genügt es, das Resultat in der obigen Form anzuwenden. Ist aber $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, so kann man noch keine Aussage machen. Dazu müssen mehr Terme in der Taylorentwicklung berücksichtigt werden. Sei $1 < m \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $f^{(m)}(x_0) \neq 0$. Dann ist die Taylorentwicklung der Funktion um den Punkt x_0 gegeben durch

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{m!}\, f^{(m)}(x_0)\, h^m + o(h^{m+1})$$

Aufgrund des qualitativen Verhaltens des Graphen von x^m ergibt sich das folgende Resultat.

8–9 Theorem : *Sei $x_0 \in I = (a,b)$ und $f \in C^{m+1}(I,\mathbb{R})$ mit $f^{(n)}(x_0) = 0$ für $n = 1,2,\ldots,m-1$ und $f^{(m)}(x_0) \neq 0$.*

1. *Ist m ungerade, so hat f bei x_0 einen Sattelpunkt.*
2. *Ist m gerade und $f^{(m)}(x_0) > 0$, so hat f bei x_0 ein lokales Minimum.*
3. *Ist m gerade und $f^{(m)}(x_0) < 0$, so hat f bei x_0 ein lokales Maximum.*

Das obige Resultat ist ein Spezialfall dieses Theorems ($m = 2$).

8.1.2 Einfache Beispiele

8–10 Beispiel : Zeige, dass die Funktion $y = (1-x)^2 \sin x$ bei $x_0 = 1$ ein lokales Extremum hat. Entscheide, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt.

Lösung: Man sieht leicht , dass

$$f'(x) = -2\,(1-x)\,\sin\,x + (1-x)^2\,\cos\,x = (1-x)\,(-2\,\sin\,x + (1-x)\,\cos\,x)$$

und

$$f''(x) = -4\,(1-x)\,\cos\,x + 2\,\sin\,x - (1-x)^2\,\sin\,x$$

Somit gilt

$$f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad f''(1) = 2\,\sin\,1 > 0\,,$$

und die Funktion hat bei $x = 1$ ein lokales Minimum. Dies wird durch Abbildung 8.3 bestätigt. ♢

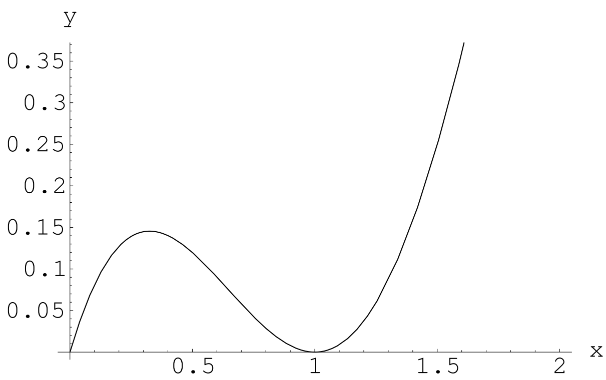


Abbildung 8.3: Graph von $f(x) = (1-x)^2\,\sin x$

8–11 Beispiel : Untersuche die Funktion $f(x) = x^4 + 4\,x^3 + 6\,x^2 + 4\,x + 1$ bei $x_0 = -1$. ♢

8–12 Beispiel : Untersuche die Funktion $f(x) = x^5 - 5\,x^4 + 10\,x^3 - 10\,x^2 + 5\,x$ bei $x_0 = 1$. ♢

8–13 Beispiel : In welchem Punkt hat die Gerade $y = 5 - 3x$ minimalen Abstand vom Punkt $P = (-2, 3)$?

Der Abstand d lässt leicht berechnen als

$$d = \sqrt{(x+2)^2 + (5 - 3\,x - 3)^2} = \sqrt{10\,x^2 - 8\,x + 8}.$$

Bei diesem Beispiel gibt es keine Randpunkte des Intervalles, es ist aber anschaulich klar, dass für grosse Werte vom $|x|$ der Abstand d auch gross wird und somit sicher nicht minimal ist.

Statt der Funktion d können wir aber wegen des Theorems über monotone Funktionen ($g\,(z) = \sqrt{z}$) die einfachere Funktion

$$f\,(x) = 10\,x^2 - 8\,x + 8$$

untersuchen. Man findet leicht, dass

$$f'\,(x) = 20\,x - 8 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{8}{20} = 0.4$$

Somit hat der Punkt $(0.4, 3.8)$ minimalen Abstand von $(-2, 3)$. Die Abbildung 8.4 bestätigt dieses Resultat.

$\diamondsuit$

Mathematica

```
Clear[f,x,fig,fig1];
f[x_] = 5-3x ;
fig1=Plot[f[x],{x,-3,4},AxesLabel -> {"x","y"},AspectRatio ->Automatic,
                              PlotRange -> {-1,6},DisplayFunction -> Identity];
fig   = Show[{fig1, Graphics[ Line[{ {-2,3},{0.4,f[0.4]} }]]},
     DisplayFunction ->$DisplayFunction];
```

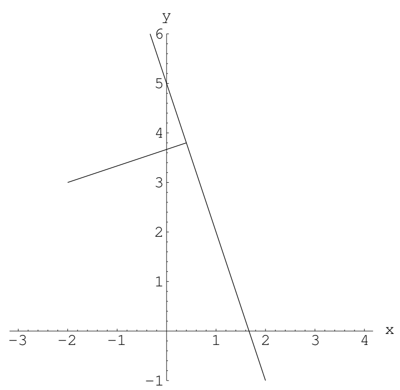


Abbildung 8.4: Minimaler Abstand Punkt–Gerade

Für Extremalprobleme vom obigen Typ kann immer nach dem selben Schema vorgegangen werden.

1. Die Aufgabenstellung ist mehrmals sorgfältig zu lesen.
2. Erstelle eine geeignete Zeichnung in der die verwendeten Grössen angeschrieben werden. Führe passende Notationen ein.
3. Stelle die Beziehungen zwischen den Grössen auf.
4. Finde die zu optimierende Grösse und eine günstige unabhängige Variable. Das führt zu der Funktion (mit Definitionsbereich), deren Extremum zu finden ist.
5. Verwende das oben vorgestellte Verfahren, um Lage und Wert des Extremums zu finden.
6. Interpretieren Sie das erhaltene Ergebnis.

8–14 Beispiel : Wasserstrahl aus einem Zylinder

Sei ein Wasserbehälter bis zur Höhe H mit Wasser gefüllt. In der Tiefe h unter dem Wasserspiegel befindet sich ein seitliches Loch, aus dem Wasser mit der horizontalen Austrittsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2gh}$ austritt. Auf welcher Höhe des Gefässes muss man diese Öffnung anbringen, damit der seitlich austretende Wasserstrahl in einer möglichst grossen Distanz L vom Gefäss entfernt am Boden auftrifft?

Die Bewegung des Wasserstrahls kann in guter Näherung als ein waagrechter Wurf im Vakuum betrachtet werden.

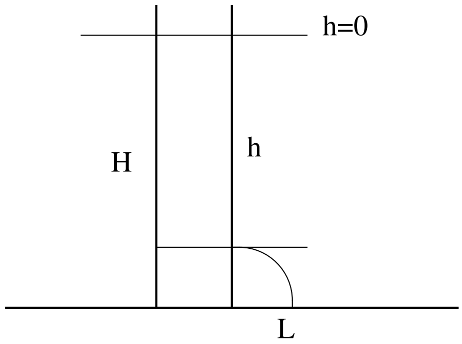


Abbildung 8.5: Wasserstrahl aus Zylinder

Lösung: Wir wählen den Koordinatenursprung bei der Austrittsstelle des Wasserstrahls mit positiver x–Richtung in der Richtung des Wasserstrahls und die y–Richtung nach unten. Dann lauten die Koordinaten eines Wasserteilchens zur Zeit $t \geq 0$

$$x(t) = v_0 t \qquad y(t) = \frac{g}{2}\, t^2 \qquad .$$

Durch Eliminieren des Parameters t erhält man

$$y = \frac{g}{2}\, t^2 = \frac{g}{2v_0^2}\, x^2 = \frac{g}{2 \cdot 2gh}\, x^2 = \frac{x^2}{4h}$$

Der Strahl trifft bei $y = H - h$ auf dem Boden auf, und somit gilt

$$H - h = \frac{L^2}{4h} \quad \text{oder} \quad L^2 = 4h\,(H-h) \qquad .$$

Statt L zu untersuchen, suchen wir dem Maximalwert von L^2.

$$\frac{d\,L^2}{dh} = 4H - 8h = 0 \quad \text{also} \quad h = \frac{H}{2}$$

Somit sollte das Loch auf halber Höhes des Zylinders angebracht werden. ♢

8–15 Beispiel : Leistungsanpassung eines Verbrauchswiderstandes

Das Bild zeigt einen einfachen Stromkreis mit einer Spannungsquelle U_0, einem Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle und einem Verbrauchswiderstand R_a. Wie gross ist R_a zu wählen, damit die abgegebene Leistung P möglichst gross wird?

Lösung: Der Gesamtwiderstand ist $R = R_i + R_a$, und somit fliesst ein Strom der Stärke

$$I = \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{R_a + R_i} \qquad .$$

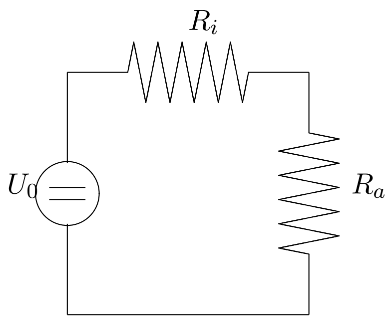


Abbildung 8.6: Leistungsanpassung von Verbrauchswiderstand

Das ergibt eine Leistung von

$$P = U\,I = R_a\,I\,I = R_a\,\frac{U_0^2}{(R_a+R_i)^2} \qquad .$$

Somit kennt man die Leistung P als Funktion des Verbrauchswiderstandes R_a, und man kann das Maximum dieser Funktion suchen. Die Lösung des Problems ist (nach einer kurzen Rechnung) gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{d\,P}{dR_a} &= U_0^2\,\frac{(R_a+R_i)^2 - R_a\,2\,(R_a+R_i)}{(R_a+R_i)^4} = 0 \\
(R_a+R_i)^2 &= R_a\,2\,(R_a+R_i) \\
R_a+R_i &= 2\,R_a \\
R_a &= R_i
\end{aligned}$$

d.h. der Wirkungsgrad bei maximaler Leistung ist nur 50%. ♢

8–16 Beispiel : Um das Minimum der Funktion

$$(x-1)^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$y^2 = 4x$$

zu finden, kann man die Bedingung einsetzen, und somit ist das Minimum der Funktion

$$f\,(x) = (x-1)^2 + 4\,x\ .$$

zu suchen. Diese Funktion ist offensichtlich überall beliebig oft differenzierbar, und das Nullsetzen der Ableitung liefert sofort die einzige Lösung $x = -1$. Leider liegt dieser Punkt sicher nicht auf der Parabel $y^2 = 4x$. Weshalb stimmt das Schlussresultat dieser Rechnung nicht? ♢

8–17 Beispiel : Quelle: [Apos92b, p. 255]
Zwei Bäume sind eine feste Distanz D voneinander entfernt. Auf gleicher Höhe wird an diesen Bäumen eine Schnur befestigt, und in der Mitte wird an der Schnur ein Gefäss mit Vogelfutter befestigt. Es gibt drei mögliche Arten von Schnurkonstruktionen, sie gleichen den Buchstaben T, V und Y. Die ersten beiden Formen sind Spezialfälle der dritten. Der Futterkasten muss um d tiefer liegen als die beiden Befestigungspunkte an den Bäumen. Finde die Konfiguration mit dem geringsten Schnurverbrauch.

Betrachten Sie die Länge h des vertikalen Schnurstückes der Y–Konfiguration als unabhängige Variable. Somit entspricht $h = 0$ der V-Aufhängung und $h = d$ der T–Form.

Lösung: Ist $D > 2\sqrt{3}\,d$, so ist die V–Form zu verwenden, für $D < 2\sqrt{3}\,d$ die Y–Form.

Bemerkung: Zwischen dieser Aufgabe und dem **Problem von Steiner**[1] besteht ein enger Zusammenhang. Betrachten wir die drei Endpunkte der Schnüre als gegeben, so gilt es, die kürzestmögliche Verbindung zwischen diesen drei Punkten herzustellen. Dazu kann der innere „Verbindungspunkt" frei gewählt werden. Dies kann als Extremalproblem mit zwei unabhängigen Variablen aufgefasst werden. Man kann zeigen, dass sich ein Winkel von 120° zwischen den verbindenden Geraden einstellen muss. ♢

8–18 Beispiel : Quelle: [Apos92a, p.290]
Finde den Punkt auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$, der den kürzesten Abstand vom Punkt $(2, 0)$ hat.

Lösung: Wir wählen x als unabhängige Variable. Auf dem Kreis gilt $y^2 = 1 - x^2$. Der Abstand L des Punktes (x, y) von $(2, 0)$ ist gegeben durch

$$L^2 = (2 - x)^2 + y^2 = (2 - x)^2 + 1 - x^2 = 5 - 4\,x\ .$$

Setzen wir die Ableitung dieser Funktion 0, so erhalten wir den Ausdruck

$$0 = -4\ .$$

Was ist falsch bei dieser Rechnung? ♢

8.1.3 Lichtbrechung und Reflexion

Ein Lichtstrahl verläuft von einem Punkt A im Medium 1 zum Punkt B im Medium 2. Die beiden Medien sind durch eine Ebene getrennt. und die Lichtgeschwindigkeiten in den Medien seien c_1 und c_2. Der Weg des Lichtstrahls wird duch das **Fermat'sche**[2] **Prinzip** bestimmt.

Das Licht schlägt immer den Weg ein, der extremale (minimale oder maximale) Zeitdauer erfordert.

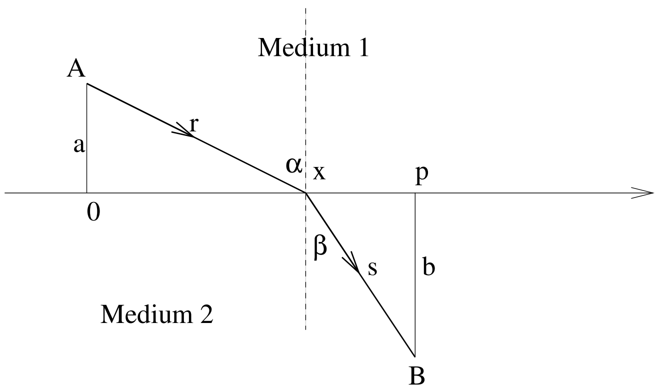


Abbildung 8.7: Lichtbrechung

In unserem Falle handelt es sich um die kürzeste Zeitdauer, da ein Weg mit maximaler Zeitdauer nicht existiert. Daraus ist unmittelbar „klar", dass der Strahl in den beiden Medien je eine Gerade bildet und nur an der Trennebene gebrochen wird. Ebenso ist „klar", dass er in der zur Trennebene senkrechten Ebene durch A und B verläuft.

[1] Jakob Steiner (1796–1863), aus dem Berner Oberland stammender Mathematiker. Er zeigte mit einfachen und anschaulichen Mitteln, dass keine vom Kreis verschiedene Kurve das isoperimetrische Problem lösen kann (maximale Fläche bei gegebenem Umfang). Weierstrass hat später gezeigt, dass dieses Problem eine Lösung hat.

[2] Pierre Fermat (1601–1655), französischer Mathematiker

Mit den Bezeichnungen aus der Figur ergibt sich somit eine totale Zeitdauer von

$$T(x) = \frac{r}{c_1} + \frac{s}{c_2} = \frac{1}{c_1}\,\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{c_2}\,\sqrt{(p-x)^2+b^2}$$

Für die Ableitung nach der unabhängigen Variablen x ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\frac{d\,T(x)}{dx} &= \frac{1}{c_1}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{c_2}\,\frac{p-x}{\sqrt{(p-x)^2+b^2}}\\ &= \frac{\sin\alpha}{c_1} - \frac{\sin\beta}{c_2} = 0\end{aligned}$$

und wir erhalten das **Brechungsgesetz von Snellius**

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2}$$

Ist c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, so heisst der Koeffizient

$$n_1 = \frac{c}{c_1}$$

Brechungsindex des Mediums 1. Es gibt ausführliche Tabellen von Brechungsindizes von verschiedenen Materialien. Das Gesetz von Snellius kann auch in der Form

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

geschrieben werden.

Durch analoge Rechnungen kann man auch das Reflexionsgesetz (Einfallswinkel = Ausfallswinkel) gefunden werden.

8.2 Kurvendiskussion

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, den Graphen einer Funktion $y = f(x)$ zu skizzieren, wobei möglichst wenig Funktionswerte bestimmt werden sollten. Es sollte nur so wenig wie nötig gerechnet werden. Oft kann das qualitative Verhalten des Graphen aus den Vorzeichen der Funktion und deren Ableitungen abgelesen werden. Die Begriffe **Symmetrie, Monotonie** und **Extrema** werden eine wesentliche Rolle spielen.

8–19 Beispiel : Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist eine ungerade Funktion. Untersucht man ihre Ableitungen auf Symmetrie so ergibt sich die folgende Tabelle

n	$f^{(n)}(x)$	Symmetrie
0	$\sin x$	ungerade
1	$\cos x$	gerade
2	$-\sin x$	ungerade
3	$-\cos x$	gerade
4	$\sin x$	ungerade
5	$\cos x$	gerade

Für dieses Beispiel gilt, dass die Ableitung einer ungeraden Funktion gerade ist und die Ableitung einer geraden Funktion ungerade. Man kann leicht zeigen, dass dies für allgemeine, symmetrische Funktionen richtig ist und somit auf das folgende Resultat führt. ♢

8–20 Satz : *Sei $f(x)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann gilt:*

Für eine gerade Funktion f ist $f^{(n)} \left\{ \begin{array}{c} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}$ falls $n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{c} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}$ ist.

Für eine ungerade Funktion f ist $f^{(n)} \left\{ \begin{array}{c} \text{ungerade} \\ \text{gerade} \end{array} \right\}$ falls $n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{c} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}$ ist.

Nun wollen wir die informelle Behauptung „wachsende Funktion = positive Ableitung" etwas genauer untersuchen. Es sollte einfach sein, sich diesen Sachverhalt graphisch anhand von einigen Beispielen zu veranschaulichen.

8–21 Beispiel : Die Ableitung der Funktion $f(x) = x - 2x^2 + 2x^3$ ist durch $f'(x) = 1 - 4x + 6x^2$ gegeben. Untersucht man die Nullstellen von f', so findet man, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit gilt für $x_1 < x_2$ aufgrund der Zwischenwertsatzes

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\,(x_2 - x_1) > 0\ ,$$

d.h. die Funktion ist streng monoton wachsend, da die Tangente immer eine positive Steigung hat. ♢

8–22 Theorem : *Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt:*
Ist $f'(x) > 0$ auf einem Intervall, so ist die Funktion strikt wachsend auf diesem Intervall.
Ist $f'(x) < 0$ auf einem Intervall, so ist die Funktion strikt fallend auf diesem Intervall.

Beweis : Der Beweis beruht auf dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. □

Dieses Theorem kann auch auf die „neue" Funktion $f'(x)$ angewandt werden. Wir erhalten dann aus dem Vorzeichen der zweiten Ableitung Information über das Verhalten von $f'(x)$.

8–23 Definition : Eine Funktion, deren Ableitung wachsend ist, heisst auch **konvex**. Eine Funktion, deren Ableitung fallend ist, heisst auch **konkav**.

8–24 Satz : *Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt:*
Ist $f''(x) > 0$ auf einem Intervall, so ist die Ableitung $f'(x)$ der Funktion strikt wachsend auf diesem Intervall und der Graph somit konvex.
Ist $f''(x) < 0$ auf einem Intervall, so ist die Ableitung $f'(x)$ der Funktion strikt fallend auf diesem Intervall und der Graph somit konkav.

8–25 Definition : Ein Punkt x_0 heisst **Wendepunkt** der Kurve $y = f(x)$, falls die zweite Ableitung bei x_0 ihr Vorzeichen wechselt, d.h. der Graph wechselt zwischen konkavem und konvexem Verhalten.

Die obigen Resultate über das qualitative Verhalten von Kurven $y = f(x)$ können in der folgenden Tabelle zusammengefasst werden.

Verhalten bei kritischen Punkten

Ist $f'(x_0) = 0$, so lässt sich aus der obigen Tabelle nichts ablesen. Im Abschnitt über Extremalprobleme haben wir aber entsprechende Resultate gesehen. Das Vorzeichen der zweiten Ableitung zeigt an, ob ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt. Es ist sorgfältig zwischen **notwendigen** und **hinreichenden** Bedingungen zu unterscheiden.

Beachten Sie, dass bei x_0 auch ein **Wendepunkt** vorliegen kann, falls $f'(x_0) \neq 0$ und die zweite Ableitung das Vorzeichen wechselt. Bei einem Sattelpunkt muss $f'(x_0) = 0$ sein.

Um den Graphen der Funktion $y = f(x)$ zu skizzieren, kann man versuchen, nach dem folgenden Schema vorzugehen.

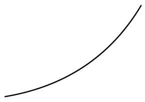
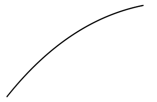
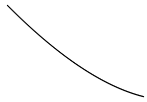
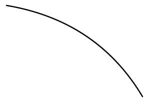
Graph				
Erste Ableitung f ist	$f' > 0$ wachsend	$f' > 0$ wachsend	$f' < 0$ fallend	$f' < 0$ fallend
Zweite Ableitung f' ist f ist	$f'' > 0$ wachsend konvex	$f'' < 0$ fallend konkav	$f'' > 0$ wachsend konvex	$f'' < 0$ fallend konkav

Tabelle 8.1: Qualitatives Verhalten von Kurven

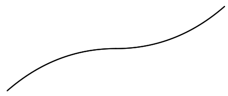
Graph	 Minimum	 Maximum	 Sattelpunkt
Erste Ableitung Bedingung ist	$f'(x_0) = 0$ notwendig	$f'(x_0) = 0$ notwendig	$f'(x_0) = 0$ notwendig
Zweite Ableitung Bedingung ist	$f''(x_0) > 0$ hinreichend	$f''(x_0) < 0$ hinreichend	$f''(x_0) = 0$ notwendig

Tabelle 8.2: Qualitatives Verhalten bei kritischen Punkten

1. Definitionbereich (a, b) finden.
2. Finde $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to b} f(x)$.
3. Symmetrien suchen.
4. Schnittpunkte mit Achsen suchen.
5. Kritische Punkte suchen.
6. Mögliche Extrema untersuchen.
7. Wendepunkte suchen.
8. Tabelle von Werten aufstellen (falls noch notwendig).

Achtung: Meistens ist es nicht nötig, alle der obigen Schritte durchzuführen. Manchmal sind einige der Fragen auch praktisch unlösbar (z.B. Nullstellen finden). Es ist wichtig, für die gegebene Funktion je die „richtigen“ Schritte zu finden, um mit möglichst wenig Rechenaufwand zu einer guten Skizze des Graphen zu kommen. Um die obigen Fragen beantworten zu können, muss man in der Lage sein, Ableitungen der Funktion rasch und zuverlässig zu bestimmen.

8.2.1 Beispiele

Es gibt zwei Typen von Problemen über Kurvendiskussionen. Entweder ist die Kurve durch eine Funktion $y = f(x)$ gegeben und das qualitative Verhalten ist zu finden, d.h. die Kurve zu skizzieren. Es kann aber auch das qualitative Verhalten beschrieben sein, und eine entsprechende Funktion ist zu finden.

8–26 Beispiel : Skizziere den Graphen von

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Lösung:

1. Der Definitionbereich ist $\mathbb{R}$.
2. Für $x \to \pm\infty$ konvergiert $f(x)$ gegen 0.
3. Die Funktion ist ungerade; somit genügt es $x > 0$ sorgfältig zu untersuchen. Die „linke Hälfte“ des Graphen entsteht duch Punktspiegelung am Ursprung.
4. Es gilt $f(0) = 0$, und dies ist die einzige Nullstelle. Somit ist der Ursprung die einzige Schnittstelle des Graphen mit den Koordinatenachsen.
5. Eine kurze Rechnung zeigt, dass
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$
und
$$f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^4}\left(-2\,x\,(1+x^2)^2 - (1-x^2)\,2\,(1+x^2)\,2\,x\right) = \frac{2\,x\,(1+x^2)}{(1+x^2)^4}\,(x^2-3)$$
6. Somit sind die kritischen Punkte bei $x = \pm 1$ und es gilt

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	
1	$1/2$	0	< 0	Maximum
-1	$-1/2$	0	> 0	Minimum

7. Die Nullstellen von f'' sind bei $x = 0, \pm\sqrt{3}$, und die zweite Ableitung wechselt das Vorzeichen
$$f(\pm\sqrt{3}) = \frac{\pm\sqrt{3}}{4} \approx \pm 0.43$$
8. Es ist nicht mehr nötig, eine Tabelle von weiteren Werten zu erstellen, um den Graphen zu skizzieren.

♢

8–27 Beispiel : Finde eine gebrochen rationale Funktion, deren Graph wie der in Abbildung 8.9 aussieht.

Lösung: Der Graph der Funktion ist gerade, und für $x \to \pm\infty$ strebt $f(x)$ gegen Null. Also ist der Grad des Nennerpolynoms grösser als der Grad des Zählers, die Funktion also echt gebrochen. Der Graph hat keine Polstelle und der Nenner somit keine Nullstelle. $x = 0$ ist die einzige Nullstelle von $f(x)$, und somit auch des Zählers. Da f überall positiv ist, müssen Zähler und Nenner immer das selbe Vorzeichen haben. Der Graph hat bei $x = \pm 1$ einen Maximalwert von 1. Nach einigem Probieren kann man auf eine mögliche Lösung

$$f(x) = \frac{2\,x^2}{1+x^4}$$

kommen. ♢

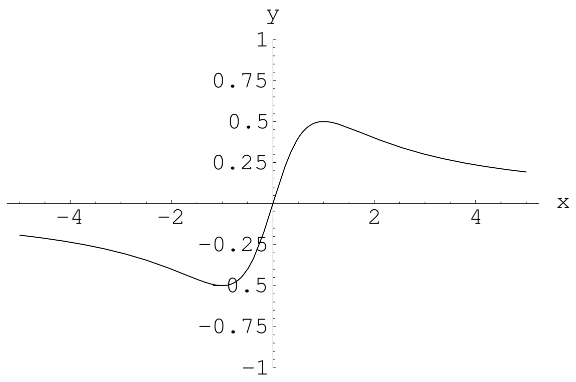


Abbildung 8.8: Graph von $f(x) = x/(1+x^2)$

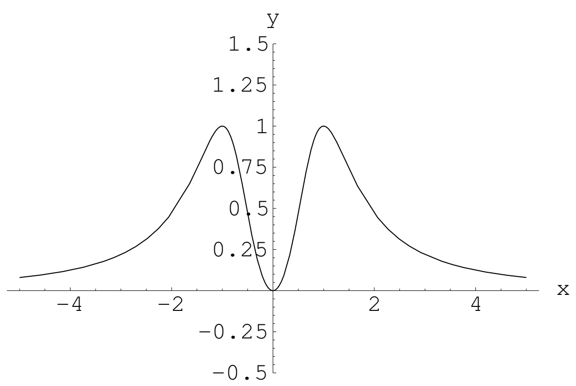


Abbildung 8.9: Graph einer zu gebrochen rationalen Funktion

8–28 Beispiel :

(a) Finde eine Kurve, die bei $x = 0$ und bei $x = 3$ je ein lokales Minimum hat.

(b) Finde eine Kurve, die bei $x = 0$ ein lokales Minumum hat und bei $x = 2$ ein lokales Maximum.

(c) Finde eine Kurve, die bei $x = 0.5$ einen Wendepunkt hat, der auch ein kritischer Punkt ist.

(d) Finde eine Kurve, die bei $x = 0.5$ einen Wendepunkt hat, aber keinen kritischen Punkt.

Zu diesen Beispielen gibt es viele verschiedene richtige Lösungen. ♢

8–29 Beispiel : Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

♢

8.3 Implizite Ableitungen, inverse Funktionen

Zuerst betrachten wir zwei typische Beispiele.

8–30 Beispiel : Sei eine Kurve gegeben durch die Gleichung

$$x \cdot y = 1 \quad .$$

Falls sich y als Funktion von x schreiben lässt, so gilt entlang der gesuchten Kurve

$$x \cdot y(x) = 1 \quad .$$

Diese Beziehung kann mittels der Produktregel bezüglich x abgeleitet werden, und wir erhalten

$$1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x) = 0$$

und somit

$$y'(x) = \frac{-y(x)}{x}$$

Falls die Gleichung also nach y auflösbar ist und die entstehende Funktion $y(x)$ differenzierbar, so ist die Ableitung gegeben durch die obige Formel. So liegt zum Beispiel der Punkt $(2\,,\,0.5)$ auf der Kurve und die Steigung in diesem Punkt ist $-1/4$. ♢

8–31 Beispiel : Sei $y = f(x)$ eine Funktion für die gilt

$$x^2 + f^2(x) = 2\,.$$

so kann man beide Seiten der Gleichung ableiten und erhält

$$2\,x + 2\,f(x) \cdot f'(x) = 0$$

und somit

$$f'(x) = \frac{-x}{f(x)}\,.$$

Dieses Resultat können Sie leicht überprüfen, indem Sie die Gleichung nach $y = f(x)$ auflösen

$$y = f(x) = \pm\sqrt{2 - x^2}$$

und dann bezüglich x ableiten

$$y' = f'(x) = \frac{-x}{\pm\sqrt{2 - x^2}}.$$

Beachten Sie, dass es für die Berechnung nach dem ersten Verfahren nicht nötig ist, die Funktion $f(x)$ zu kennen, es genügt, eine Gleichung mit $f(x)$ zu verwenden. Das ist der grosse Vorteil dieses Rechentricks. Man spricht von der Idee der **impliziten Ableitung**. ♢

8–32 Beispiel : Betrachte die Gleichung

$$y^4 + 3\,y - 4\,x^3 = 5\,x + 1.$$

Der Punkt $P = (x_0, y_0) = (1, -2)$ liegt auf dieser Kurve. Nun ist die Steigung der Kurve in diesem Punkt zu bestimmen. Verwenden Sie anschliessend die Idee der linearen Approximation, um den Wert von y für $x = 1.029$ zu schätzen.

Lösung: Hier ist das *Octave*–Programm, das die Graphik 8.10 erzeugt. Aus der Graphik wird klar, dass dies eine komplizierte Kurve ist.

Octave

```
1;
function h = f(x,y)
  h = y.^4+3*y -4*x.^3-5*x -1;
endfunction

[xx,yy] =  meshgrid(-2:0.2:4,-3:0.1:3);
h = f(xx,yy);

figure(1)
contour(xx,yy,h,[0,0])
xlabel('x'); ylabel('y')
axis([-2 4 -3 3])
```

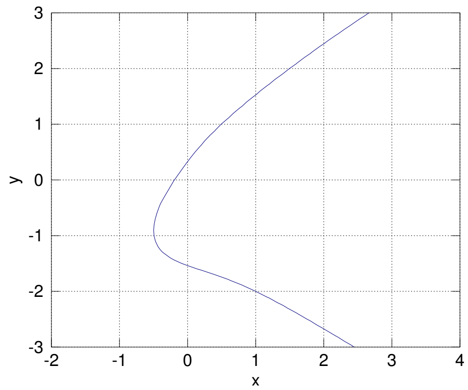


Abbildung 8.10: Lösungen der Gleichung $y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0$

Falls wir annehmen, dass $y\,(x)$ eine differenzierbare Funktion ist, so können wir die obige Gleichung differenzieren und erhalten

$$4\,y^3\,y' + 3\,y' - 12\,x^2 = 5\;.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x = 1$ und $y = -2$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} -32y' + 3y' - 12 &= 5 \\ y' &= -\frac{17}{29} \end{aligned}$$

Um den Wert von $y\,(1.029)$ abzuschätzen, verwenden wir

$$y\,(1 + 0.029) \approx y\,(1) + y'(1)\;0.029 = -2 - \frac{17}{29}\;0.029 = -2.017$$

Eine Vergleichsrechnung mit dem Verfahren von Newton ergibt $y\,(1.029) = -2.017107\ldots$. ♢

Eine spezielle Situation ist von grossem Interesse, nämlich die **Ableitungen der inversen Funktionen**. Hier ist ein Beispiel.

8–33 Beispiel : Sei $f(x) = \arcsin x$. Dann ist

$$\sin(f(x)) = x$$

und durch Ableiten erhält man

$$\cos(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \quad .$$

Somit ist

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(f(x))}$$

Für $-\pi/2 \le z \le \pi/2$ gilt

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$$

und mit $z = f(x)$ ergibt sich

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(f(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Somit haben wir gezeigt, dass

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

♢

8–34 Theorem : *(Ableitung von inversen Funktionen)*
Seien I_1 und I_2 Intervalle mit $y_0 \in I_1$, $x_0 \in I_2$ und $F\ : I_1 \to I_2$ eine stetige, strikt monotone Funktion mit $f(y_0) = x_0$. Ist die Funktion für $y = y_0$ differenzierbar und $f'(y_0) \neq 0$, so ist die inverse Funktion $f^{-1}\, I_2 \to I_1$ bei $x = x_0$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Dieses Theorem kann auf das Beispiel der arcsin–Funktion angewandt werden. In der Notation des Theorems ist

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad f^{-1}(x) = \arcsin x$$

Somit ist

$$(\arcsin x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

8–35 Beispiel : Betrachtet man $f(x) = x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$, so ist $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, und man kann die Ableitung dieser Funktion bestimmen. ♢

Kombiniert man dieses Beispiel mit der Ableitungsregel für ganzzahlige Exponenten und der Kettenregel, so ergibt sich

8–36 Satz : *Für $a \in \mathbb{Q}$ und $x > 0$ gilt*

$$\frac{d}{dx}\, x^a = a\, x^{a-1}$$

8.4 Schätzen von Abweichungen

Die Grundidee beruht auf der Approximationsformel

$$y(x) = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad .$$

Diese Formel ist dültig für kleine Werte von $x - x_0$. Setzt man

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{und} \quad \Delta y = f(x) - f(x_0) \qquad .$$

Somit erhält man

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$

8–37 Beispiel : Der Radius eines kugelförmigen Ballons wird gemessen, und das Resultat ist $12cm$. Der maximale Messfehler ist $\pm 0.5cm$. Bestimmen Sie approximativ den maximal möglichen Fehler im berechneten Volumen des Ballons.

Wir beginnen mit der Formel für das Volumen einer Kugel von Radius r

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{und} \quad \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

Aufgrund der Messungen weiss man, dass für den tatsächlichen Radius r gilt

$$r = r_0 + \Delta r = 12cm + \Delta r \quad \text{wobei} \quad |\Delta r| \leq 0.5cm$$

Für das Volumen gilt

$$V(r) \approx V(r_0) + \frac{dV}{dr}(r_0) \cdot \Delta r = \frac{4}{3}\pi(12cm)^3 + 4\pi(12cm)^2\Delta r \qquad .$$

Somit gilt für den Volumenfehler

$$\Delta V = V(r) - V(r_0) \approx V'(r_0)\Delta r = 4\pi 12^2 \Delta r \qquad .$$

Setzt man die obigen Zahlenwerte ein, so ergibt sich

$$|\Delta V| \leq 4\pi 144 \cdot 0.5cm^3 \approx 904.8cm^3$$

Vergleicht man dies mit dem Wert von $V(12) \approx 7238cm^3$, so ergibt sich ein relativer Fehler von $\pm 12.5\%$. Der relative Fehler für den gemessenen Radius beträgt $\pm 4.17\%$, d.h. der relative Fehler hat sich wesentlich geändert. ♢

8–38 Beispiel : Sand rinnt aus einer Röhre auf eine ebene Fläche und türmt sich zu einem Kegel auf, dessen Radius immer gleich der Höhe ist. Zu einem gewissen Zeitpunkt ist der Radius $10cm$. Berechne approximativ, welche Änderung im Radius zu einem Mehrvolumen von $2cm^3$ führt.

Die Rechnung sind ähnlich zu den obigen und sind deshalb hier nur kurz angedeutet.

$$\begin{aligned} V(r) = \frac{1}{3}\pi r^3 \qquad \frac{dV}{dr} &= \pi r^2 \qquad r_0 = 10 \text{ cm} \\ 2 \text{ cm}^3 = \Delta V &\approx \pi r_0^2 \Delta r \\ \Delta r &\approx \frac{2 \text{ cm}^3}{\pi (10 \text{ cm})^2} = \frac{1}{50\,\pi} cm \approx 0.006 \text{ cm} \end{aligned}$$

♢

8–39 Beispiel : Der elektrische Widerstand R eines Drahtes ist proportional zu seiner Länge und umgekehrt proportional zur Querschnittfläche. Die Länge sei fixiert. Wie genau (in %) muss der Durchmesser gemessen werden, damit der relative Fehler im berechneten Widerstand kleiner als 3% ist?

Aus den Angaben weiss man, dass

$$R = k\frac{L}{x^2} \qquad \frac{dR}{dx} = -k\frac{2L}{x^3} \quad ,$$

wobei x für den Durchmesser steht und k die Proportionalitätskonstante ist. Somit gilt bei $x = x_0$

$$\Delta R \approx -k\frac{2L}{x_0^3}\Delta x$$

Die verlangte Bedingung von einem relativen Fehler, der kleiner ist als 3%, übersetzt sich zu

$$0.03 \geq |\frac{\Delta R}{R}| = |\frac{x_0^2 \Delta R}{kL}| \approx |\frac{2x_0^2 kL}{kLx_0^3}\Delta x| = 2|\frac{\Delta x}{x_0}|$$

Somit muss der relative Fehler des Radius kleiner als 1.5% sein. ♢

8–40 Beispiel : Diese in Abbildung 8.11 gezeigte einfache Anordnung erlaubt es uns aus einem bekannten Widerstand $R = 100\,\Omega$ und einem $l = 10\,cm$ langen Stück Konstantandraht (von A nach B) mit spezifischen Widerstand $\rho = 15\Omega/cm$ einen unbekannten Widerstand Z zu messen. Die Spannung zwischen den Punkten A und B wird durch eine externe Spannungsquelle konstant gehalten. Für eine Messung wird der der Verbindungspunkt x verschoben, bis kein Strom mehr durch das Messinstrument fliesst. Somit muss in dieser Situation

$$\frac{Z}{x} = \frac{R}{l-x}$$

richtig sein, und der gesuchte Widerstand ist gegeben durch

$$Z = \frac{x}{l-x}\,R$$

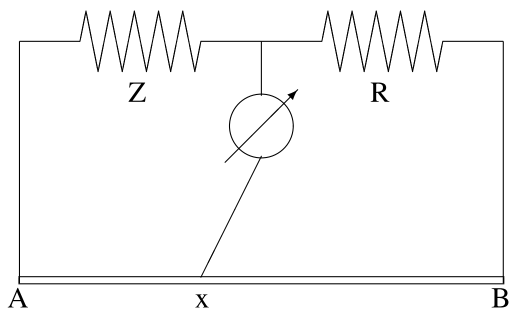


Abbildung 8.11: Wheatstone-Widerstandsmessbrücke

Nun stellen sich einige Fragen

(a) Skizzieren Sie Z als Funktion von x.

(b) Wie genau muss man x ablesen, damit der Fehler von Z kleiner als $5\,\Omega$ ist, bei $x = 0.5\,cm$ und $x = 9.5\,cm$?

(c) Für welche x wird, bei bekannter Ablesegenauigkeit $\pm\Delta x$

- der maximale absolute Fehler $|\Delta Z|$ minimal?

- der maximale relative Fehler $|\Delta Z|/Z$ minimal?

Lösung:

(a) Der Graph entspricht einer gebrochen rationalen Funktion mit einer einfachen Polstelle bei $x = 10$ und der einzigen Nullstelle bei $x = 0$. Er ist gegeben in Abbildung 8.12. Sie wurde erzeugt durch

Octave
```
x = 0:0.1:10;
plot(x,100*x./(10-x))
axis([0,10,0,500])
grid on
xlabel('position x');ylabel('resistance Z');
print ('wheatstone.eps','-depsc','-FTimes-Roman:20')
```

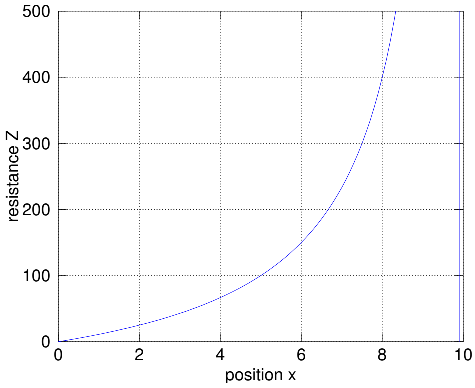


Abbildung 8.12: Wheatstone–Brücke: Widerstand als Funktion des Ortes

(b) Die Ableitung von Z bezüglich x ist gegeben durch

$$\frac{d\,Z}{dx} = \frac{l}{(l-x)^2}\,R$$

Somit gilt (lineare Approximation)

$$\Delta Z \approx \frac{l}{(l-x)^2}\,R\,\Delta x$$

Setzen wir die oben angegebenen Zahlen ein, so ergibt sich die Bedingung

$$5 \geq \frac{10}{(10-x)^2}\,100\,\Delta x$$

oder auch

$$|\Delta x| \leq \frac{(10-x)^2}{200}$$

Somit lauten die Bedingungen

$$|\Delta x| \leq 0.45 \quad \text{bei} \quad x = 0.5 \quad \text{und} \quad |\Delta x| \leq 0.00125 \quad \text{bei} \quad x = 9.5$$

(c) Bei gegebenem $|\Delta x|$ wird der Fehler $|\Delta Z|$ minimal bei $x = 0$. Der relative Fehler

$$\frac{|\Delta Z|}{Z} \approx \frac{l\,R\,|\Delta x|}{(l-x)^2}\,\frac{l-x}{x\,R} = \frac{l\,|\Delta x|}{(l-x)\,x}$$

wird minimal bei der Maximalstelle der Funktion $(x - l)\,x$, d.h. bei $x = l/2$. Damit der relative Fehler klein gehalten werden kann, sollte die Messbrücke also in der Mitte betrieben werden. Dies ist der Fall für $R \approx Z$, d.h der zu messende Widerstand Z sollte von der selben Grösse sein wie der Referenzwiderstand R.

$\diamondsuit$

8.5 Verbundene Grössen

Zuerst betrachten wir ein einführendes, typisches Bespiel von verbundenen Grössen.

8–41 Beispiel : Aus einem Ballon entweicht Gas mit einer Geschwindigkeit von $54\ l/min$. Wie schnell nimmt die Oberfläche ab, wenn der Radius 3.6 m ist?

Lösung: Das Volumen V und die Oberfläche O sind gegeben durch

$$V = \frac{4\pi}{3}\,r^3 \quad , \quad O = 4\pi r^2$$

Alle drei Grössen r, V und O sind von der Zeit t abhängig. Differenzieren wir die obigen Beziehungen bezüglich t, so ergibt sich mit den Rechenregeln für Ableitungen

$$\dot V = \frac{d\,V}{dt} = 4\pi\,r^2\dot r \quad , \quad \dot O = \frac{d\,O}{dt} = 8\pi r\dot r$$

Daraus ergibt sich leicht, dass

$$\dot O = \frac{2}{r}\,\dot V$$

Zu dem von uns zu untersuchenden Zeitpunkt ist

$$r = 3.6\ \text{m} \quad \text{und} \quad \dot V = -0.054\,\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$$

Daraus ergibt sich

$$\dot O = -0.03\,\frac{\text{m}^2}{\text{min}}$$

$\diamondsuit$

Das obige Beispiel zeigt ein allgemein gültiges Verfahren, um **verbundene Grössen** zu untersuchen.

8–42 Definition : Ist eine Variable x eine Funktion der Zeit t, so ist die **Änderungsrate** gegeben durch $\frac{d\,x}{dt} = \dot x$.

Sind zwei oder mehr Variablen, die alle von t abhängen, durch eine Gleichung miteinander verbunden, so erhält man die eine Beziehung zwischen den Änderungsraten, indem man die Gleichung nach t differenziert. Dabei kann fast immer nach dem folgenden Schema vorgegangen werden

1. Finde die verschiedenen Grössen.
2. Stelle die Gleichungen auf, welche die Grössen verbinden.
3. Leite die Gleichungen ab, bezüglich der Zeit.
4. Setze die Information zum gegebenen Zeitpunkt ein. Es ergeben sich Beziehungen zwischen den Grössen und den Änderungsraten.
5. Löse nach den zu suchenden Grössen auf.

8–43 Beispiel : Aus einem konischen Trichter läuft Wasser mit der Geschwindigkeit von $8\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ aus. Der Radius der oberen Öffnung ist 8 cm, und die Höhe des Trichters ist 16 cm. Bestimme die Geschwindigkeit, mit der der Wasserspiegel sinkt, wenn er 4 cm über der Trichterspitze steht.

Lösung: Sei r der Radius, h die Höhe des Wasserspiegels und V die Wassermenge zur Zeit t. Es ergibt sich

$$r = \frac{h}{2} \quad , \quad V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h = \frac{\pi}{12}\,h^3$$

Die Ableitung bezüglich t ergibt somit

$$\dot V = \frac{\pi}{4}\,h^2 \dot h$$

Zum zu untersuchenden Zeitpunkt gilt

$$\dot V = -8\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s} \quad \text{und} \quad h = 4\ \mathrm{cm}$$

und somit

$$-8\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s} = \frac{\pi}{4}\,(4\ \mathrm{cm})^2 \dot h$$

und

$$\dot h = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

$\diamondsuit$

8–44 Beispiel : Beim vorangehenden Beispiel wurde vernachlässigt, dass die Höhe h einen Einfluss auf die Ausflussgeschwindigkeit hat. Sei der Radius des Loches in der Spitze des Zylinders $1\,\mathrm{mm} = 0.1$ cm. Aus physikalischen Gründen ist die Ausflussgeschwindigkeit v gegeben durch

$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$

Somit gilt

$$\dot V = \frac{dV}{dt} = -\pi (0.1\ \mathrm{cm})^2 \sqrt{2\,g\,h}$$

Also gilt die Beziehung

$$-\pi (0.1\ \mathrm{cm})^2 \sqrt{2\,g\,h} = \frac{\pi}{4}\,h^2 \dot h$$

und somit

$$\dot h = -4\ (0.1\ \mathrm{cm})^2 \sqrt{2\,g}\ h^{-3/2}$$

Mit $g = 981\ \mathrm{cm/s}^2$ und $h = 4$ cm erhalten wir $\dot h \approx -0.22$ cm/s. Somit senkt sich der Wasserspiegel nur ca. 2 mm pro Sekunde. $\diamondsuit$

8–45 Beispiel : Für den Trichter in der vorangehenden Aufgaben kann auch verlangt werden, dass der Wasserspiegel mit einer konstanten Geschwindigkeit k sinkt. Der Radius r als Funktion der Höhe h ist passend zu wählen. Das führt auf die Bedingung

$$\frac{d}{dt}\,h = -k$$

Bei einem Lochdurchmesser R gilt

$$-\pi\,R^2 \sqrt{2\,g\,h} = \pi\,r^2 \dot h$$

und somit

$$\dot h = -\frac{R^2 \sqrt{2\,g\,h}}{\pi\,r^2} = -k$$

Das führt auf die Bedingung

$$R^2 \sqrt{2\,g\,h} = k\,\pi\,r^2$$

und somit

$$r = \frac{R}{\sqrt{k\,\pi}}\ (2\,g\,h)^{1/4}$$

Damit der Wasserspiegel mit einer konstanten Geschwindigkeit sinkt, muss also der Radius des Zylinders proportional zur vierten Wurzel der Höhe sein. $\diamondsuit$

8–46 Beispiel : Ein Spaziergänger (Höhe 1.8 m) bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 2 m/s von einer 5 m hohen Laterne weg. Sein Schatten wird immer länger. Bestimmen Sie, um wieviel länger der Schatten pro Sekunde wird.

Lösung: $\frac{1.8 \cdot 2}{5 - 1.8} \frac{m}{s}$ ◇

8–47 Beispiel : Eine 5 Meter lange Leiter ist an eine Wand angelehnt. Der Fuss der Leiter ist 3 m von der Wand entfernt und wird mit 30 cm/s weggezogen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit mit der die Spitze der Leiter den Wand entlang nach unten gleitet.

Lösung: Die Beziehung zwischen der Höhe h und dem Abstand x des Fusses von der Wand ist

$$h^2 + x^2 = 5^2$$

und somit

$$2\,h\,\dot{h} + 2\,x\,\dot{x} = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{h} = -\frac{x}{h}\,\dot{x}$$

Beim zu untersuchenden Zeitpunkt gilt $x = 3$ m und $\dot{x} = 0.3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und somit $h = \sqrt{25-9}$ m $= 4$ m und

$$\dot{h} = -\frac{3}{4}\,0.3\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = -0.225\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

◇

8.6 Newton-Verfahren, um Gleichungen zu lösen

8.6.1 Einleitung

Das hier betrachtete Problem besteht darin, eine Nullstelle einer Funktion in einer Variablen zu finden, d.h. löse

$$f(x) = 0$$

Dabei geht man davon aus, bereits eine einigermassen gute Näherung x_0 zu kennen. Dann ersetzt man die Funktion $f(x)$ durch die Gleichung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an die Kurve und löst deshalb

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \qquad .$$

Löst man diese Gleichung auf nach x, so führt das zu einer (hoffentlich) besseren Näherung

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad .$$

Durch Iteration erhält man

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad .$$

Dies führt zu einer Folge von Werten x_n, und man hofft, dass $x_n \to z$ mit $f(z) = 0$.

8–48 Beispiel : Wir betrachten die Gleichung

$$f(x) = x^2 - 7 = 0$$

d.h. $\sqrt{7}$ soll berechnet werden. Wir starten mit $x_0 = 7.0$. Somit benötigen wir den Ausdruck $f'(x) = 2\,x$, und für die Iterationsformel erhalten wir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 7}{2x_n} = \frac{1}{2}\,(x_n + \frac{7}{x_n}) \qquad .$$

Mathematica

```
Clear[x,f,df,newton];
f[x_] = x*x -7;
df[x_] = D[f[x],x];
newton[x_] = x- f[x]/df[x];
Print[newton[x]]
.
            2
     -7 + x
x - ---------
       2 x
```

Die Abbildung 8.13 zeigt den Graphen für einen Iterationsschritt, wobei mit $x = 7.0$ gestartet wurde.

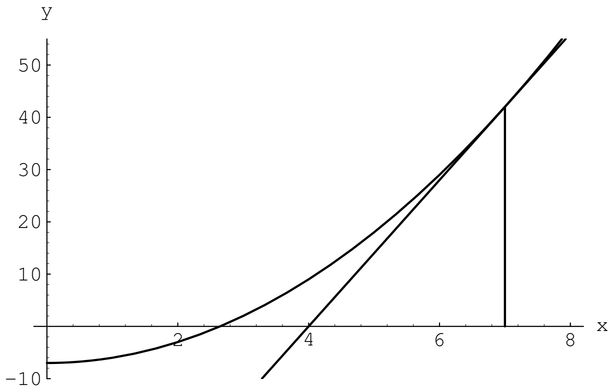


Abbildung 8.13: Idee des Newton-Verfahrens

Hier sehen Sie das Resultat von *Mathematica* für die ersten 7 Iterationsschritte.

Mathematica

```
xi = 7.0 ;
Print[{0,N[xi,20]}] ;
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],20]}],{i,7}]
.
{0, 7.}
{1, 4.}
{2, 2.875}
{3, 2.654891304347826}
{4, 2.645767044190289}
{5, 2.645751311111369}
{6, 2.645751311064591}
{7, 2.645751311064591}
```

♢

8.6.2 Resultate

8–49 Theorem : *Sei f eine stetig differenzierbare Funktion und $f(z) = 0$. Ist $f'(x) \neq 0$ für alle x in einer Umgebung von z und ist x_0 nahe genug bei z, so konvergiert die induktiv definierte Folge*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

gegen die Lösung z der Gleichung $f(x) = 0$.
Ist die Funktion zweimal stetig differenzierbar (d.h $f'(x)$ ist stetig differenzierbar), so konvergiert das Verfahren quadratisch, d.h. die Anzahl der exakten Stellen wird bei jedem Schritt verdoppelt.

Beweis : Eine vollständigen Beweis werden wir hier nicht geben. Durch eine formale Rechnung wollen wir aber die quadratische Konvergenz verifizieren. Sei $f(x)$ eine oft differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$, d.h. die Nullstelle ist bereits bekannt. Wir verwenden das approximative Taylorpolynom

$$f(x) = 0 + f_1\, x + \frac{1}{2}\, f_2\, x^2 + \frac{1}{6}\, f_3\, x^3 + o(x^3)$$

wobei $f_1 = f'(0) \neq 0$. Der Iterationswert x_n ist in diesem Fall gleich dem Fehler. Es gilt

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= x_n - \frac{f_1\, x_n + \frac{1}{2}\, f_2\, x_n^2 + \frac{1}{6}\, f_3\, x_n^3 + o(x_n^3)}{f_1 + f_2\, x_n + \frac{1}{2}\, f_3\, x_n^2 + o(x_n^2)} \\
&= \frac{x_n \left(f_1 + f_2\, x_n + \frac{1}{2}\, f_3\, x_n^2 + o(x_n^2)\right) - \left(f_1\, x_n + \frac{1}{2}\, f_2\, x_n^2 + \frac{1}{6}\, f_3\, x_n^3 + o(x^3)\right)}{f_1 + f_2\, x_n + \frac{1}{2}\, f_3\, x_n^2 + o(x_n^2)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\, f_2\, x_n^2 + \frac{1}{3}\, f_3\, x_n^3 + o(x_n^3)}{f_1 + f_2\, x_n + \frac{1}{2}\, f_3\, x_n^2 + o(x_n^2)} \\
&= \frac{f_2}{2\, f_1}\, x_n^2 + O(x_n^3)
\end{aligned}$$

Der neue Fehler ist ungefähr gleich dem Quadrat des alten Fehlers, multipliziert mit einer Konstanten.

In der Rechnung kann man auch ablesen, dass einer bessere Konvergenzrate zu erwarten ist, falls $f_2 = f''(0) = 0$. Ist $f_1 = 0$, so sieht man ebenfalls, dass Probleme bei der Konvergenz auftreten werden. □

Das Beispiel 8–48 illustriert das Theorem. Hier ein weiteres einfaches Beispiel.

8–50 Beispiel : Sei $f(x) = x^5 - 3\,x + 1$. Man berechnet leicht $f(2) = 2^5 - 3 \cdot 2 + 1 = 27$ und $f(-2) = -2^5 + 3 \cdot 2 + 1 = -25$. Somit muss f mindestens eine Nullstelle zwischen -2 und 2 haben. Die Iterationsvorschrift von Newton ergibt hier

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - 3x_n + 1}{5x_n^4 - 3}$$

Wir vermuten, dass die Nullstelle relativ nahe bei 0 liegt. Somit versuchen wir $x_0 = 0$ und erhalten

$$x_1 = x_0 + \frac{x_0^5 - 3x_0 + 1}{5x_0^4 - 3} = 0 - \frac{0 - 0 + 1}{0 - 3} = \frac{1}{3}$$

Durch Einsetzen erhält man

$$f(x_1) = f(1/3) = 1/243 \quad \text{und} \quad f'(1/3) = -\frac{238}{81}$$

und somit

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^5 - 3\,x_1 + 1}{5\,x_1^4 - 3} = \frac{1}{3} - \frac{1/243}{-238/81} = \frac{1}{3} + \frac{1}{714} = \frac{239}{714} \approx 0.3347$$

Dieser Prozess kann fortgesetzt werden. Üblicherweise wird bei Beispielen dieser Art nicht mit exakten Brüchen gerechnet, sondern mit Dezimalbruchapproximationen, denn das Ziel ist, eine gute Näherung für die Nullstelle zu finden.

In *Mathematica* kann auch nach dieser Nullstelle gesucht werden mittels der Befehle

Mathematica
```
f[x_] := x^5 -3 x +1 ;
FindRoot[f[x]==0,{x,0.0}]
.
{x -> 0.334734}
```

Auch *Mathematica* verwendet das Newtonverfahren, deshalb muss die erste Schätzung für die Nullstelle auch angegeben werden. Die folgenden *Mathematica*–Befehle erzeugen die Abbildung 8.14.

Mathematica
```
Plot[f[x],{x,-2,2}];
```

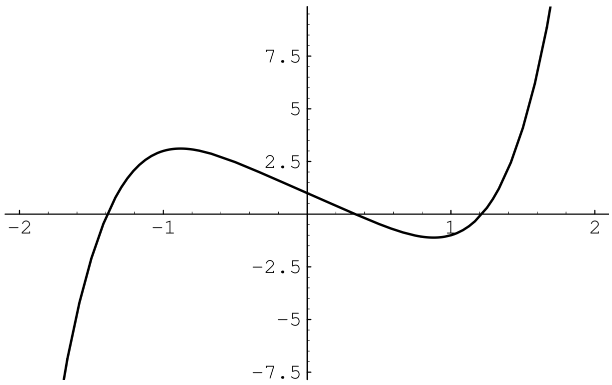


Abbildung 8.14: Graph von $f\,(x) = x^5 - 3\,x + 1$

Durch verschiedene Wahl von Anfangswerten können auch verschiedene Nullstellen gefunden werden, wie die folgenden Beispielrechnungen zeigen.

Mathematica
```
x1 = FindRoot[f[x]==0,{x,-1.5}]
.
{x -> -1.38879}
```

Mathematica
```
x1 = FindRoot[f[x]==0,{x,1.2}]
.
{x -> 1.21465}
```

♢

8–51 Beispiel : Betrachte die Funktion

$$f\,(x) = x^3 - x^2 + x - 2$$

und führe die folgenden Rechnungen aus

1. Bestimme $f'\,(x)$ und zeige, dass $f'\,(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Berechne $f(x)$ für einige kleine ganzzahlige Werte von x.
3. Führe einen Schritt des Newton-Verfahrens aus, um die Lage der Nullstelle abzuschätzen.
4. Erstelle eine Graphik, welche die obigen Rechnungen illustriert.

♢

8.6.3 Mögliche Probleme

Der grosse Nachteil des obigen Resultates ist die Bedingung, dass x_0 „nahe genug“ bei der wahren Lösung z sein muss. Die quadratische Konvergenz gilt nur, falls $f'(z) \neq 0$. Die folgenden Beispiele zeigen, dass diese Einschränkungen zu Problemen führen können.

8–52 Beispiel : (Nicht quadratische Konvergenz)

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2$ mit der trivialen Nullstelle $x = 0$, aber $f'(0) = 0$. Somit ist eine der Bedingungen des Theorems nicht erfüllt. Bei diesem Beispiel konvergiert das Verfahren trotzdem, aber nicht quadratisch, sondern nur linear, d.h es wird pro Schritt eine feste Zahl von zusätzlichen genauen Stellen gewonnen (hier: $\frac{\ln 2}{\ln 10} \approx 0.3$ Stellen).

Wählt man $x_0 = 1.0$ so erhält man für die ersten paar Schritte

Mathematica

```
Clear[x,xi,f,df,newton];
f[x_] = x*x ;
df[x_] = D[f[x],x];
newton[x_] = x- f[x]/df[x];
xi = 1.0 ;
Print[{0,N[xi,20]}] ;
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],20]}],{i,15}]
.
{0, 1.}
{1, 0.5}
{2, 0.25}
{3, 0.125}
{4, 0.0625}
{5, 0.03125}
{6, 0.015625}
{7, 0.0078125}
{8, 0.00390625}
{9, 0.001953125}
{10, 0.0009765625}
{11, 0.00048828125}
{12, 0.000244140625}
{13, 0.0001220703125}
{14, 0.00006103515625}
{15, 0.000030517578125}
```

♢

8–53 Beispiel : (Suchen einer nicht vorhandenen Nullstelle)

Statt des obigen Beispiels kann auch $f(x) = x^2 + 0.001$ betrachtet werden. Diese Funktion hat keine Nullstelle. Hier die Antwort von *Mathematica*.

Mathematica

```
Clear[x,xi,f,df,newton];
f[x_] = x*x + 0.001 ;
df[x_] = D[f[x],x];
newton[x_] = x- f[x]/df[x];
xi = 1.0 ;
Print[{0,N[xi,20]}] ;
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],20]}],{i,15}]
.
{0, 1.}
{1, 0.4995000000000001}
{2, 0.248748998998999}
{3, 0.122364441159518}
{4, 0.05709606617687831}
{5, 0.01979086235007258}
{6, -0.01536875343479534}
{7, 0.02484916623527828}
{8, -0.007696816339625212}
{9, 0.06111351607747259}
{10, 0.02237526183147899}
{11, -0.01115847630596761}
{12, 0.03922974707850315}
{13, 0.006869443419617018}
{14, -0.06935137891839577}
{15, -0.02746602747701381}
```

Offensichtlich kann (darf) das Verfahren nicht konvergieren.

◇

8–54 Beispiel : (Nullstelle der Ordnung 3)

Statt des obigen Beispiels kann auch $f(x) = x^3$ betrachtet werden. Diese Funktion hat eine Nullstelle, nämlich $x = 0$. Hier die Antwort von *Mathematica*.

Mathematica

```
Clear[x,xi,f,df,newton];
f[x_] = x^3 ;
df[x_] = D[f[x],x];
newton[x_] = x- f[x]/df[x];
xi = 1.0 ;
Print[{0,N[xi,20]}] ;
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],20]}],{i,20}]
.
{0, 1.}
{1, 0.6666666666666666}
{2, 0.4444444444444445}
{3, 0.2962962962962963}
{4, 0.1975308641975308}
{5, 0.1316872427983539}
{6, 0.0877914951989026}
{7, 0.05852766346593507}
{8, 0.03901844231062338}
{9, 0.02601229487374892}
{10, 0.01734152991583262}
{11, 0.01156101994388841}
{12, 0.007707346629258941}
{13, 0.005138231086172628}
{14, 0.003425487390781752}
{15, 0.002283658260521168}
```

```
{16, 0.001522438840347445}
{17, 0.001014959226898297}
{18, 0.0006766394845988646}
{19, 0.0004510929897325764}
{20, 0.0003007286598217176}
```

Die Folge x_n konvergiert gegen 0, aber sehr langsam. ♢

8–55 Beispiel : (Division durch Null)

Das Verfahren kann unerwartet zu einer Division durch Null führen. Betrachte die Funktion $f(x) = -x^3 + x^2 - 5$. Es gilt $f'(x) = -3x^2 + 2x$ und somit $f'(0) = 0$. Die Figur 8.15 zeigt den Graphen für einen Iterationsschritt, wobei mit $x_0 = 1.54598$ gestartet wurde.

Durch die Iteration erhält man $x_1 \approx 0$ und somit wird x_2 eine enorm grosse Zahl, und das Newton–Verfahren hat Probleme. Hier sehen Sie das Resultat von *Mathematica* für die ersten zwei Iterationsschritte.

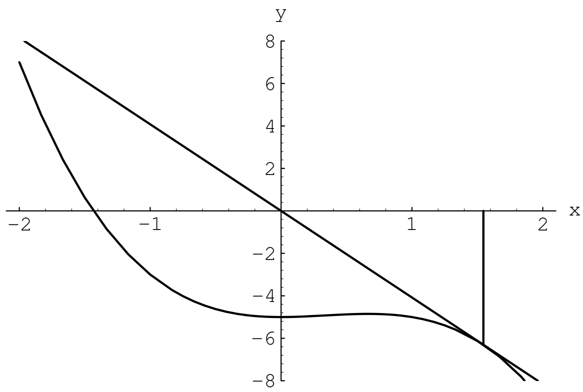


Abbildung 8.15: Division durch 0 beim Newtonverfahren

Mathematica

```
xi = z;
Print[{0,N[xi,20]}] ;
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],20]}],{i,2}]
.
{0, 1.54598}
{1, -0.00002508423995384312}
{2, -99660.4219443772}
```

♢

8–56 Beispiel : (Oszillationen)

Es ist auch möglich, dass das Verfahren nicht konvergiert, weil die Folge x_n zwischen mehreren Punkten hin und her springt. Ein einfaches Beispiel sei hier angeführt.

Betrachte die Funktion $f(x) = \sin x$. Es gilt $f'(x) = \cos x$. Ziel ist es, ein x_0 zu finden, so dass $x_1 = -x_0$ und $x_2 = x_0$. Die erste Bedingung ergibt die Gleichung

$$-x_0 = x_0 - \frac{\sin x_0}{\cos x_0} \qquad .$$

Dies kann zu

$$\sin x_0 - 2x_0 \cos x_0 = 0$$

umgeschrieben werden. Diese Gleichung hat die Lösung $x_0 \approx 1.16556118521\ldots$. (Nebenfrage: wie findet man dieses x_0?)

Hier sehen Sie das Resultat von *Mathematica* für die ersten sechs Iterationsschritte.

Mathematica

```
xi = z;
Print[{0,N[xi,20]}] ;
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],20]}],{i,6}]
.
{0, 1.16556118521}
{1, −1.165561185222366}
{2, 1.165561185289563}
{3, −1.165561185654719}
{4, 1.165561187639029}
{5, −1.165561198422031}
{6, 1.165561257018282}
```

Offensichtlich scheint das Verfahren zwischen den Werten z und $-z$ hin und her zu springen. Iteriert man aber genügend lange, so wird das Verfahren in diesem Beispiel trotzdem gegen eine Nullstelle von $f(x) = \sin x$ konvergieren, allerdings muss es nicht $x = 0$ sein.

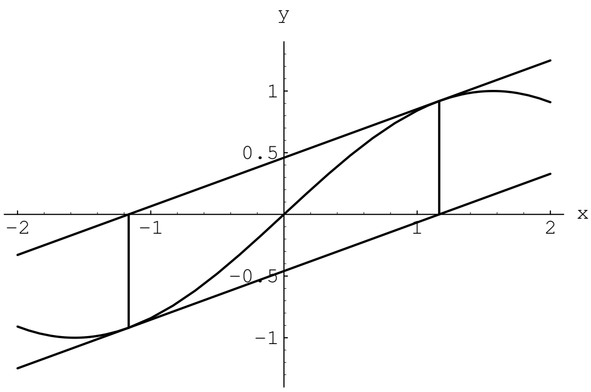


Abbildung 8.16: Oszillationen beim Newtonverfahren

♢

8–57 Beispiel : (Falsche Nullstelle)
Das Verfahren kann auch gegen eine Nullstelle konvergieren, die **nicht** in der Nähe des Startwertes x_0 liegt. Dies können Sie leicht am obigen Beispiel testen, indem Sie den Startwert $x_0 = 1.16556118521\ldots$ etwas vergrössern. ♢

8–58 Beispiel : Finden Sie einen Startwert x_0 nahe bei 0, so dass die durch das Newton–Verfahren konstruierte Folge gegen die Nullstelle $z = 7\pi/2$ der Funktion $y = \cos(x)$ konvergiert. Zeichnen Sie dazu die Graphik für den ersten Iterationsschritt. ♢

Schlussfolgerung: das Verfahren von Newton kann sehr effizient Gleichungen mit hoher Präzision lösen. Das Verfahren ist jedoch **schlecht** beim Suchen von Lösungen. Der kritische Punkt ist die Wahl eines guten Startwerts.

8.6.4 HP–48 Programm

Als Ergänzung wird hier ein Programm für die HP–48 Tachenrechner angegeben, dass mittels Newton–Verfahren die Nullstelle einer Gleichung sucht.

Anleitung: Das Programm muss aufgerufen werden mit der zu untersuchenden Funktion auf dem Stack. Die unabhängige Variable **muss** X heissen. z.B.

```
'X*COS(X) - SIN(X)'
```

wird versuchen die Gleichung $x\ \cos x - \sin x = 0$ zu lösen. Nach dem Starten des Programms erscheint ein Menu mit den zwei Möglichkeiten

```
NEW                        EXIT
```

Nun kann man eine Zahl in den Stack geben, und durch `NEW` wird ein Iterationsschritt ausgeführt und auf dem Stack angezeigt. Durch `EXIT` kann man das Programm verlassen.

Listing: Das Symbol $\backslash\backslash d$ ist durch das Ableitungssymbol δ zu ersetzen.

```
<< -> f
   << 'X' PURGE f 'X' \\d -> df
      << { { "NEW"
             << DUP 'X' STO f EVAL df EVAL / -
             >>
           } {} {} {} {}
           { "EXIT"  CONT
           }
         } TMENU HALT 'X' PURGE 2 MENU
      >>
   >>
>>
```

8.6.5 Beispiele

8–59 Beispiel : (Kettenkarussell)
Ein Kettenkarussell mit einer Tragstange von $r = 2\ m$ und einer Kettenlänge von $l = 4\ m$ benötigt für einen Umlauf $T = 5\ s$. Wie gross ist der Winkelausschlag α der Kette? (Dieses Beispiel wurde [BurgHafWill92, p.304] entnommen).

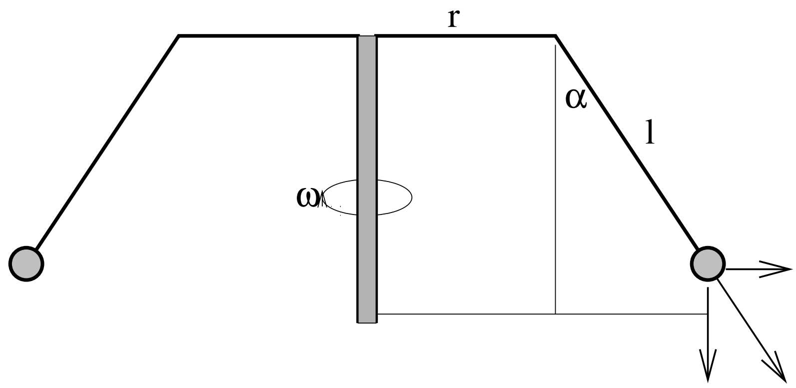


Abbildung 8.17: Kettenkarussel

Lösung: Mit den Notationen der Figur 8.17 ist der Betrag der Zentrifugalkraft gegeben durch

$$F = m\omega^2 (r + l\ \sin\alpha)$$

und die Gewichtskraft durch $G = m\,g$. Die Richtung des resultierenden Kraftvektors muss der Richtung der Kette entsprechen, beschrieben durch den Winkel α. Also gilt

$$\tan\alpha = \frac{F}{G} = \frac{\omega^2}{g}\,(r + l\,\sin\alpha)$$

Mit $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ und der neuen Variable $x = \sin\alpha$ erhält man die Gleichung

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\omega^2}{g}\,(r + l\,x)$$

Man kann versuchen diese Gleichung nun mit dem Newton–Verfahren zu lösen. Es ist aber geschickter, diese zuerst etwas zu vereinfachen. Durch Quadrieren und Multiplizieren mit $(1-x^2)$ ergibt sich

$$x^2 = \frac{\omega^4}{g^2}\,(r + l\,x)^2\,(1-x^2)$$

Somit muss man Nullstellen eines Polynoms vom Grade 4 suchen. Als Startwert kann man $\alpha_0 = 30°$ (oder $x_0 = 0.5$) wählen. Mittels Newton findet man $x \approx 0.5658$ und somit $\alpha \approx 34°$. $\diamondsuit$

8–60 Beispiel : (Kettenlinie, hängendes Kablel)
Betrachten Sie eine Freileitung zwischen zwei Masten, die 200 m voneinander entfernt sind und Höhen von 50 m und 55 m haben. Der tiefste Punkt des Kabels muss 20 m über dem Boden sein. Finden Sie den Abstand a des tiefsten Punktes vom kleineren Masten.

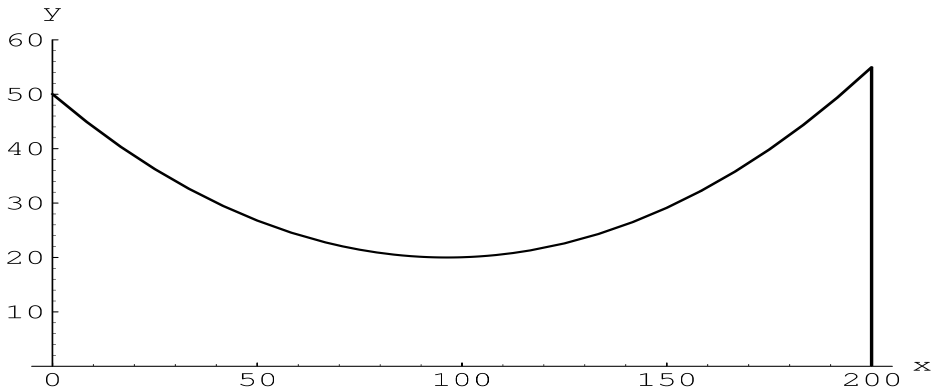


Abbildung 8.18: Kettenlinie

Hinweis: Die Form der Kurve ist gegeben durch

$$y = f\,(x) = h + \lambda\,(\cosh\frac{x-a}{\lambda} - 1) \qquad .$$

wobei

h	Höhe über Boden an der tiefsten Stelle
a	horizontale Koordinate des tiefsten Punktes
λ	$= \dfrac{H}{\rho\,g}$
ρ	spezifische Masse $[kg\ m^{-1}]$ des Kables
H	Seilspannung $[N] = [kg\ m\ s^{-2}]$ beim tiefsten Punkt oder auch Horizontalkomponente des Spannungskraft
g	Gravitationskonstante $\approx 9.81\frac{m}{s^2}$

In dieser Gleichung kann h leicht bestimmt werden. Dann verwendet man die beiden Bedingungen

$$f(0) = 50 \quad \text{und} \quad f(200) = 55$$

um zwei Gleichungen für die Unbekannten a und λ aufzustellen. Unter Verwendung einer der Gleichungen lässt sich a als Funktion von λ schreiben, dies kann man in der anderen Gleichung einsetzen und weiterarbeiten. Man erhält eine Gleichung für die Unbekannte λ.

Lösung: Die beiden Gleichungen sind

$$\begin{aligned} 50 &= h + \lambda(\cosh(\frac{0-a}{\lambda}) - 1) \\ 55 &= h + \lambda(\cosh(\frac{200-a}{\lambda}) - 1) \end{aligned}$$

Mittels $h = 20$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{30}{\lambda} &= \cosh(\frac{a}{\lambda}) - 1 \\ \frac{35}{\lambda} &= \cosh(\frac{200-a}{\lambda}) - 1 \end{aligned}$$

Mit der ersten Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \cosh(\frac{a}{\lambda}) &= \frac{30}{\lambda} + 1 \\ \frac{a}{\lambda} &= \operatorname{arccosh}(\frac{30}{\lambda} + 1) \\ a(\lambda) &= \lambda \operatorname{arccosh}(\frac{30}{\lambda} + 1) \end{aligned}$$

Somiat erhaletn wir eine Gleichung für die Unbekannte λ.

$$\frac{35}{\lambda} = \cosh(\frac{200 - a(\lambda)}{\lambda}) - 1$$

Um da Verfahren von Newton zu verwenden benötigen wir eine gute Schätzung λ_0 von λ. Aufgrund der Aufgabestellung kann man $a \approx 100$ schätzen. Setze $z = \frac{1}{\lambda}$ verwende

$$\begin{aligned} \frac{30}{\lambda} &= \cosh(\frac{a}{\lambda}) - 1 \\ 30\,z + 1 &= \cosh(95\,z) \end{aligned}$$

Mit einem Plot der obigen Funktion kann man eine approximative Lösung $z \approx 0.006$ ablesen, d.h. $\lambda = \frac{1}{z} \approx \frac{1}{0.006} \approx 167$. verwenden Sie nun Newton um zur Lösung $\lambda \approx 159$ und $a \approx 96.3$m zu kommen. Eine Berechnung mit *Octave* angegeben.

Octave

```
a0 = 100;
z  = linspace(0,0.01);
plot(z,30*z,z,cosh(a0*z)-1)
grid on
la0 = 1/0.006;

function y = ff(la)
  a = la*acosh(30/la+1)
  y = la*(cosh((200-a)/la)-1)-35
endfunction

fsolve('ff',la0)
```

◇

8.6.6 Newton Methode höherer Ordnung

Die Grundidee des Newtonverfahrens ist es, die Gleichung

$$f(x) = 0$$

durch die lineare Approximation

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$$

zu ersetzen und diese einfache Gleichung nach x aufzulösen. Das führt zum iterativen Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad .$$

Statt des Schnittpunkts der ursprünglichen Kurve mit der x–Achse wird der Schnittpunkt der Tangente an die Kurve im Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit der x–Achse gesucht. Statt der Tangente kann auch eine Parabel mit der „richtigen“ Steigung und Krümmung verwendet werden. Mit diesem Taylorpolynom zweiter Ordnung erhält man so die Gleichung

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 = 0 \;.$$

Diese quadratische Gleichung für die Unbekannte $x - x_0$ hat die Lösungen

$$x - x_0 = \frac{1}{f''(x_0)} \left(-f'(x_0) \pm \sqrt{(f'(x_0))^2 - 2f''(x_0) f(x_0)}\right)$$

Ist x_0 „genügend nahe“ bei einer Nullstelle, $f''(x_0) \neq 0$, $f(x_0) \approx 0$, so ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv. Ist man bereits in der Nähe der „richtigen“ Nullstelle, so muss die Differenz $x - x_0$ klein sein. Entsprechend ist das Zeichen vor dem Wurzelausdruck zu wählen und wir erhalten die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{f''(x_n)} \left(-f'(x_n) + \operatorname{sign}(f'(x_n)) \sqrt{(f'(x_n))^2 - 2f''(x_n) f(x_n)}\right) \\ &= x_n + \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \left(-1 + \sqrt{1 - 2\,\frac{f''(x_n)\, f(x_n)}{(f'(x_n))^2}}\right) \end{aligned}$$

8–61 Beispiel : Um die Gleichung

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x - 12 = 0$$

mit dem üblichen und modifizierten Newton–Verfahren zu lösen, kann der folgende Code verwendet werden.

Mathematica

```
Clear[x,f,df,newton];
f[x_] = x^4 + 2 x^3 + x^2 - 6x - 12;
df[x_] = D[f[x],x];
ddf[x_] = D[df[x],x];
newton[x_] = x- f[x]/df[x];
newton2[x_] = x- df[x] (1-Sqrt[ - 2 f[x] ddf[x]/(df[x]^2)])/ddf[x];
```

Hier sehen Sie das Resultat von *Mathematica* für die ersten 7 Iterationsschritte bei einem Startwert von $x_0 = 2$.

Mathematica
```
xi = 2 ; zi = xi;
Print[{0,N[xi,15]}];
Do[Print[{i,xi=N[newton[xi],15],
        zi=N[newton2[zi],15]}],{i,7}]
.
{0, 2.}
{1, 1.77777777777778, 1.72653900043606}
{2, 1.73367105232299, 1.73205084873673}
{3, 1.73205293271716, 1.73205080756888}
{4, 1.73205080757254, 1.73205080756888}
{5, 1.73205080756888, 1.73205080756888}
{6, 1.73205080756888, 1.73205080756888}
{7, 1.73205080756888, 1.73205080756888}
```

Das modifizierte Verfahren konvergiert bei diesem Beispiel schneller. Dies ist kein Zufall; man kann zeigen, dass die Konvergenz in den meisten Fällen von dritter Ordnung ist. $\diamondsuit$

Aufgrund des Beispieles und des Konvergenzresultates könnte man zum Schluss kommen, das modifizierte Verfahren sei vorzuziehen. Dem ist aber nicht so. Die folgenden Gründe sprechen klar für das ursprüngliche Newton–Verfahren.

1. Es kann leicht der Fall eintreten, dass die Parabel (Taylorapproximation zweiter Ordnung) keinen Schnittpunkt mit der x–Achse hat. Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist in diesem Fall negativ, und zum Weiterrechnen müssten komplexe Zahlen verwendet werden.

2. Das Verfahren ist ausserordentlich empfindlich auf die „richtige“ Wahl von Anfangswerten. Untersuchen Sie das obige Beispiel mit Anfangswerten von 3, 4, ...

3. Ein Iterationsschritt kann sehr rechenintensiv sein, und es muss auch mit der zweiten Ableitung der Funktion gerechnet werden. Dieser zusätzliche Aufwand kann oft nicht durch die erhöhte Konvergenzordnung gerechtfertigt werden.

4. Das übliche Verfahren von Newton lässt sich leicht auf Systeme von Gleichungen übertragen, was für das modifizierte Verfahren nicht der Fall ist.

8.7 Interpolation und numerische Approximationen

Von einer Funktion kennt man in Anwendungen manchmal nur eine Tabelle von Werten, oder es ist praktisch zu schwierig, die Ableitung zu bestimmen. Zum Beispiel kann die Tabelle durch einige Messungen entstanden sein. Dann ist die analytische Definition

$$f'(x_0) = \lim_{h \to h} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

der Ableitung nutzlos. Man muss ein anderes Verfahren finden, um die Ableitung zumindest abschätzen zu können. Eng verbunden mit dieser Frage ist das Problem der **Interpolation**: aus einer Tabelle von Werten soll die Funktion „rekonstruiert“ werden.

Die hier vorgestellten Resultate bilden zum Beispiel die Grundlage für **numerische Integrationsverfahren**.

Von der Funktion $y = f(x)$ seien für ein festes h (typischerweise klein) die Werte

$$x_i = i\,h \quad \text{und} \quad y_i = f(x_i) \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

gegeben. Aus dem Kapitel über Polynome wissen Sie, dass es genau ein Polynom $P(x)$ vom Grad n gibt, das durch all diese Punkte geht. Dieses Polynom kann durch **Lagrange–** oder **Newton–Interpolation** gefunden werden. Ist allerdings n gross, d.h. viele Werte sind gegeben, so erhält man als Resultat ein Polynom

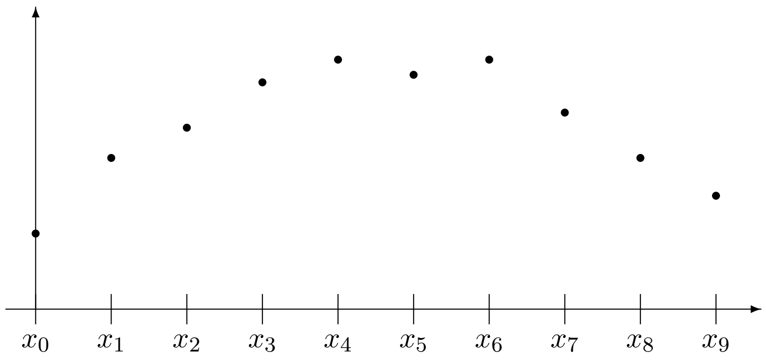


Abbildung 8.19: Funktion gegeben durch einige Werte

von sehr hohem Grad. Dadurch kann es sehr schwierig werden, weiter zu rechnen. Um zum Beispiel den Funktionswert von $f(x)$ für ein x zwischen den x_i zu bestimmen, muss ein Polynom von hohem Grad ausgewertet werden, was mit viel Rechenaufwand verbunden ist.

Wir untersuchen nun zwei verschiedene Verfahren, den Wert von $f(x)$ abzuschätzen, indem nur wenige x_i in der Nähe von x verwendet werden. Ziel wird es sein, den Fehler, d.h den Unterschied zwischen dem wahren und geschätzen Wert, möglichst klein zu halten.

Sei dazu $y = f(x)$ eine oft differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, und wir verwenden die Notationen

$$\begin{aligned} M_1 &= \max_{a \le x \le b} |f'(x)| \\ M_2 &= \max_{a \le x \le b} |f''(x)| \\ M_k &= \max_{a \le x \le b} |f^{(k)}(x)| \end{aligned}$$

8.7.1 Lineare Interpolation

Die Grundidee dieses Verfahrens ist sehr einfach: um $f(x)$ abzuschätzen, nimmt man die rechts und links von x liegenden Werte x_i und x_{i+1} und legt eine Gerade durch diese zwei Punkte. Dann rechnet man den Funktionswert dieser Geraden aus. In Abbildung 8.19 werden je aufeinanderfolgende Punkte durch eine Gerade verbunden. Das gibt eine „neue“ Funktion $l(x)$. Die formale Definition von $l(x)$ ist gegeben durch

$$l(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\,(x - x_i) = \frac{(x - x_i)\,y_{i+1} + (x_{i+1} - x)\,y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{für} \quad x_i \le x \le x_{i+1}$$

Diese Funktion heisst auch **stückweise lineare Interpolationsfunktion**.

Nun gilt es, die Differenz $f(x) - l(x)$ abzuschätzen.

8–62 Theorem : *Für genügend oft differenzierbare Funktionen $f(x)$ und ihre stückweise linearen Approximationen $l(x)$ gilt*

$$|\, f(x) - l(x)\,| \le \frac{1}{8}\, M_2 h^2 + o(h^2)$$

für $x_i < x < x_{i+i}$ mit $h = x_{i+1} - x_i$.

Man sagt in dieser Situation auch, dass die Approximation quadratisch gegen die tatsächliche Funktion konvergiert, da eine Halbierung der Schrittweite h den Fehler typischerweise auf einen Viertel reduziert.

Der Beweis dieser wichtigen Aussage ist eine einfache Konsequenz des selben Resultates für die Standardsituation $x_i = -h/2$ und $x_{i+1} = h/2$.

8–63 Satz : *Sei* $f(x) \in C^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *und* $h > 0$ *eine feste Zahl mit* $y_{-1} = f(-h/2)$ *und* $y_1 = f(+h/2)$. *Die Funktion* $g(x)$ *sei gegeben durch*

$$g(x) = \frac{y_{-1} + y_1}{2} + \frac{y_1 - y_{-1}}{h}\, x$$

Dann gilt

$$|\, f(x) - g(x)\, | \leq \frac{1}{8}\, M_2 h^2 + o(h^2)$$

für alle $|x| \leq h/2$.

Beweis : Wir verwenden die Taylorpolynome

$$\begin{aligned} f(x) =&\quad f(0) + f'(0)\, x + \tfrac{1}{2!}\, f^{(2)}(0)\, x^2 + \tfrac{1}{3!}\, f^{(3)}(0)\, x^3 + o(x^3) \\ g(x) =&\quad g(0) + g'(0)\, x \end{aligned}$$

Da der Graph von g eine Gerade ist, treten keine Terme höherer Ordnung auf. Bestimmen wir y_{-1} und y_1 mittels der Taylorformel für $f(\pm h/2)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1 &= f(0) + \tfrac{1}{2}\, f'(0)\, h + \tfrac{1}{8}\, f^{(2)}(0)\, h^2 + \tfrac{1}{48}\, f^{(3)}(0)\, h^3 + o(h^3) \\ y_{-1} &= f(0) - \tfrac{1}{2}\, f'(0)\, h + \tfrac{1}{8}\, f^{(2)}(0)\, h^2 - \tfrac{1}{48}\, f^{(3)}(0)\, h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{y_{-1} + y_1}{2} = f(0) + \frac{1}{8}\, f''(0)\, h^2 + o(h^3) \\ g'(0) &= \frac{y_1 - y_{-1}}{h} = f'(0) + \frac{1}{24}\, f^{(3)}(0)\, h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

und

$$g(x) = \left(f(0) + \frac{1}{8}\, f''(0)\, h^2\right) + x\, \left(f'(0) + \frac{1}{24}\, f^{(3)}(0)\, h^2\right) + o(h^3)$$

Das ergibt für $|x| < |h/2|$

$$f(x) - g(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right)\, f''(0) + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x\, h^2}{24}\right)\, f^{(3)}(0) + o(h^2)$$

Wegen $|x| \leq h/2$ gilt

$$\left|\frac{x^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right| \leq \frac{h^2}{8}$$

und somit

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{8}\, M_2\, h^2 + o(h^2)$$

□

Wegen der Taylorapproximation

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)\, x + \frac{1}{2!}\, f^{(3)}(0)\, x^2 + \frac{1}{3!}\, f^{(4)}(0)\, x^3 + o(x^2)$$

gilt auch

$$f'(x) - g'(x) = f'(x) - g'(0) = f''(0)\, x + o(x)$$

oder auch

$$|\, f'(x) - \frac{f(-h/2) - f(h/2)}{h}\, | \leq \frac{1}{2}\, M_2\, h + o(h)$$

für $-h/2 < x < h/2$. Somit haben wir für kleine Werte von h eine brauchbare Approximation der Ableitung der Funktion.

Man kann leicht feststellen, dass die Approximation der Ableitung für beliebige Polynome vom Grad 1 exakt ist. Für Polynome vom Grad 2 ist der Fehler von der Ordnung h.

8–64 Beispiel : Auf dem Intervall $[0, \pi]$ sind $n + 1$ Punkte $x_i = i\,\pi/n$ gleichmässig verteilt, und für jeden Punkt wird $y_i = \sin x_i$ tabelliert. Zwischen diesen Punkten wird durch Geradenstücke interpoliert. Wie viele Punkte sind zu wählen, damit der Fehler kleiner als 10^{-3} ist?

Lösung: Für diese einfache Funktion sieht man leicht, dass $M_2 = 1$. Somit gilt für den Interpolationsfehler

$$|\; f\,(x) - l\,(x)\;| \le \frac{1}{8}\;h^2 + o\,(h^2)$$

Da h auf alle Fälle klein sein wird, ignorieren wird den Term $o\,(h^2)$. Damit der Fehler sicher klein genug ist, muss gelten

$$\frac{1}{8}\;h^2 \le 10^{-3}.$$

Wegen $h = \pi/n$ ergibt das die Bedingung

$$\frac{1}{8}\;10^3\pi^2 \le n^2.$$

Das führt auf $n \ge 35.124$, und somit ist $n = 36$ geeignet. $\diamondsuit$

8.7.2 Quadratische Interpolation

Wir versuchen, durch drei gegebene Funktionswerte eine passende Parabel zu legen. Die einfachstmögliche Situation ist

$$f\,(-h) = y_{-1} \quad , \qquad f\,(0) = y_0 \quad , \qquad f\,(h) = y_1$$

Die allgemeine Formel für eine Parabel ist

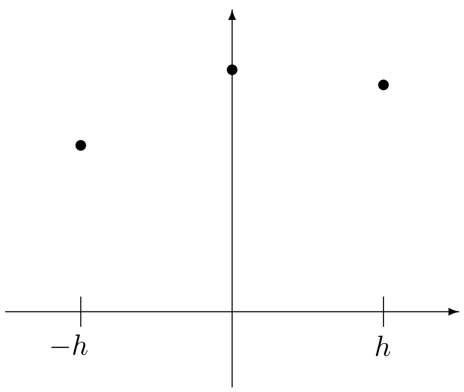


Abbildung 8.20: Interpolation durch eine Parabel

$$p\,(x) = a + b\,x + c\,x^2$$

Nun gilt es, die Konstanten a, b und c zu bestimmen, abhängig von h und den drei y_i. Setzt man der Reihe nach $x = -h,\ 0$ und h, so erhält man die drei Gleichungen

$$\begin{array}{rcccccc} y_{-1} = & a & - & b\,h & + & c\,h^2 \\ y_0 = & a & + & b\,0 & + & c\,0 \\ y_1 = & a & + & b\,h & + & c\,h^2 \end{array}$$

Daraus kann man ohne lange Rechnung die Lösungen

$$a = y_0 \quad , \qquad b = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \quad , \qquad c = \frac{y_{-1} - 2\,y_0 + y_1}{2h^2}$$

ablesen.

8–65 Satz : *Sei* $f(x) \in C^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *und* $h > 0$ *eine feste Zahl mit* $y_{-1} = f(-h)$, $y_0 = f(0)$ *und* $y_1 = f(+h)$. *Die Funktion* $p(x)$ *sei durch die obige Formel gegeben. Dann gilt*

$$|\, f(x) - p(x)\,| \le \frac{1}{6}\, M_3 h^3 + o(h^3)$$

für alle $|x| \le h$.

Man sagt in dieser Situation auch, dass die Approximation von dritter Ordnung ist, da eine Halbierung der Schrittweite h den Fehler typischerweise auf einen Achtel reduziert.

Die Formulierung und der Beweis dieser Aussage sind analog zur selben Aussage für die Interpolation durch eine Gerade. Der **wesentliche Unterschied** liegt in der höheren Ordnung (h^3 statt h^2) des Approximationsfehlers. Diese höhere Konvergenzordnung rechtfertigt bei den meisten Anwendungen den etwas grösseren Rechenaufwand durch die Interpolation durch Parabelstücke statt Geradenstücke.

Beim Problem der numerischen Integration von Funktionen führt die Approximation durch Geraden zur **Trapezregel** und die Approximation durch Parabelstücke zur **Regel von Simpson**.

Beweis : Wir verwenden die Taylorpolynome

$$\begin{aligned} f(x) = &\quad f(0) + f'(0)\, x + \tfrac{1}{2!}\, f^{(2)}(0)\, x^2 + \tfrac{1}{3!}\, f^{(3)}(0)\, x^3 + o(x^3) \\ p(x) = &\quad a + b\, x + c\, x^2 \end{aligned}$$

Bestimmen wir y_{-1} und y_1 mittels der Taylorformel für $f(\pm h)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1 &= f(0) + f'(0)\, h + \tfrac{1}{2}\, f^{(2)}(0)\, h^2 + \tfrac{1}{6}\, f^{(3)}(0)\, h^3 + o(h^3) \\ y_{-1} &= f(0) - f'(0)\, h + \tfrac{1}{2}\, f^{(2)}(0)\, h^2 - \tfrac{1}{6}\, f^{(3)}(0)\, h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} p(0) &= a = f(0) \\ p'(0) &= b = \tfrac{1}{2h}\,(y_1 - y_{-1}) = f'(0) + \tfrac{1}{6}\, f^{(3)}(0)\, h^2 + o(h^2) \\ p''(0) &= 2\,c = \tfrac{1}{h^2}\,(y_1 - 2\,y_0 + y_{-1}) = f''(0) + o(h) \end{aligned}$$

Das ergibt

$$p(x) = a + b\, x + c\, x^2 = f(0) + x\left(f'(0) + \frac{1}{6}\, f^{(3)}(0)\, h^2\right) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x\, h^2) + o(x^2\, h)$$

und für $|x| \le h$

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{6}\, f^{(3)}(0)\, x^3 - \frac{1}{6}\, f^{(3)}(0)\, h^2\, x + o(h^3)$$

Wegen $|x| \le h$ gilt

$$|x^3 - h^2\, x| \le h^3$$

(man kann das sogar noch etwas verbessern) und somit

$$|\, f(x) - p(x)\,| \le \frac{1}{6}\, M_3\, h^3 + o(h^3)$$

woraus die Behauptung folgt. □

Wegen den Taylorapproximationen

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(0) + f''(0)\,x + \tfrac{1}{2!}\,f^{(3)}(0)\,x^2 + \tfrac{1}{3!}\,f^{(4)}(0)\,x^3 + o(x^2) \\ p'(x) &= p'(0) + p''(0)\,x \end{aligned}$$

und

$$f(0) = p(0) \quad , \qquad f'(0) = p'(0) \quad , \qquad f''(0) = p''(0)$$

gilt auch

$$f'(x) - p'(x) = \frac{1}{2}\,f^{(3)}(0)\,x^2 + o(x^2)$$

und

$$|\,f'(x) - p'(x)\,| \leq \frac{1}{2}\,M_3\,h^2 + o(h^2)$$

für $-h/2 < x < h/2$. Somit haben wir für kleine Werte von h eine brauchbare Approximation der Ableitung der Funktion.

Man kann leicht feststellen, dass die Approximation der Ableitung für beliebige Polynome vom Grad 2 exakt ist. Für Polynome vom Grad 3 ist der Fehler von der Ordnung h^2.

8–66 Beispiel : Auf dem Intervall $[0, \pi]$ sind $n+1$ Punkte $x_i = i\,\pi/n$ gleichmässig verteilt, und für jeden Punkt wird $y_i = \sin x_i$ tabelliert. Zwischen diesen Punkten wird durch Parabelstücke interpoliert. Wie viele Punkte sind zu wählen, damit der Fehler kleiner als 10^{-3} ist?

Lösung: Für diese einfache Funktion sieht man leicht, dass $M_3 = 1$. Somit gilt für den Interpolationsfehler

$$|\,f(x) - p(x)\,| \leq \frac{1}{6}\,h^3 + o(h^3)$$

Da h auf alle Fälle klein sein wird, ignorieren wird den Term $o(h^3)$. Damit der Fehler sicher klein genug, ist muss gelten

$$\frac{1}{6}\,h^3 \leq 10^{-3}.$$

Wegen $h = \pi/n$ ergibt das die Bedingung

$$\frac{1}{6}\,10^3\pi^3 \leq n^3.$$

Das führt auf $n \geq 17.29$ und somit $n = 18$.

Bei Interpolation durch Geradenstücke waren für die selbe Genauigkeit noch mindestens 35 Teilpunkte notwendig. Verlangt man ein noch genaueres Resultat, so wird der Unterschied zwischen linearer und quadratischer Interpolation noch grösser. ♢

8.8 Kubische Spline–Interpolation

Dieser Abschnitt ist im wesentlichen aus [MeybVach90, p.135] übernommen. Das vorgestellte Verfahren ist auch in [Bron93, p. 636] beschrieben. Dort finden Sie auch eine kurze Beschreibung des Verfahrens von Bézier. Damit kann man eine parametrisierte Kurve $(x(t), y(t))$ durch gegebene Punkte (x_i, y_i) legen. y muss aber nicht als Funktion von x darstellbar sein. Diese Idee ist in [Bon91] illustriert. Wir geben hier ein einfaches Beispiel und kommentarlos den zugehörigen *Mathematica*–Code

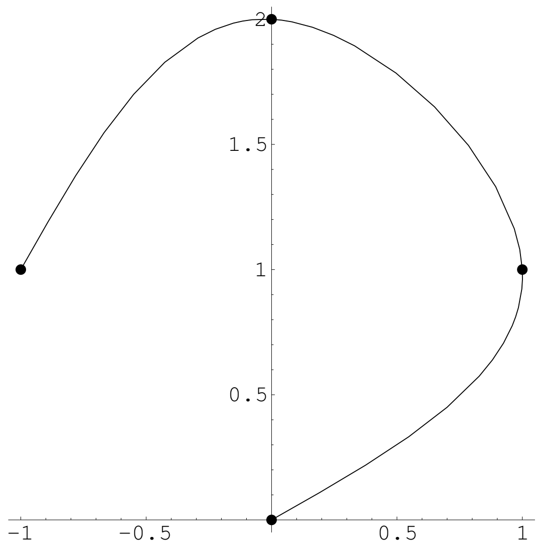


Abbildung 8.21: Parametrische Spline–Interpolation

Mathematica

```
Needs["Graphics`Spline`"]
npts = {{0,0},{1,1},{0,2},{-1,1}};
ptplot = Graphics[{PointSize[0.02],Map[Point, npts]}];
Show[ptplot,
      Graphics[Spline[npts,Cubic]],
     Axes -> True,
     AspectRatio -> Automatic,
     PlotRange -> All]
```

Wir wollen nur den einfacheren Fall untersuchen, wo y als Funktion von x gegeben sein muss. Wir suchen eine „einfache“ Funktion, wobei die abhängige Variable y von einer Variablen x abhängt.

8.8.1 Definition einer kubischen Spline–Funktion

Im Kapitel über Polynome haben wir gesehen, dass durch $n+1$ Punkte $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ genau ein Polynom $p(x)$ vom Grad n gepasst werden kann. Die Koeffizienten dieses Polynoms können durch die Verfahren von Lagrange oder Newton bestimmt werden. Das Resultat kann zu starken Schwankungen des Interpolationspolynoms zwischen den vorgegebenen Werten führen (siehe Abbildung 8.22). Die **Spline–Interpolation** führt zu Kurven, die möglichst „sanft“ durch die Punkte hindurchgehen. Legt man durch die gegebenen Punkte ein dünnes, elastisches Lineal (Englisch: spline), so wird seine Biegelinie durch dieses kubische Splinepolynom beschrieben.

8–67 Definition : Zu $n+1$ Stützpunkten (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$ mit

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

heisst die Funktion $y = s(x)$ eine **kubische Spline–Funktion**, wenn sie folgenden drei Eigenschaften erfüllt

1. $s(x_i) = y_i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$
2. s ist zwei mal differenzierbar und die zweite Ableitung ist stetig, d.h. $s \in C^2$.

3. auf jedem Teilintervall $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ist s ein Polynom vom Grad ≤ 3. Die Koeffizienten des Polynoms hängen typischerweise vom Teilintervall ab.

8.8.2 Der Ansatz

Zu den gegebenen Punkten (x_i, y_i) betrachten wir Polynome

$$s_i\,(x) = y_i + b_i\,(x - x_i) + c_i\,(x - x_i)^2 + d_i\,(x - x_i)^3 \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

mit noch unbekannten Koeffizienten b_i, c_i, d_i und setzen

$$s\,(x) = s_i\,(x) \quad \text{falls} \quad x_i \leq x < x_{i+1}$$

Hierfür gilt bereits $s\,(x_i) = y_i$.

8.8.3 Die Berechnung der Koeffizienten

(a) Damit die Funktion s auf dem ganzen Intervall stetig ist, muss

$$\lim_{x \to x_{i+1}-} s\,(x) = s_i\,(x_{i+1}) = s\,(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

gelten. Mit der Notation

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

führt das auf die Gleichungen

$$y_i + b_i\,h_i + c_i\,h_i^2 + d_i\,h_i^3 = y_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

oder auch

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - c_i\,h_i - d_i\,h_i^2$$

(b) Damit die Funktion s auf dem ganzen Intervall stetig differenzierbar ist, muss

$$\lim_{x \to x_{i+1}-} s'\,(x) = s_i'\,(x_{i+1}) = s'\,(x_{i+1}) = b_{i+1}$$

gelten. Das führt auf die Gleichungen

$$b_i + 2\,c_i\,h_i + 3\,d_i\,h_i^2 = b_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-2$$

oder auch

$$b_{i-1} + 2\,c_{i-1}\,h_{i-1} + 3\,d_{i-1}\,h_{i-1}^2 = b_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

(c) Damit die zweite Ableitung der Funktion s auf dem ganzen Intervall stetig ist muss

$$\lim_{x \to x_{i+1}-} s''\,(x) = s_i''\,(x_{i+1}) = s''\,(x_{i+1}) = 2\,c_{i+1}$$

gelten. Das führt auf die Gleichungen

$$2\,c_i + 6\,d_i\,h_i = 2\,c_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

oder auch

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

Setzen wir die letzte der obigen Gleichungen in die erste ein, so ergibt sich

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - c_i\, h_i - d_i\, h_i^2 = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - c_i\, h_i - \frac{c_{i+1} - c_i}{3}\, h_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2c_i + c_{i+1}}{3}\, h_i$$

Diese Gleichung kann nun in der zweiten eingesetzt werden, und wir erhalten

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2c_{i-1} + c_i}{3}\, h_{i-1} + 2\, c_{i-1}\, h_{i-1} + (c_i - c_{i-1})\, h_{i-1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2c_i + c_{i+1}}{3}\, h_i$$

oder auch

$$c_{i-1}\, h_{i-1} + c_i\, 2\,(\,h_i + h_{i-1}) + c_{i+1}\, h_i = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$$

Diese Gleichung muss für $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ richtig sein. Somit haben wir $n-1$ Gleichungen für die $n+1$ Unbekannten $c_0,\ , c_1, \ldots, c_n$. Gibt man aber c_0 und c_n vor, so wird das System von linearen Gleichungen eindeutig lösbar. Die speziell einfache Wahl von $c_0 = c_n = 0$ führt dazu, dass die Kurve mit Krümmung 0 in die Punkte (x_0, y_0) und (x_n, y_n) einmündet. Es ergibt sich mit der Matrixnotation und der Abkürzung

$$f_i = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$$

das Systen von Gleichungen

$$\begin{bmatrix} 2\,(h_1 + h_0) & h_1 & & & \\ h_1 & 2\,(h_2 + h_1) & h_2 & & \\ & h_2 & 2\,(h_3 + h_2) & h_3 & \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ & & & h_{n-2} & 2\,(h_{n-1} + h_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dieses **tridiagonale** System von linearen Gleichungen kann mit numerischen Verfahren leicht und schnell nach den Unbekannten c_i aufgelöst werden, und daraus können wir mittels

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \\ b_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - c_i\, h_i - d_i\, h_i^2 \end{aligned}$$

auch die Koeffizienten d_i und b_i bestimmen.

Dieser lange Rechenweg lässt sich leicht auf Computern und Taschenrechnern ausführen.

8.8.4 Zur Wahl von c_0 und c_n

Man kann zeigen, dass mit $c_0 = c_n = 0$ für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $g\,(x)$, welche durch die gegebenen Punkte gehen, folgende Ungleichung gilt:

$$\int_{x_0}^{x_n} (s''\,(x))^2\, dx \leq \int_{x_0}^{x_n} (g''\,(x))^2\, dx$$

Fragestellungen dieser Art führen in das Gebiet der **Variationsrechnung**.

8.8.5 Ein vollständig durchgerechnetes Beispiel

Gesucht ist die kubische Spline–Funktion, welche durch die Punkte

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
y_i	0	0	0	1	0	0	0

geht. In diesem Beispiel ist $n = 6$ und $h_i = 1$, und wir erhalten

$$f_i = 3\,(y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1})$$

und somit das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit dem Lösungsvektor

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.34615 \\ 1.38462 \\ -2.19231 \\ 1.38462 \\ -0.34615 \end{pmatrix}$$

Mittels der Formeln

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{c_{i+1} - c_i}{3} \\ b_i &= y_{i+1} - y_i - c_i - d_i \end{aligned}$$

und $c_0 = c_6 = 0$ ergeben sich die Vektoren

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.11538 \\ 0.57692 \\ -1.19231 \\ 1.19231 \\ -0.57692 \\ 0.11538 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.11538 \\ -0.23077 \\ 0.80769 \\ 0 \\ -0.80769 \\ 0.23077 \end{pmatrix}$$

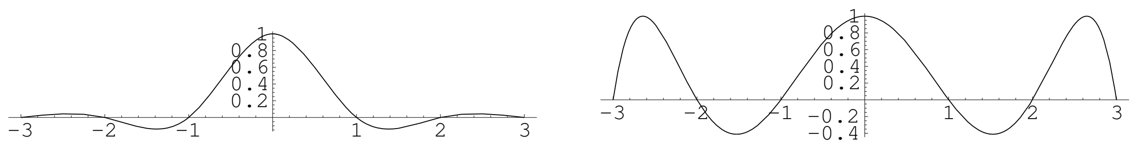


Abbildung 8.22: Spline– und Polynom–Interpolation

Diese Resultate wurden mit `MATLAB` durch die untenstehenden Befehle erzeugt.

Matlab

```
a=[
4 1 0 0 0
1 4 1 0 0
0 1 4 1 0
0 0 1 4 1
0 0 0 1 4];
y=[0 0 0 1 0 0 0];
f=[0 3 -6 3 0];

c= f/a;
c=[0 c 0]
d= (c(2:7)-c(1:6))/3
b= y(2:7) - y(1:6) - c(1:6) - d(1:6)

test1= y(1:6)+b+d+ c(1:6)-y(2:7)
test2= b(1:5) + 2*c(1:5) + 3*d(1:5) - b(2:6)
test3= c(1:6) + 3*d - c(2:7)
```

Die letzten drei Zeilen verifizieren, dass die drei Systeme von Gleichungen in Abschnitt 8.8.3 tatsächlich erfüllt sind. Die Rechnungen führen auf die Tabelle der Koeffizienten

i	0	1	2	3	4	5
x	$-3 \leq x < -2$	$-2 \leq x < -1$	$-1 \leq x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$
y_i	0	0	0	1	0	0
b_i	0.11538	-0.23077	0.80769	0	-0.80769	0.23077
c_i	0	-0.34615	1.38462	-2.19231	1.38462	-0.34615
d_i	-0.11538	0.57692	-1.19231	1.19231	-0.57692	0.11538

Aus dieser Tabelle können wir nun die verschiedenen Stücke des kubischen Spline–Polynoms herauslesen als

$$
\begin{array}{lllllll}
s(x) = s_0(x) = & 0 & +0.11538\,(x+3) & & -0.11538\,(x+3)^3 & \text{für} & -3 \leq x \leq -2 \\
s(x) = s_1(x) = & 0 & -0.23077\,(x+2) & -0.34615\,(x+2)^2 & +0.57692\,(x+2)^3 & \text{für} & -2 \leq x \leq -1 \\
s(x) = s_2(x) = & 0 & +0.80769\,(x+1) & +1.38462\,(x+1)^2 & -1.19231\,(x+1)^3 & \text{für} & -1 \leq x \leq 0 \\
s(x) = s_3(x) = & 1 & & -2.19231\,(x+0)^2 & +1.19231\,(x+0)^3 & \text{für} & 0 \leq x \leq 1 \\
s(x) = s_4(x) = & 0 & -0.80769\,(x-1) & +1.38462\,(x-1)^2 & -0.57692\,(x-1)^3 & \text{für} & 1 \leq x \leq 2 \\
s(x) = s_5(x) = & 0 & +0.23077\,(x-2) & -0.34615\,(x-2)^2 & +0.11538\,(x-2)^3 & \text{für} & 2 \leq x \leq 3
\end{array}
$$

Die Abbildung 8.22 vergleicht das Resultat der stückweisen Spline–Interpolation mit dem direkten Interpolationspolynom vom Grade 6

$$p(x) = \frac{-1}{36}\,(x+3)\,(x+2)\,(x+1)\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$$

8.8.6 Ein zweites Beispiel

Als sehr vergleichbares Beispiel suchen wir das Spline–Polynom durch die Punkte

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
y_i	0	0	0	0	1	0	0	0	0

Die Rechnungen sind analog zum vorangehenden Abschnitt, und hier sei nur der *Mathematica*–Code gezeigt, der verwendet wird, um das Polynom zu zeichnen. Die Graphik ist mit dem Resultat einer einfachen Lagrange–Interpolation

$$p(x) = \frac{-1}{576}\,(x+4)\,(x+3)\,(x+2)\,(x+1)\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)$$

zu vergleichen.

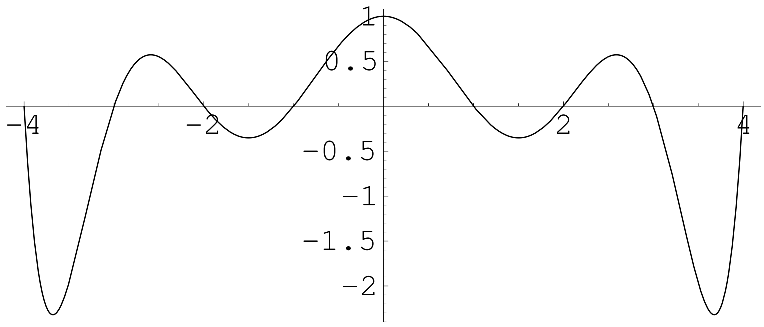


Abbildung 8.23: Polynom–Interpolation durch 9 Stützpunkte

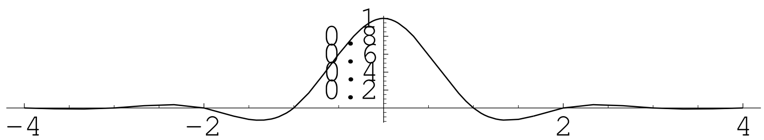


Abbildung 8.24: Spline–Interpolation durch 9 Stützpunkte

Mathematica

```
Needs["Graphics`Spline`"]
pts={{-4,0},{-3,0},{-2,0},{-1,0},{0,1},{1,0},{2,0},{3,0},{4,0}};
Show[Graphics[Spline[pts,Cubic]],
     Axes -> True,AspectRatio -> Automatic]
```

8.9 Aufgaben

8.9.1 Extremalprobleme

• Aufgabe 8–1:
Ein Ball wird senkrecht nach oben geworfen. Die Höhe h berechnet sich nach der Formel

$$h(t) = 5 + 35t - 5t^2$$

Berechne die maximale Höhe und den Zeitpunkt, zu dem diese erreicht wird.

• Aufgabe 8–2:
Festigkeit eines Balkens

Aus einem Baumstamm soll ein Balken mit rechteckigen Querschnitt so ausgeschnitten werden, dass sein Widerstandsmoment $W = bh^2/6$ einen grössten Wert annimmt.

(r Radius des Stammes, b Breite des Balkens, h Höhe des Balkens)

• Aufgabe 8–3:
In Abbildung 8.25 sehen Sie einen Balken mit quadratischem Querschnitt, der an einem Seil aufgehängt ist. Wir nehmen an, dass die Unterkante des Balkens horizontal ist und die Schnur im Punkt P reibungsfrei gleiten kann. Gesucht ist der sich einstellende Winkel w. Er ist durch die Bedingung charakterisiert, dass der Schwerpunkt des Balkens so tief wie möglich liegt.

(a) Schreiben Sie die Höhe des Balkenschwerpunktes als Funktion des Winkels w, der Balkenbreite b und der Gesamtlänge L des Seiles.

(b) Finden Sie den optimalen Winkel w und die zugehörige Höhe des Balkens.

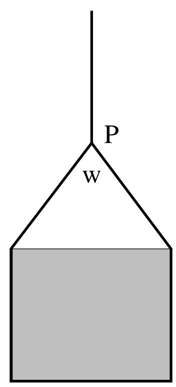


Abbildung 8.25: Balken an einem Seil

• Aufgabe 8–4:
Zwei Lichtquellen, eine achtmal stärker als die andere, sind 40 m voneinander angebracht. An einem Punkt x Meter von der stärkeren Quelle entfernt berechnet sich die Lichtintensität I nach der Formel

$$I = \frac{8}{x^2} + \frac{1}{(40-x)^2}$$

Finde den Punkt zwischen den Lichtquellen an dem die Intensität minimal wird.

• Aufgabe 8–5:
Die Gleichung

$$y = k\,(16\,x^4 - 12\,L\,x^3 + L^2\,x^2) \qquad ,$$

wobei k eine Konstante ist, beschreibt die Auslenkung eines Balkens der Länge L bei einer Distanz x von einem Ende. Für welchen Wert von x ist die Auslenkung maximal?

• Aufgabe 8–6:
Welche Zahl übersteigt ihr Quadrat am meisten?

• Aufgabe 8–7:
Finde die beiden Zahlen, deren Summe 110 ist und deren Produkt möglichst gross ist.

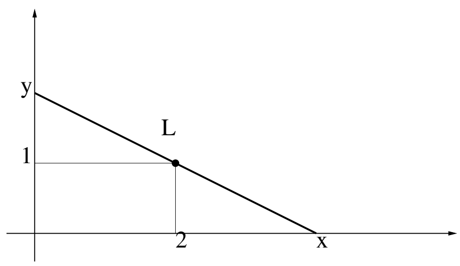
• Aufgabe 8–8:
Ein Stück Draht von 50 cm Länge wird in zwei Stücke geschnitten. Das eine Stück wird zu einem Kreis gebogen, das andere zu einem Quadrat. Wo soll der Draht zerschnitten werden, sodass die Summe der beiden Flächen minimal wird?

• Aufgabe 8–9:
Ein rechteckiges Stück Garten ($12m^2$) soll eingezäunt werden. Eine Seite grenzt an das Haus und benötigt deshalb keinen Zaun. Wie müssen die Länge und Breite des Garten gewählt werden, damit der Zaun möglichst kurz wird?

• Aufgabe 8–10:
Ein Geradenstück der Länge L verbindet die x-Achse mit der y-Achse und geht durch den Punkt $(2\,,\,1)$.

(a) Schreiben Sie die Länge L als Funktion von x.

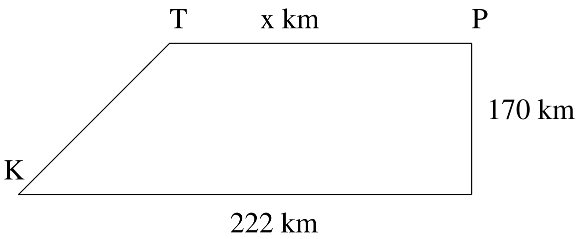
(b) Wie ist x zu wählen, damit die Länge L des Geradenstücks minimal wird.
Tipp: gemeinsame Faktoren beibehalten.



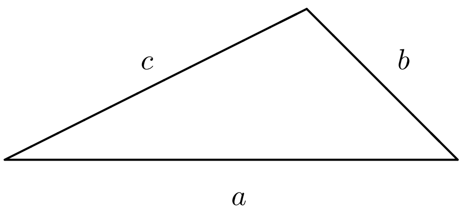
• Aufgabe 8–11:
Die Kiwis werden in der Plantage K geerntet und müssen rasch mit Maultieren ($v_M = 4\frac{km}{h}$) zum Fluss und von dort mit dem Schiff ($v_S = 11\frac{km}{h}$) zum Meereshafen P gebracht werden.

(a) Wie lange dauert der Transport, wenn man den Umladehafen T hundert Kilometer weit weg von P baut ($x = 100km$)?

(b) Wo muss T errichtet werden, damit die Transportzeit minimal wird ($x\ =?$)? Wie lange dauert dieser Transport?



• Aufgabe 8–12:
Untersuchen Sie ein Dreieck mit fester Grundlinie a und festem Umfang $2\,L$. Zeige, das die Dreiecksfläche A maximal wird für das gleichschenklige Dreieck $b = c$.
Tipp: Formel von Heron für die Fläche

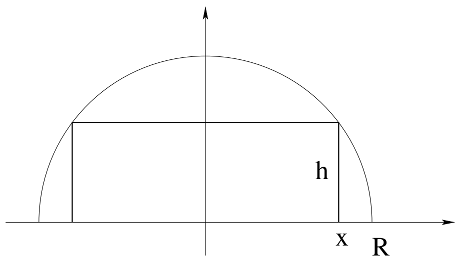


$$2\,L = a + b + c$$

$$A = \sqrt{L\,(L-a)\,(L-b)\,(L-c)}$$

• Aufgabe 8–13:

Die rechtsstehende Figur wird um die vertikale Achse rotiert, sodass eine Halbkugel mit eingeschriebenem Rotationszylinder entsteht. Der Radius R ist gegeben. Die Rechnungen müssen **exakt** sein.



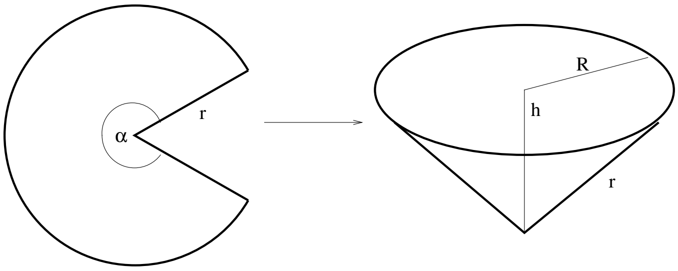
(a) Wie muss x gewählt werden, damit das Volumen V des Zylinders maximal wird.

(b) Bestimmen Sie das Verhältnis von maximalem Zylindervolumen zu Volumen der Halbkugel.

• Aufgabe 8–14:
Eine Pommesfrites–Verkäuferin fertigt kegelförmige Tüten indem sie Sektoren von kreisrunden Papierscheiben von gegebenem Radius r verklebt.

(a) Schreiben Sie das Volumen V als Funktion des Öffnungswinkels α.

(b) Wie gross muss sie den Öffnungswinkel α wählen, damit das Volumen der Tüte maximal wird?



• Aufgabe 8–15:
Ein zylinderförmiger, oben offener Heizkessel besteht aus einem Boden aus Kupfer und Wänden aus Zinn. Das Volumen muss mindestens 0.8 m^3 sein. Der Preis von Zinn ist 70 Fr./m^2 und Kupfer kostet 164 Fr/m^2. Wie ist der Kessel zu dimensionieren, damit er möglichst günstig wird?

• Aufgabe 8–16:
Eine Telephonleitung soll über einen 20 m breiten Fluss gespannt werden und schliesslich 70 m flussabwärts an das Hauptnetz angehängt werden. Die Kosten pro Meter über den Fluss sind dreimal so hoch wie ein Meter Leitung über Land. Damit die Kosten möglichst tief sind, wird das Kabel bei der Überquerung gleichzeitig noch um einige Meter flussabwärts auf die andere Seite gespannt. Um wieviele Meter?

• Aufgabe 8–17:
Gegeben sind zwei Lichtquellen gleicher Stärke, 5 Meter voneienander entfernt in der Decke eines Zimmers montiert. Die Beleuchtungsintensität einer Lichtquelle ist proportional zur Stärke der Quelle und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes.

(a) Untersuche die Lichtintensität 2 Meter unterhalb der Decke. Wo ist die Intensität maximal?

(b) Untersuche die Lichtintensität 5 Meter unterhalb der Decke. Wo ist die Intensität maximal?

• Aufgabe 8–18:
Betrachte einen geraden Kreiskegelstumpf der Höhe $h = 1/2$, wobei der Basiskreis einen Radius von 1 hat und der Deckelkreis einen Radius von $0 \leq x \leq 1$.

(a) Bestimme die Mantelfläche A als Funktion von x. Tip: Regel von Guldin (Pappus).

(b) Finde die maximale und minimale Mantelfläche exakt.

(c) Bestimmen Sie $A\,(0)$ und $A\,(1)$ und zeichnen Sie dann die Funktion $A\,(x)$ möglichst genau.

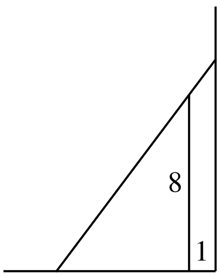
• Aufgabe 8–19:
Alle Tangenten an die Kurve $y = 2/x$ für $x > 0$ schneiden die x– und die y–Achse. Finden sie die minimal mögliche Länge dieser Tangenten.

(a) Soweit als möglich analytisch.

(b) Sobald notwendig, numerisch weiterrechnen (HP–48).

• Aufgabe 8–20:

Ein 8 m hoher Holzzaun ist 1 m von einer hohen Wand entfernt. Wie lang muss eine Leiter mindestens sein, damit sie an der Wand angelehnt werden kann? Das Resultat ist **exakt** anzugeben.
Tip: Die Höhe des Berührungspunktes als Hilfsgrösse verwenden und ähnliche Dreiecke verwenden.



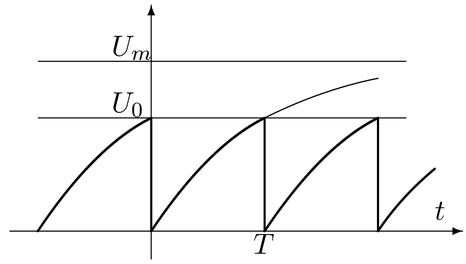
• Aufgabe 8–21:
Ein Tunnelquerschnitt ist rechteckig, mit einem aufgesetzten Halbkreis. Die Querschnittfläche A ist gegeben. Wie breit ist der Tunnel zu bauen, damit der Umfang minimal wird?

• Aufgabe 8–22:

Eine Kapazität wird über einen Widerstand gemäss der Formel

$$U\,(t) = U_m\,(1 - e^{-\alpha\,t})$$

aufgeladen. Zur Zeit T erreicht die Spannung $U\,(T)$ den kritischen Wert $U_0 < U_m$ und durch ein aktives Element wird die Spannung auf 0 zurückgesetzt und der Aufladevorgang beginnt von neuem. Es entsteht ein Signal mit Periode T.



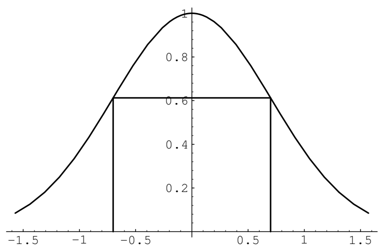
Die Grössen U_m und T sind fest vorgegeben. Die Grössen U_0 und α können variiert werden.

(a) Die Zeit T soll möglichst unempfindlich sein auf kleine Schwankungen (z.B. Temperatureffekte) von U_0. Verifizieren Sie, dass diese Bedingung erfüllt ist, falls die Steigung der Spannungskurve $U\,(t)$ bei $t = T$ maximal ist.

(b) Bestimmen Sie die optimalen Werte von α und U_0.

• Aufgabe 8–23:

Unter der Kurve $y = e^{-x^2}$ ist ein Rechteck zu konstruieren gemäss der nebenstehenden Figur.
Wo sind die Basispunkte des Rechtecks zu wählen damit die Fläche maximal wird? Berechnen Sie die maximale Fläche. Zeigen Sie, dass tatsächlich ein (lokales) Maximum vorliegt.



• Aufgabe 8–24:
Die Konstanten a und b sind positiv. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = a\,x\,e^{-b\,x}\;.$$

(a) Die Funktion hat ein Maximum beim Punkt $(1\,,\,2)$. Bestimmen Sie die Werte der Konstanten a und b.

(b) Finden Sie die x-Koordinate des Wendepunktes.

8.9.2 Kurvendiskussion

• Aufgabe 8–25:
Finden Sie (falls möglich) Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Funktion

$$f\,(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

und bestimmen Sie die Funktionswerte an diesen Stellen. Zeichnen Sie anschliessend den Graphen.

• Aufgabe 8–26:
Finden Sie (falls möglich) Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Funktion

$$f\,(x) = \frac{6x^2}{1+x^4}$$

und bestimmen Sie die Funktionswerte an diesen Stellen. Zeichnen Sie anschliessend den Graphen.

• Aufgabe 8–27:
Finden Sie (falls möglich) Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$$

und bestimmen Sie die Funktionswerte an diesen Stellen. Zeichnen Sie anschliessend die Graphen.

• Aufgabe 8–28:
Untersuchen Sie die Funktion $y(x) = e^{-x^2/2}(1-x^2)$.

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und die Steigungen bei den Nullstellen.

(b) Finden Sie alle kritischen Punkte und berechnen Sie die Grenzwerte von $y(x)$ für $x \to \pm\infty$.

(c) Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion mit Hilfe der oben bestimmten Werte.

• Aufgabe 8–29:
Finden Sie (falls möglich) Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = \frac{4x^2 - 8x}{(1+x^2)(x-2)}$$

und bestimmen Sie die Funktionswerte an diesen Stellen. Zeichnen Sie anschliessend den Graphen.

• Aufgabe 8–30:
Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = x^5 - 5\,x^3$$

(a) Finden Sie alle Nullstellen und alle kritischen Punkte und entscheiden Sie was für ein Typ vorliegt (Maximum, Minimum, Sattelpunkt).

(b) Finden Sie die exakte Lage aller Wendepunkte.

(c) Zeichnen Sie den Graphen qualitativ und qantitativ richtig mit Hife der obigen Informationen.

Alle Rechnungen sind **exakt** auszuführen. Der Taschenrechner soll nur zur Kontrolle der Ergebnisse verwendet werden.

• Aufgabe 8–31:
Finden Sie (falls möglich) Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = -\frac{(x-1)^2}{1+x}$$

und bestimmen Sie die Funktionswerte an diesen Stellen. Zeichnen Sie anschliessend die Graphen.

• Aufgabe 8–32:
Finden Sie alle speziellen Punkte (Extrema, Wendepunkte) des Graphen der unten gegebenen Funktion. Zeichnen Sie anschliessend den Graphen. Diese Aufgabe ist ohne Taschenrechner zu lösen und die Resultate sind exakt anzugeben.

$$f(x) = 10 + 2\,x^2 - x^4$$

• Aufgabe 8–33:
Finden Sie (falls möglich) Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = \left(x^2\right)^x$$

und bestimmen Sie die Funktionswerte an diesen Stellen. Zeichnen Sie anschliessend den Graphen. Eine vollständige Lösung dieser Aufgabe ist gegeben in [Blum84, p. 13].

• Aufgabe 8–34:
Betrachten Sie für $\lambda > 0$ die parameterabhängige Funktion

$$f_\lambda(x) = \cosh(x) + \frac{\lambda}{1+x^2}$$

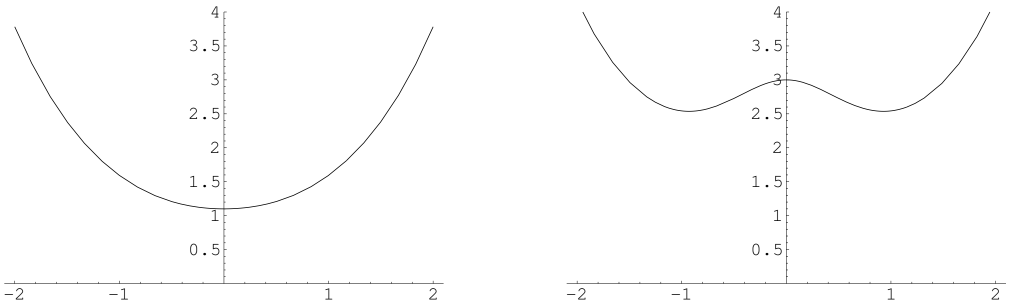


Abbildung 8.26: Plot der Funktion $f_\lambda(x) = \cosh(x) + \frac{\lambda}{1+x^2}$ für $\lambda = 0.1$ und $\lambda = 2$

Für welchen Wert von λ wechselt die Funktion ihr qualitatives Verhalten vom Bild links zum Bild rechts in Abbildung 8.26?

• Aufgabe 8–35:
Das Polynom

$$f(x) = \frac{1}{4}\,x^4 - \frac{4}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + a\,x + b$$

hat ein Extremum bei $x = 3$ und es gilt $f(0) = 2$. Die Rechnungen für diese Aufgabe sind exakt auszuführen, ohne Taschenrechner.

(a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b.

(b) Entscheiden Sie, ob bei $x = 3$ ein Maximum oder Minimum vorliegt.

(c) Finden Sie Lage, Wert und Typ der anderen Extremas.

(d) Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion für den Bereich $-2 \leq x \leq 4$ mit Hilfe der Extremas und des Verhaltens für $x \to \pm\infty$.

• Aufgabe 8–36:
Eine Kugel bewegt sich gleichmässig in der Ebene entlang der x-Achse gemäss der Formel $x(t) = v \cdot t$ und wird beobachtet vom Punkt $P = (3\,,\,-2)$ aus. Sei $\alpha(t)$ der Winkel zwischen der y-Richtung und der Richtung unter welcher die Kugel erscheint.

(a) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\dot\alpha(t)$

(b) Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung $\ddot\alpha(t)$

(c) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $\dot\alpha(t)$ und $\ddot\alpha(t)$.

8.9.3 Implizite Ableitungen

• Aufgabe 8–37:
Der Punkt $(x, y) = (2, -3)$ liegt auf der Kurve $y^4 - x^3 - 2\,y^2 + x - c = 0$, wobei c zu bestimmen ist. Bestimmen Sie die Steigung der Kurve in diesem Punkt.

• Aufgabe 8–38:
Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $y\,(x) = \arccos x$ mit Hilfe einer impliziten Ableitung.

• Aufgabe 8–39:
Seien f und g zwei Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und

$$g^2\,(x) + f^2\,(x) = 1$$

Es gelten die Beziehung

$$g'(x) = f(x)$$

Bestimmen Sie hieraus $f'\,(x)$, falls $f\,(x) \neq 0$

• Aufgabe 8–40:
Der Punkt $(1, 1)$ liegt auf der Kurve

$$e^{x-1} + y^2 + y^5 - 3x^2 = 0$$

(a) Finde die Gleichung der Tangente an die Kurve in diesem Punkt.

(b) Finde eine gute Approximation des x–Wertes des Punktes auf der Kurve mit $y = 1.1$.

• Aufgabe 8–41:
Betrachten Sie die Kurve

$$(x + 1)^3 + \tan\,(y/4) - 2y = 2 - 2\pi$$

$y = \pi$ ist ein Schnittpunkt mit der y–Achse. Finde den Winkel zwischen dieser Kurve und der y–Achse.

• Aufgabe 8–42:
Eine Kurve in der xy–Ebene ist beschrieben durch die Gleichung

$$2\,y^3 + 6\,x^3 - 24\,x + 6\,y = 0$$

(a) Die Kurve hat drei Schnittpunkte mit der x–Achse. Finden Sie diese.

(b) Es gibt nur einen Schnittpunkt mit $x > 0$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve in diesem Punkt. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente mit der y–Achse.

• Aufgabe 8–43:
der punkt $(2, 1)$ liegt auf der kurve

$$e^{x-2} + y + y^3 - 3\,x = k$$

in der xy–ebene.

(a) berechnen sie k.

(b) finden sie die gleichung der tangente an die kurve in diesem punkt.

(c) finden sie eine gute approximation des x–wertes des punktes auf der kurve mit $y = 1.1$.

8.9.4 Fehlerrechnung

• Aufgabe 8–44:
In einem Dreieck mit $a = 3$, $b = 4$ und $\gamma = 60^\circ$ gilt der Cosinussatz.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$$

Schätzen Sie die zulässige Änderung Δc von c, sodass $\Delta\gamma < 5^\circ$. Verwenden Sie Ableitungen.

• Aufgabe 8–45:
Die Brennweite einer Linse sei f. Befindet sich ein Objekt um u von der Linse entfernt, so finden Sie das Bild des Objektes in einer Distanz v, wobei

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$$

Verwenden Sie eine lineare Approximation.

(a) Sei $f = 1.0$ [m] und $v = 1.5$ [m]. Bestimmen Sie die Änderung Δu von u approximativ, falls der Abstand v um Δv variiert.

(b) Wie gross ist Δu, falls v von 1.5 auf 1.3 [m] ändert?

• Aufgabe 8–46:
Die Brennweite einer Linse sei f. Befindet sich ein Objekt um u von der Linse entfernt, so finden Sie das Bild des Objektes in einer Distanz v, wobei

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$$

Verwenden Sie eine lineare Approximation.

(a) Sei $f = 0.75$ [m] und $u = 1.25$ [m]. Bestimmen Sie die Änderung Δv von v approximativ, falls der Abstand u um Δu variiert.

(b) Wie gross ist Δv, falls u von 1.25 auf 1.3 [m] ändert?

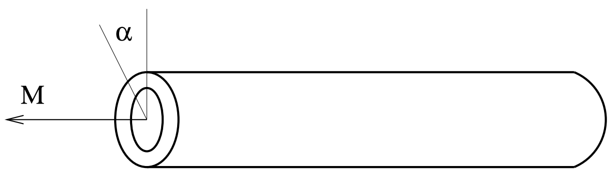
• Aufgabe 8–47:
Ein Rohr der Länge L, Innenradius R_1 und Aussenradius R_2 wird durch ein Moment M um den Winkel α verdreht. Untersuchen Sie den Winkel α als Funktion des Innenradius R_1.

$$\alpha = \frac{2\,(1+\nu)\,L}{E\,J}\,M \quad \text{wobei} \quad J = \frac{\pi}{2}\,\left(R_2^4 - R_1^4\right)$$

(a) Für eine kleine Änderung $\Delta R_1 \ll R_1$ ist die resultierende Winkeländerung $\Delta\alpha$ mit Hilfe einer linearen Approximation zu bestimmen.

(b) Drücken Sie die relative Änderung $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ als Funktion von R_1, R_2 und $\frac{\Delta R_1}{R_1}$.

(c) Verwenden Sie die untenstehenden Werte für ein Aluminium–Rohr. Bestimmen Sie α im Bogenmass und im Gradmass. Um wieviel darf der Radius R_1 variieren, damit $|\Delta\alpha| \leq 1^\circ$?



Symbol	Wert	Einheit
M	1	N m
L	1	m
R_1	3	mm
R_2	5	mm
E	$7 \cdot 10^{10}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
ν	0.34	

8.9.5 Verbundene Grössen

• Aufgabe 8–48:
Von einer Mottenkugel mit ursprünglichem Radius $r = 2$ cm verbleiben nach 6 Monaten noch eine Kugel mit Radius 1 cm. Bestimmen Sie den Radius r als Funktion der Zeit t. Gehen Sie davon aus, dass der Volumenverlust pro Zeit proportinal ist zur aktuellen Oberfläche S. ($V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$, $S = 4\,\pi\,r^2$)

• Aufgabe 8–49:
Ein rechteckiger Trog mit V–förmigem Querschnitt ist 2 m lang, 1 m breit und 0.5 m tief. Es fliesst Wasser mit einer Geschwindigkeit von 900 cm^3/s ein. Wie schnell steigt die Oberfläche, wenn das Wasser 25 cm hoch ist?

• Aufgabe 8–50:
Ein Junge lässt einen Drachen in 50 m Höhe fliegen. Wie schnell ([m/s]) wird die Schnur länger, wenn der Drachen vom Jungen 80 m entfernt ist und in der Waagrechten mit 6 m/s von ihm wegfliegt?

• Aufgabe 8–51:
Ein Zug fährt um 11 h nach Osten mit 75 km/h. Ein zweiter fährt mittags vom selben Ort nach Süden mit 100 km/h. Wie schnell entfernen sie sich voneinander um 15 h?

• Aufgabe 8–52:
Die Funktion

$$f\,(x) = e^{-b\,x}\,\sin\,(a\,x) \quad \text{für} \quad x > 0$$

hat für $b = 0$ und $a = 1$ ein erstes lokales Maximum bei $x = \pi/2$.

(a) Finden Sie eine Beziehung zwischen a und b, sodass das Maximum bei $x = \pi/2$ bleibt, auch wenn die Werte von a und b leicht abweichen.

(b) Lösen Sie die Gleichung von Teil (a) auf nach b .

(c) In welchem Bereich um 1 darf a variert werden, wenn $|b| < 0.1$ sein muss? Verwenden Sie eine lineare Approximation.

8.9.6 Newton–Verfahren

• Aufgabe 8–53:
Für kleine Werte der festen Zahl $z \approx 0$ ist der Wert von $x = \ln(1+z)$ bestimmt als Lösung der Gleichung

$$f(x) = e^x - 1 - z = 0$$

(a) Verwenden Sie das Verfahren von Newton um mit einem Schritt eine approximative **Formel** für x zu finden. Der Startwert x_0 ist geeignet zu wählen, möglichst einfach.

(b) Führen Sie einen zweiten Schritt des Verfahrens exakt aus $x_2 = \ldots$.

(c) Verwenden Sie das Resultat der vorangehenden Teilaufgabe um $x = \ln 1.2$ approximativ zu bestimmen.

• Aufgabe 8–54:
Die Funktion $f\,(x) = (\sin x)/x^2$ hat für positive Werte von x einige lokale Maxima und Minima.

1. Zeichne diese Funktion für $x > 0$.
2. Benutze das Verfahren von Newton, um das erste lokale Minimum zu finden. Die Wahl des Startwertes für das Newton–Verfahren ist zu begründen. Es sind nur 2 Schritte des Verfahrens auszuführen, was bei guter Wahl des Startwertes zu einer brauchbaren Genauigkeit führt.

• Aufgabe 8–55:
Für einen gegebenen Wert von $y \geq 1$ ist die Gleichung $y - \cosh(x) = 0$ nach x aufzulösen mit Hilfe des Verfahrens von Newton.

(a) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift, d.h. die Formel für x_{n+1} als Funktion von x_n .

(b) Für grosse, positive Werte von x kann die Funktion $\cosh x$ durch **eine** einfache Exponentialfunktion sehr gut approximiert werden. Verwenden Sie diese Approximation um für $y \gg 1$ einen guten Startwert x_0 für das Verfahren von Newton zu finden.

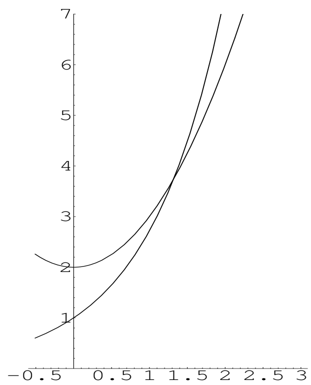
(c) Führen Sie einen Schritt des obigen Verfahrens aus um $\cosh x = 4$ nach x aufzulösen.

• Aufgabe 8–56:

Rechts sehen Sie die Graphen der beiden Funktionen $y = e^x$ und $y = 2 + x^2$. Verwenden Sie einen einfachen, ganzzahligen Starwert x_0 und **2 Schritte** des Verfahrens von Newton um die untenstehende Gleichung nach x aufzulösen.

$$2 + x^2 = e^x$$

À droite trouver les graphes des deux fonctions $y = e^x$ et $y = 2 + x^2$. Appliquer **2 pas** de la méthode de Newton avec une valeur initiale x_0 simple, entier pour résoudre l'équation ci–dessus pour x .



• Aufgabe 8–57:
Der Punkt $(5, 2)$ liegt auf der Kurve $y + x^2 - (5 - x)^{17} + \cos(y - 2) = 28$.

1. Finde die Gleichung der Tangente an die Kurve in diesem Punkt.

2. Finde rechnerisch eine gute Approximation für den x–Wert eines Punktes auf der x–Achse, der auch auf der Kurve liegt. Der Rechenweg ist zu begründen und ohne Hilfe des Taschenrechners auszuführen. Tip: Ein Schritt des Newton Verfahrens.

• Aufgabe 8–58:
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x\, e^{-x} \quad \text{für} \quad x > 0$$

1. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

2. Mit dem Verfahren von Newton sind Nullstellen der Funktion f zu suchen, wobei der Startwert $x_0 = 1.5$ eingesetzt wird. Konstruieren (zeichnen) Sie x_1 und x_2 möglicht genau mit Hilfe Ihres Resultates aus dem ersten Teil der Aufgabe.

3. Berechnen Sie x_1 und x_2 .

4. Betrachten Sie die Menge aller möglichen Werte von x_1, wobei Startwerte $x_0 > 1$ zugelassen sind. Finden Sie den minimal möglichen Wert von x_1 .

• Aufgabe 8–59:
Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = x^2\, e^{3\,x}$$

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion (Taschenrechner). Die Funktion hat ein lokales Maximum. Mit nur einem Schritt des Newton–Verfahrens ist eine möglichst gute Approximation des x–Wertes für dieses lokalen Maximum zu finden, ohne Verwendung des Taschenrechners. Als Startwert ist der beste der vier gegebenen Werte a_i zu verwenden. Geben Sie das exakte Resultat.

$$a_1 = -2 \quad , \quad a_2 = \frac{-1}{2} \quad , \quad a_3 = 0 \quad \text{oder} \quad a_4 = 1$$

• Aufgabe 8–60:
Betrachten Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{für} \quad x > 0$$

Untersuchen Sie das zweite lokale Minumum dieser Funktion. Mit nur einem Schritt des Newton–Verfahrens ist eine möglichst gute Approximation des x–Wertes für dieses lokales Minimum zu finden, ohne Verwendung des Taschenrechners.

• Aufgabe 8–61:
Versuchen Sie die Gleichung

$$e^x = x^3$$

zu lösen. Wählen Sie einen geeigneten ganzzahligen Startwert.

• Aufgabe 8–62:
Betrachten Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = x^2 - 4\,x + 7$$

Verwenden Sie das Newton–Verfahren, um die (nicht vorhandene) Nullstelle der Funktion zu suchen. Es gibt einige Startwerte x_0, für die gilt $x_0 = x_2$. Finden Sie zwei davon.

• Aufgabe 8–63:
Die Funktion $f(x) = \sin(x)\, e^x$ hat Funktionswerte von 1 in der Nähe von $n\,\pi$, d.h. $f(x_n) = 1$ mit $x_n \approx n\,\pi$.

(a) Verwenden Sie einen Schritt des Newton Verfahrens um eine approximative **Formel** zu finden für die Werte von x_n.

(b) Verwenden Sie Ihre obige Formel um x_2 nahe bei $2\,\pi$ zu bestimmen.

(c) Erklären Sie wieso die naive Approximation $x_n \approx n\,\pi$ für grosse Werte von n bereits von exzellenter Qualität ist.

• Aufgabe 8–64:
Bei gegebenem $z \in \mathbb{R}_+$ ist die Zahl x bestimmt durch die Gleichung

$$e^x = z$$

Die Zahl z sei nahe bei 1.0 . Für die ersten beiden Teilaufgaben darf **keine** Logarithmusfunktion verwendet werden.

(a) Finden Sie eine approximative Formel für x mit Hilfe eines Schrittes des Newtonverfahrens.

(b) Finden Sie eine approximative Formel für x mit Hilfe von **zwei** Schritten des Newtonverfahrens.

(c) Vergleichen Sie für $z = 1.1$ den obigen Wert von x und $\ln 1.1$. Kommentar?

• Aufgabe 8–65:
Untersuchen Sie die Funktion

$$f\,(x) = x\,e^{-2\,x}$$

Gesucht wird eine Nullstelle mit Hilfe des Newtonverfahrens. Nach einem Schritt erhält man den Wert $x_1 = 5$.

(a) Bestimmen Sie den(die) Startwert(e) x_0 exakt.

(b) Finden Sie (ohne Rechnung)

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n$$

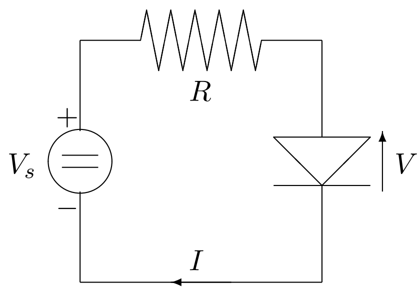
• Aufgabe 8–66:
Entwickeln Sie ein iteratives Verfahren, um lokale Extrema von Funktionen zu bestimmen, indem Sie das Newtonverfahren auf die Gleichung $f'\,(x) = 0$ anwenden. Testen Sie Ihr Verfahren an einigen Beispielen aus dem Abschnitt über Extremalprobleme.

• Aufgabe 8–67:

Für den Dioden–Widerstand–Kreis in der Figur rechts gelten die Beziehungen (Kirchhoff und Diodengleichung)

$$\begin{aligned} V_s - V &= I\,R \\ I &= I_s\,(e^{k\,V} - 1) \end{aligned}$$

Für gegebene Werte der Batteriespannung V_s, des Sättigungsstromes I_s, der Konstanten k und des Widerstandes R sind die Diodenspannung V und der Strom I zu bestimmen.



(a) Finden Sie eine Gleichung für die unbekannte Diodenspannung V.

(b) Finden Sie die Iterationsvorschrift für das Verfahren von Newton, um die Gleichung numerisch zu lösen.

(c) Wählen Sie eine Startspannung $V_0 = 0$, um mit dem Verfahren von Newton eine bessere Approximation für den wahren Wert von V zu bekommen. Bestimmen Sie V_1 exakt.

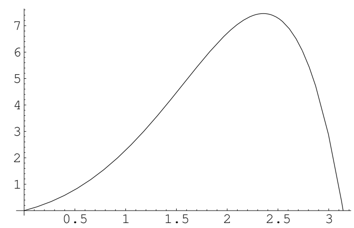
(d) Bei einer Beispielschaltung sei $k = 40\ V^{-1}$, $I_s = 10^{-14}\,A$, $V_s = 2\,V$ und $R = 22\,k\Omega$. Wählen Sie den Startwert $V_0 = 0.6\,V$ für das Verfahren von Newton und berechnen Sie V_1 und V_2 mit Hilfe des Taschenrechners.

• Aufgabe 8–68:

Untersuchen Sie die Funktion

$$f\,(x) = e^{x}\ \sin x$$

Zu untersuchen sind Tangenten an diese Kurve.



(a) Stellen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $(z, f(z))$ auf, mit der unabhängigen Variablen x.

(b) Es gibt einen ersten positiven Wert z, sodass die Tangente an die Kurve (bei $(z, f(z))$ den Ursprung schneidet. Finden Sie eine Gleichung für den Punkt z.

(c) Finden Sie eine gute Approximation des richtigen Wertes von z. Der Taschenrechner darf verwendet werden.

• Aufgabe 8–69:
Im Dezember 1994 hat sich herausgestellt, dass der Pentium–Prozessor der Firma Intel einige Probleme bei der Division von zwei Gleitkommazahlen hat. Bei gewissen Kombinationen von Zähler und Nenner sind nur die ersten vier bis fünf Stellen richtig. Zu bestimmen ist bei gegebenem $z \neq 0$ die Zahl $x = 1/z$. Entwerfen Sie einen Algorithmus, um das Resultat nachträglich zu verbessern.
Tip: $f(x) = z - \frac{1}{x}$

• Aufgabe 8–70:
Entwerfen Sie einen Algorithmus, um aus z und y den Wert $x = \frac{y}{z}$ zu berechnen. Sie dürfen nur Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen verwenden, und die Operationen sollten auf einem Mikroprozessor gut zu implementieren sein.
Tip: Nur das Bestimmen von $1/z$ ist relevant. Zuerst sollte der zu untersuchende Bereich für den Nenner z auf $1 \leq z \leq 2$ eingeschränkt werden. Dies ist leicht möglich, da z intern im Dualsystem dargestellt wird.

8.9.7 Interpolation

• Aufgabe 8–71:
Betrachten Sie die Tabelle

x	0.1	0.2	0.3
$\sin x$	0.09983	0.19867	0.29552

und bestimmen Sie daraus $z = \sin 0.25$ mittels

(a) linearer Interpolation.

(b) quadratischer Interpolation.

• Aufgabe 8–72:
Auf dem Intervall $[0, \pi]$ sind $n+1$ Punkte $x_i = i\,\pi/n$ gleichmässig verteilt, und für jeden Punkt wird $y_i = \sin x_i$ tabelliert. Zwischen diesen Punkten wird durch Geradenstücke interpoliert. Wie viele Punkte sind zu wählen, damit der Fehler kleiner als 10^{-6} ist?

• Aufgabe 8–73:
Auf dem Intervall $[0, \pi]$ sind $n+1$ Punkte $x_i = i\,\pi/n$ gleichmässig verteilt, und für jeden Punkt wird $y_i = \sin x_i$ tabelliert. Zwischen diesen Punkten wird durch Parabelstücke interpoliert. Wie viele Punkte sind zu wählen, damit der Fehler kleiner als 10^{-6} ist?

• Aufgabe 8–74:
Auf dem Intervall $[-1, 1]$ sind $n+1$ Punkte x_i gleichmässig verteilt, und für jeden Punkt wird $y_i = e^{x_i}$ tabelliert. Wie viele Punkte sind zu wählen, damit der Fehler kleiner als 10^{-6} ist

(a) falls eine stückweise lineare Interpolation verwendet wird?

(b) falls eine stückweise quadratische Interpolation verwendet wird?

8.9.8 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 8–1 : $t = 3.5$ und $h = \frac{265}{4} = 66 + \frac{1}{4}$

Lösung zu Aufgabe 8–2 : $h = \frac{2}{3}\sqrt{6}r$, $b = \frac{2}{3}\sqrt{3}r$, $W = \frac{8}{27}\sqrt{3}r^3$.

Lösung zu Aufgabe 8–3 : Sei $\alpha = \frac{w}{2}$ und L die Gesamtlänge des Seiles.

(a) Der Höhenunterschied H zwischen Oberkante des Balkens und dem Aufhängepunkt ist gegeben durch

$$H(\alpha) = L - 3\,b - \frac{b}{\sin\,\alpha} + \frac{b\,\cos\,\alpha}{2\sin\,\alpha} = L - 3\,b + \frac{b}{2}\,\frac{\cos\,\alpha - 2}{\sin\,\alpha}$$

Die Funktion ist im gegebenen Bereich differenzierbar.

(b) Es ist das Maximum der Funktion $H(\alpha)$ für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ zu finden. Für $\alpha \to 0+$ strebt der Funktionswert gegen $-\infty$ weil

$$\lim_{\alpha\to 0+} H(\alpha) = L - 3\,b - \frac{b}{2}\lim_{\alpha\to 0+}\frac{2 - \cos\,\alpha}{\sin\,\alpha} = -\infty$$

und es gilt

$$\lim_{\alpha\to\pi/2} H(\alpha) = H(\pi/2) = L - 4\,b$$

Die Ableitung der Funktion ist gegeben durch

$$\frac{\partial H}{\partial\alpha} = \frac{b}{2}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{\cos\,\alpha - 2}{\sin\,\alpha} = \frac{b}{2}\,\frac{-\sin^2\,\alpha - (\cos\,\alpha - 2)\,\cos\,\alpha}{\sin^2\,\alpha}$$

Somit ist die trigonometrische Gleichung

$$-\sin^2\,\alpha - (\cos\,\alpha - 2)\,\cos\,\alpha = -\sin^2\,\alpha - \cos^2\,\alpha - 2\,\cos\,\alpha = 0$$

zu lösen. Also ist

$$\cos\,\alpha = \frac{1}{2}$$

und somit

$$w = 2\,\alpha = \frac{2}{3}\,\pi = 120^\circ$$

Für diesen Wert von α findet man

$$H(\pi/3) = L - 3\,b + \frac{b}{2}\,\frac{1/2 - 2}{\sqrt{3}/2} = L - 3\,b - b\,\frac{\sqrt{3}}{2} > L - 4\,b$$

Somit wird das Maximum bei $w = 120^\circ$ erreicht.

Lösung zu Aufgabe 8–4 : $x \approx 26.7\text{m}$.

Lösung zu Aufgabe 8–5 :

$$\begin{aligned}
y(x) &= k\,(16\,x^4 - 12\,L\,x^3 + L^2\,x^2) \\
y'(x) &= k\,(64\,x^3 - 36\,L\,x^2 + 2\,L^2\,x) \\
&= k\,2\,x\,(32\,x^2 - 18\,L\,x + L^2) \\
0 &= 32\,x^2 - 18\,L\,x + L^2 \\
x_{1,2} &= \frac{1}{64}\left(18\,L \pm \sqrt{(18\,L)^2 - 128\,L^2}\right) \\
&= \frac{L}{64}\left(18 \pm \sqrt{18^2 - 128}\right) = \frac{L}{64}\,(18 \pm 14) = \left\{\begin{array}{l} L/2 \\ L/16 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y''(x) &= k\,(192\,x^2 - 72\,L\,x + 2\,L^2) \\
y''(L/2) &< 0 \quad \text{Maximum} \\
y''(L/16) &> 0 \quad \text{Minimum}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8–6 : $\frac{1}{2}$

Lösung zu Aufgabe 8–7 : Beide Zahlen sind 55.

Lösung zu Aufgabe 8–8 : Für den Keis sollten ca. 21.99 cm verwendet werden.

Lösung zu Aufgabe 8–9 : Ungefähr 4.9 m entlang des Hauses und 2.45 m senkrecht dazu.

Lösung zu Aufgabe 8–10 :

(a) Verwende Ähnlichkeit von Dreiecken um y als Funktion von x zu finden.

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x-2} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{x}{x-2} \quad \text{wobei} \quad x > 2$$

Die zu minimierende Funktion ist

$$f(x) = L^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

(b) Der natürliche Definitionsbereich ist $2 < x < \infty$ und die Funktion ist differenzierbar. Die beiden Randwerte $x \to 2$ und $x \to \infty$ erzeugen extrem grosse Werte. Somit sind nur die Nullstellen der Ableitung zu untersuchen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= L^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{x^2}{(x-2)^2} \\
\frac{d}{dx}\, f(x) &= 2\,x + \frac{2\,x\,(x-2)^2 - x^2\,2\,(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2\,x\,(x-2)^4 + 2\,x\,(x-2)^2 - x^2\,2\,(x-2)}{(x-2)^4} \\
&= \frac{2\,x\,(x-2)}{(x-2)^4}\,((x-2)^3 + (x-2) - x) = \frac{2\,x}{(x-2)^3}\,((x-2)^3 - 2)
\end{aligned}$$

Die zu lösende Gleichung im Bereich $2 < x < \infty$ ist somit $(x-2)^3 = 2$ mit der eindeutigen Lösung

$$x = 2 + \sqrt[3]{2} \approx 3.2599$$

Lösung zu Aufgabe 8–12 : Quelle [Klin77]

$$\begin{aligned}
c &= 2\,L - a - b \\
A(b) &= \sqrt{L\,(L-a)\,(L-b)\,(L-c)} = \sqrt{L\,(L-a)\,(L-b)\,(L-(2\,L-a-b))} \\
A(b)^2 &= L\,(L-a)\,(L-b)\,(a+b-L) \\
f(b) &= \frac{A(b)^2}{L\,(L-a)} = (L-b)\,(a+b-L) \quad \text{maximal} \\
\frac{d}{db}\,f(b) &= -(a+b-L) + (L-b) = 2\,L - a - 2\,b = 0 \\
b &= \frac{2\,L-a}{2} \\
c &= 2\,L - a - b = 2\,L - a - \frac{2\,L-a}{2} = \frac{2\,L-a}{2} = b
\end{aligned}$$

Somit gilt $b = c$. Wegen $\frac{d^2}{db} f(b) = -2 < 0$ liegt ein Maximum vor.

Mit analoger Rechnung kann gezeigt werden, dass $a = b$ und somit ist das Dreieck mit maximaler Fläche gleichseitig.

Lösung zu Aufgabe 8–13 :

(a)

$$\begin{aligned}
x^2 + h^2 &= R^2 \\
V(x) &= \pi\, x^2\, h = \pi\, x^2 \sqrt{R^2 - x^2} \\
\frac{\partial\, V(x)}{\partial x} &= \pi \left(2\,x \sqrt{R^2 - x^2} + x^2 \,\frac{-2\,x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \right) \\
&= \pi \left(2\,x \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) \\
&= \frac{\pi\, x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \,\left(2\,(R^2 - x^2) - x^2 \right) \\
&= \frac{\pi\, x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \,\left(2\,R^2 - 3\,x^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\, V(x)}{\partial x} = 0 \qquad \Longleftarrow \qquad x^2 = \frac{2}{3}\, R^2 \qquad \Longleftarrow \qquad x = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R$$

(b)

$$V = \pi\, \frac{2}{3}\, R^2 \sqrt{R^2 - \frac{2}{3}\, R^2} = \pi\, \frac{2}{3\sqrt{3}}\, R^3$$

$$\frac{V}{V_{\text{Halbkugel}}} = \frac{\pi\, \frac{2}{3\sqrt{3}}\, R^3}{\frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\,\pi\, R^3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (\approx 0.577)$$

Lösung zu Aufgabe 8–14 : Sei R der Radius des Kreises, der die Oberkante der Tüte formt. Die Länge der Oberkante der Tüte ist $2\,\pi\, R = \alpha\, r$ und somit ist der Radius $R = \frac{\alpha\, r}{2\,\pi}$. Die Höhe h ist bestimmt durch $h^2 = r^2 - R^2 = \left(1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}\right)\, r^2$

(a) Das Volumen lässt sich als Funktion des Winkels α schreiben.

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\, A\, h = \frac{1}{3}\,\pi\, \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}\, r^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}}\, r = \frac{r^3}{12\,\pi}\, \alpha^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}}$$

(b) Für ein maximales Volumen muss die Ableitung $\frac{d}{d\alpha}\, V$ Null sein.

$$\frac{d}{d\,\alpha}\, V(\alpha) = \frac{r^3}{12\,\pi} \left(2\,\alpha \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}} + \alpha^2\, \frac{-2\,\alpha/(4\,\pi^2)}{2\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}}} \right) = 0$$

Diese Gleichung lässt sich nach α auflösen.

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{d\,\alpha}\, V(\alpha) &= \frac{r^3}{12\,\pi} \left(2\,\alpha \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}} + \alpha^2\, \frac{-2\,\alpha/(4\,\pi^2)}{2\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}}} \right) \\
2\,\alpha \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}} &= \alpha^2\, \frac{\alpha/(4\,\pi^2)}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2}}} \\
2 - \frac{2\,\alpha^2}{4\,\pi^2} &= \frac{\alpha^2}{4\,\pi^2} \\
\alpha^2 &= \frac{8\,\pi^2}{3} \\
\alpha &= \sqrt{\frac{8}{3}}\,\pi = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\pi
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8–15 : Die Kosten K sind als Funktion von Radius r und Höhe h zu berechnen. Mit Hilfe der Bedingung für das Volumen kann die Variable h eliminiert werden.

$$\begin{aligned}
0.8 = V &= \pi\, r^2\, h \\
h &= \frac{V}{\pi\, r^2} \\
K &= 164\, \pi\, r^2 + 70\; 2\, \pi\, r\, h = 164 \cdot \pi\, r^2 + 70 \cdot 2\, \pi\, r\, \frac{V}{\pi\, r^2} \\
\frac{\partial}{\partial r} K &= 164 \cdot 2\, \pi\, r - 70 \cdot 2\, \frac{V}{r^2} \;=\; 0 \\
r^3 &= \frac{2 \cdot 70\, V}{164 \cdot 2\, \pi} \approx 0.10869 \\
r &\approx 0.477 \\
h &\approx 1.12
\end{aligned}$$

Somit ist die optimale Lösung gegeben durch $r = 0.48$ m und $h = 1.12$ m.

Lösung zu Aufgabe 8–16 : 7.07 m

Lösung zu Aufgabe 8–17 : Sei h der vertikale Abstand von der Decke und x die horizontale Koordinate, wobei $x = 0$ zwischen den beiden Lichtquellen liegt. Somit ist die Funktion

$$f\,(x) = \frac{1}{h^2 + (x + 2.5)^2} + \frac{1}{h^2 + (x - 2.5)^2}$$

zu untersuchen. Mit Hilfe eines modernen Taschenrechners oder eines Computers kann diese Funktion leicht graphisch untersucht werden. Unten finden Sie eine etwas längere Rechnung, um diese Aufgabe sorgfältig zu untersuchen.

Diese Funktion ist strikt positiv, und es gilt $\lim_{|x|\to\infty} f\,(x) = 0$. Die Intensität ist sicher nicht maximal für grosse Werte von $|x|$ und f ist überall differenzierbar. Somit sind die Nullstellen der Ableitung zu untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned}
f'\,(x) &= \frac{-2\,(x + 2.5)}{(h^2 + (x + 2.5)^2)^2} + \frac{-2\,(x - 2.5)}{(h^2 + (x - 2.5)^2)^2} \\
&= \frac{-2\,x - 5}{(h^2 + (x + 2.5)^2)^2} + \frac{-2\,x + 5}{(h^2 + (x - 2.5)^2)^2} \\
&= -\frac{(2\,x + 5)\;(h^2 + (x - 2.5)^2)^2 + (2\,x - 5)\;(h^2 + (x + 2.5)^2)^2}{(h^2 + (x + 2.5)^2)^2\;(h^2 + (x - 2.5)^2)^2}
\end{aligned}$$

Für $x \gg 1$ ist somit $f'\,(x) < 0$ und für $x \ll -1$ ist $f'\,(x) > 0$. Als kritische Punkte kommen nur Nullstellen des Zählerpolynoms in Frage. Da die Funktion f und der Nenner gerade sind, muss der Zähler ungerade sein. Nun versuchen wir zu vereinfachen.

$$\begin{aligned}
-\quad \text{Zähler} &= (2\,x + 5)\;(h^2 + (x - 2.5)^2)^2 + (2\,x - 5)\;(h^2 + (x + 2.5)^2)^2 \\
&= 2\,x\;\big((h^2 + (x - 2.5)^2)^2 + (h^2 + (x + 2.5)^2)^2\big) \\
&\quad +5\;\big((h^2 + (x - 2.5)^2)^2 - (h^2 + (x + 2.5)^2)^2\big) \\
&= 2\,x\;\big((h^2 + x^2 - 5\,x + 6.25)^2 + (h^2 + x^2 + 5\,x + 6.25)^2\big) \\
&\quad +5\;\big((h^2 + x^2 - 5\,x + 6.25)^2 - (h^2 + x^2 + 5\,x + 6.25)^2\big) \\
&= 4\,x\;\big(h^4 + x^4 + 5^2\,x^2 + 6.25^2 + 2\;(h^2\,x^2 + 6.25\,(x^2 + h^2))\big) \\
&\quad -100\,x\;\big(h^2 + x^2 + 6.25\big)
\end{aligned}$$

Eine offensichtliche Nullstelle ist $x = 0$, und mit der Substitution $z = x^2$ kann nun die quadratische Funktion $g\,(z)$ auf Nullstellen untersucht werden.

$$\begin{aligned}
g\,(z) &= \big(h^4 + z^2 + 5^2\,z + 6.25^2 + 2\;(h^2\,z + 6.25\,(z + h^2))\big) - 25\;\big(h^2 + z + 6.25\big) \\
&= z^2 + z\;\big(25 + 2\,h^2 + 12.5 - 25\big) + \big(h^4 + 6.25^2 + 12.5\,h^2 - 25\,h^2 - 25 \cdot 6.25\big)
\end{aligned}$$

Für diese nach oben geöffnete Parabel gilt

$$\begin{aligned} g(0) &= h^4 + 6.25^2 + 12.5\,h^2 - 25\,h^2 - 25 \cdot 6.25 \\ g'(0) &= 25 + 2\,h^2 + 12.5 - 25 = 2\,h^2 + 12.5 > 0 \end{aligned}$$

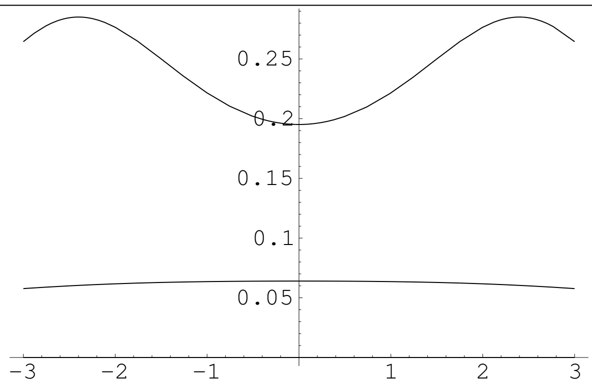
Sei $h_0 > 0$ der eindeutig bestimmte Wert mit $g(h_0) = 0$ ($h_0 \approx 4.33$). Es gilt:

- Ist $0 \leq h < h_0$, so ist $g(0) < 0$ und g hat somit genau eine positive Nullstelle z_0. Die Funktion $f(x)$ hat bei $x_0 = \sqrt{z_0}$ ein globales Maximum. Somit liegen die Intensitätsmaxima 2 Meter unterhalb der Decke in der Nähe der Lichtquellen.
- Ist $h > h_0$, so ist $g(0) > 0$ und g hat keine positive Nullstelle. Die Funktion $f(x)$ also nur bei $x = 0$ einen kritischen Punkt und nimmt dort das Maximum an. Somit liegt das Intensitätsmaximum 5 Meter unterhalb der Decke genau zwischen den beiden der Lichtquellen.

Das obige Resultat wird durch die Abbildung illustriert.

Mathematica

```
Clear[f,x,fig];
f[x_,h_] := 1/(h^2+(x+2.5)^2) + 1/(h^2+(x-2.5)^2);
fig=Plot[{f[x,2],f[x,5],0},{x,-3,3}];
```



Lösung zu Aufgabe 8–20 : Sei x die gesuchte Länge der Leiter, l der Abstand des Fusspunktes von der Wand und h die Höhe des Berührungspunktes. Dann gilt

$$\frac{h}{l} = \frac{h-8}{1} \quad \text{und} \quad x^2 = h^2 + l^2$$

Der zu untersuchende Bereich ist bestimmt durch $h > 8$ und $l > 1$. Die erste Gleichung kann nach l aufgelöst werden. Somit suchen wir das Minimum der Funktion

$$f(h) = h^2 + l^2 = h^2 + \left(\frac{h}{h-8}\right)^2$$

Diese Funktion ist für $h > 8$ differenzierbar, somit müssen wir Nullstellen der Ableitung finden.

$$\frac{d\,f}{dh} = 2\,h + 2\,\left(\frac{h}{h-8}\right)\,\left(\frac{(h-8)-h}{(h-8)^2}\right) = 0$$

Dies führt auf die Gleichung

$$1 - \frac{8}{(h-8)^3} = 0$$

mit der Lösung

$$(h-8)^3 = 8 \quad \text{und somit} \quad h = 10$$

Daraus erhalten wir

$$l = \frac{h}{h-8} = 5 \quad \text{und} \quad x^2 = h^2 + l^2 = 125 = 5\sqrt{5} \approx 11.18$$

Somit muss die Leiter mindestens $5\sqrt{5}$ m lang sein.

Lösung zu Aufgabe 8–21 : Seien b und h Breite und Höhe der Rechtecks. Dann gilt

$$A = b\,h + \frac{\pi}{8}\,b^2 \quad \text{und} \quad U = b + 2\,h + \frac{\pi}{2}\,b$$

Die Gleichung für A kann nach h aufgelöst werden

$$h = \frac{A}{b} - \frac{\pi}{8}\,b = \frac{8\,A - \pi\,b^2}{8\,b}$$

und dann in U eingesetzt werden.

$$U\,(b) = b + \frac{\pi}{2}\,b + 2\,h = b + \frac{\pi}{2}\,b + 2\,\left(\frac{A}{b} - \frac{\pi}{8}\,b\right)$$

Der zu untersuchende Bereich von b ist $b > 0$. Ableiten und Nullsetzen führt auf

$$\frac{d}{db}\,U\,(b) = 1 + \frac{\pi}{2} + 2\,\left(\frac{-A}{b^2} - \frac{\pi}{8}\right) = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2\,A}{b^2} = 0$$

und somit ist für

$$b^2 = \frac{8\,A}{4+\pi}$$

der Umfang extremal (genauer: es liegt ein kritischer Punkt vor). Die zweite Ableitung

$$\frac{d^2}{db^2}\,U\,(b) = 0 + \frac{4\,A}{b^3} > 0$$

zeigt, dass bei

$$b = \sqrt{\frac{8\,A}{4+\pi}}$$

ein Minimum vorliegt.

Lösung zu Aufgabe 8–22 :

(a) Für kleine Variationen ΔT und ΔU_0 gilt

$$\Delta U_0 \approx \frac{\partial U}{\partial T}\,\Delta T$$

Damit ΔT bei gegebenem ΔU_0 möglichst klein wird, muss also die Ableitung maximal sein.

(b) Zuerst bestimmen wir die Steigung der Kurve

$$\begin{aligned} U\,(t) &= U_m\,(1 - e^{-\alpha\,t}) \\ U'\,(t) &= U_m\,\alpha\,e^{-\alpha\,t} \\ U'\,(T) &= U_m\,\alpha\,e^{-\alpha\,T} \end{aligned}$$

Nun muss diese „neue“ Funktion bezüglich der Variablen α maximal werden. Dazu muss die Nullstelle der enstprechenden Ableitung bestimmt werden.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\,U'\,(T) = U_m\,e^{-\alpha\,T}\,(1 - \alpha\,T)$$

Diese partielle Ableitung ist Null für $\alpha = 1/T$ und folglich ist die optimale Parameterwahl

$$U_0 = U_m\,(1 - e^{-\alpha\,T}) = U_m\,(1 - \frac{1}{e})$$

Lösung zu Aufgabe 8–23 : Der zu untersuchende Bereich ist $0 < x < \infty$, und die Funktionen sind alle beliebig oft differenzierbar. Deshalb können wir uns auf Nullstellen der Ableitung konzentrieren.

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Fläche mit Stütztpunkten bei } \pm x \\ &= 2\,x\,e^{-x^2} \\ f'(x) &= 2\,e^{-x^2} - 4\,x^2\,e^{-x^2} \\ &= 2\,\left(1 - 2\,x^2\right)\,e^{-x^2} \end{aligned}$$

Die beiden Nullstellen sind bei $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Offensichtlich kommt nur die positive Lösung in Frage. Es gilt

$$f\,(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2}{\sqrt{2}}\,e^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{e}}$$

Um zu zeigen, dass ein lokales Maximum vorliegt, muss das Vorzeichen der zweiten Ableitung untersucht werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\,\left(-4\,x - 2\,x + 4\,x^3\right)\,e^{-x^2} \\ &= 4\,x\,\left(-3 + 2\,x^2\right)\,e^{-x^2} \\ f''(1/\sqrt{2}) &= 4\sqrt{2}\,(-3+1)\,e^{-1/2} < 0 \end{aligned}$$

Somit liegt ein lokales Maximum vor. Dies ist tatsächlich ein **globales** Maximum.

Lösung zu Aufgabe 8–24 :

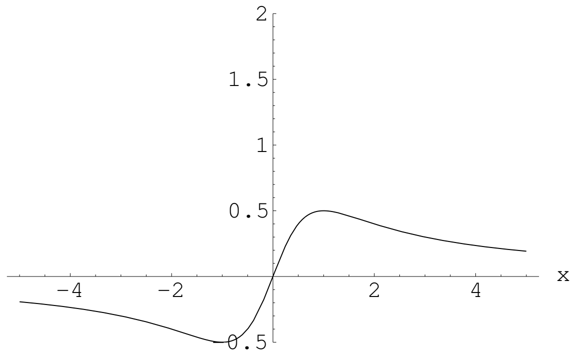
(a) Beim Maximum muss die Ableitung Null sein. Das führt auf

$$\begin{aligned} f(x) &= a\,x\,e^{-b\,x} \\ f'(x) &= a\,e^{-b\,x} - a\,x\,b\,e^{-b\,x} \\ 0 &= a\,(1-b)\,e^{-b} \qquad \Rightarrow \qquad b = 1 \\ f(1) = 2 &= a\,e^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad a = 2\,e \end{aligned}$$

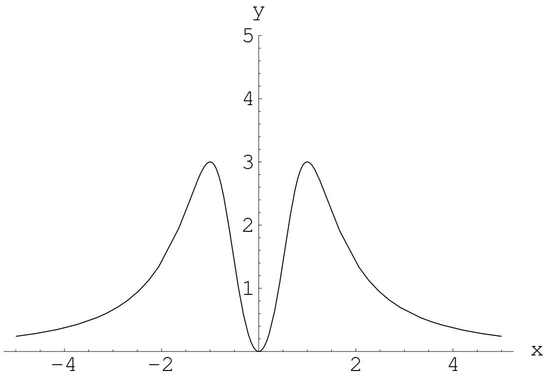
(b) Beim Wendepunkt ist die zweite Ableitung Null und somit

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,e\,x\,e^{-x} \\ f'(x) &= 2\,e\,(1-x)\,e^{-x} \\ f''(x) &= 2\,e\,(-2+x)\,e^{-x} \\ f''(x) &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2 \end{aligned}$$

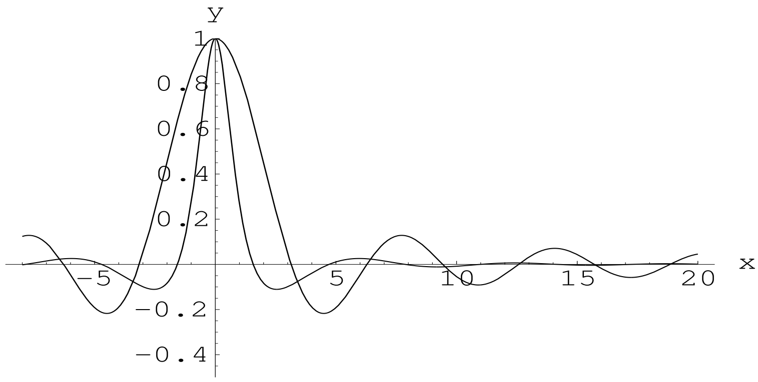
Lösung zu Aufgabe 8–25 :



Lösung zu Aufgabe 8–26 :



Lösung zu Aufgabe 8–27 :



Lösung zu Aufgabe 8–28 :

(a) Die Nullstellen sind $x_{1,2} = \pm 1$. Wegen

$$y'(x) = e^{-x^2/2} \left(-2\,x - x + x^3\right) = e^{-x^2/2} \left(-3\,x + x^3\right)$$

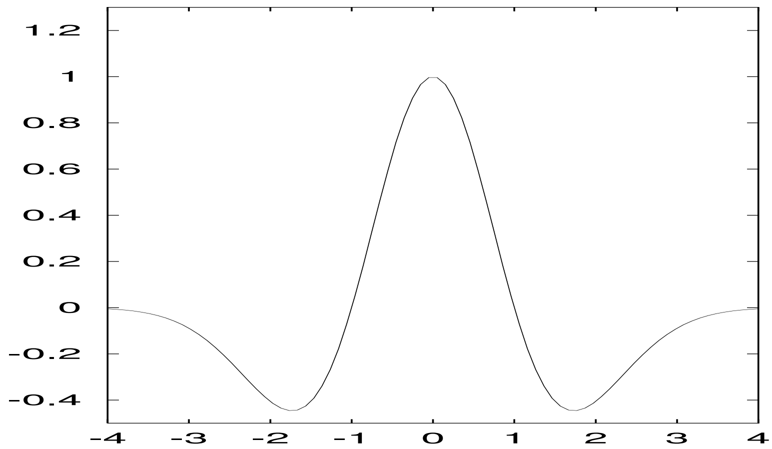
sind die Werte der Ableitung bei ± 1 gegeben durch $\mp 2\, e^{-1/2} \approx \mp 1.21$

(b) Als kritische Punkte kommen nur die Lösungen der Gleichung

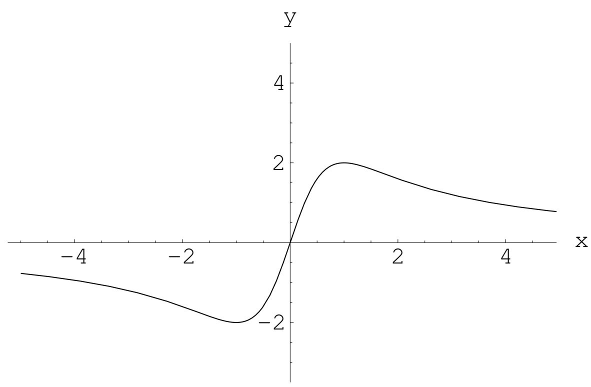
$$-3\,x + x^3 = x\,(x^2 - 3) = 0$$

in Frage und sind also durch $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ gegeben. Die Funktionswerte sind $y(x_1) = 1$ und $y_{2,3} = -1/e^{3/2}$. Für $x \to \pm\infty$ konvergiert $y(x)$ gegen 0. Somit haben wir die folgende Tabelle

$x =$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$
$y(x) =$	$-1/e^{3/2}$	0	1	0	$-1/e^{3/2}$
$y'(x) =$	0	$-2/\sqrt{e}$	0	$-2/\sqrt{e}$	0



Lösung zu Aufgabe 8–29 :



Lösung zu Aufgabe 8–30 : Die Funktion ist offensichtlich ungerade.

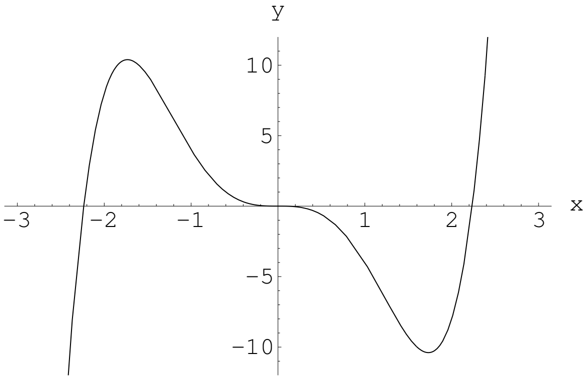
$f(x) = x^3\,(x^2-5)$	Nullstellen bei	$x=0$	und	$x = \pm\sqrt{5}$
$f'(x) = 5\,x^4 - 15\,x^2 = 5\,x^2\,(x^2-3)$	Nullstellen bei	$x=0$	und	$x = \pm\sqrt{3}$
$f''(x) = 20\,x^4 - 30\,x^2 = 10\,x\,(2\,x^2-3)$	Nullstellen bei	$x=0$	und	$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Man erhält

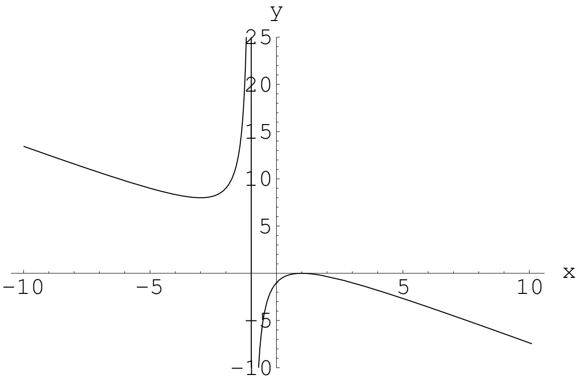
$x =$	0	$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{5}$
$f(x) =$	0	$\mp\frac{21}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\mp 6\,\sqrt{3}$	0
$f'(x) =$	0	$-\frac{45}{4}$	0	50
$f''(x) =$	0	0	$\pm 30\,\sqrt{3}$	$\mp 70\,\sqrt{5}$
Typ	Sattelpunkt	Wendepunkte	Extrema	Nullstellen

Um den Graphen zu zeichnen, ist es nicht nötig, die ganze Tabelle zu erstellen. Der untenstehende Teil genügt vollauf.

$x =$	0	$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{5}$
$f(x) =$	0	$\mp\frac{21}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \mp 6.4$	$\mp 6\,\sqrt{3} \approx \mp 10.4$	0
$f'(x) =$	0	negativ	0	positiv
$f''(x) =$	0	0		
Typ	Sattelpunkt	Wendepunkte	Extrema	Nullstellen



Lösung zu Aufgabe 8–31 :



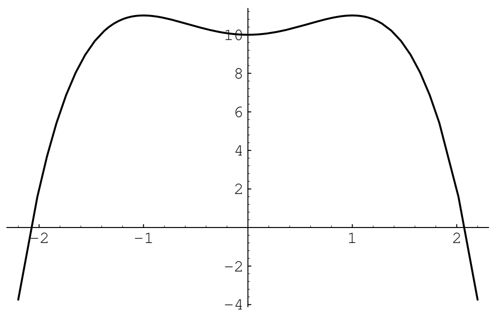
Lösung zu Aufgabe 8–32 :

Die Funktion ist **gerade**. Nullstellen können exakt gefunden werden, da $f(x) = 0$ eine biquadratische Gleichung ist.

$$x^2 = \frac{1}{2}\,\left(2 \pm \sqrt{44}\right) = 1 \pm \sqrt{11}$$

Es gibt somit zwei reelle Nullstellen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{1+\sqrt{11}}$$



Um weiter spezielle Punkte zu untersuchen, verwendet man Ableitungen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 10 + 2\,x^2 - x^4 \\ f'(x) &= 4\,x - 4\,x^3 = 4\,x\,(1-x^2) \\ f''(x) &= 4 - 12\,x^2 = 4\,(1-3\,x^2) \end{aligned}$$

Es gilt (exakte Rechnung!)

$$f(\pm 1) = 11 \quad , \quad f(\pm 1/\sqrt{3}) = 10 + \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = 10 + \frac{5}{9} \quad , \quad f'(\pm 1/\sqrt{3}) = \pm 4\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{2}{3} = \frac{\mp 8}{3\,\sqrt{3}}$$

$x =$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1
$f(x) =$	11	$10 + \frac{5}{9}$	10	$10 + \frac{5}{9}$	11
$f'(x) =$	0	$\frac{-8}{3\sqrt{3}}$	0	$\frac{8}{3\sqrt{3}}$	0
$f''(x) =$	-8	0	4	0	-8
Typ Punkt	Maximum	Wendepunkt	Minimum	Wendepunkt	Maximum

Lösung zu Aufgabe 8–34 : Beim kritischen Wert λ_c wechselt die Kurve von einem lokalen Minimum bei $x=0$ zu einen lokalen Maximum bei $x=0$. Somit gilt $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\lambda(\lambda_c, 0) = 0$ und das führt auf $\lambda_c = 1/2$.

Lösung zu Aufgabe 8–35 :

(a)

$$\begin{aligned} f\,(0) &= b = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad b = 2 \\ f'\,(x) &= x^3 - 4\,x^2 + x + a \\ f'\,(3) &= 27 - 4\cdot 9 + 3 + a = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 6 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f''\,(x) &= 3\,x^2 - 8\,x + 1 \\ f''\,(3) &= 27 - 24 + 1 = 4 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Minimum bei } \; x = 3 \end{aligned}$$

(c) Die anderen Nullstellen von $f'(x)$ müssen gefunden werden. Es kann eine Division von $f'(x)$ durch $(x-3)$ mit Hilfe des Schemas von Horner ausgeführt werden:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ x_0 = 3 & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

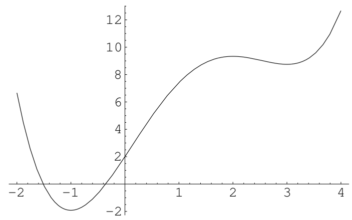
Somit gilt

$$f'\,(x) = x^3 - 4\,x^2 + x + 6 = (x-3)\,(x^2 - x - 2) = (x-3)\,(x-2)\,(x+1)$$

Die Extremas sind

Wert von x	$f\,(x)$	$f''\,(x)$	Typ des Extremums
$x = 3$	$f\,(3) = \frac{35}{4}$	$f''\,(3) = 4 > 0$	lokales Minimum
$x = 2$	$f\,(2) = \frac{28}{3}$	$f''\,(2) = -3 < 0$	lokales Maximum
$x = -1$	$f\,(-1) = \frac{-23}{12}$	$f''\,(-1) = 12 > 0$	lokales Minimum

(d)



Lösung zu Aufgabe 8–36 : Mit Hilfe einer einfachen Graphik erkennt man

$$\tan(\alpha(t)) = \frac{v\cdot t - 3}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha(t) = \arctan\left(\frac{v\cdot t - 3}{2}\right)$$

(a) Verwende Kettenregel und $\frac{d}{dx}\,\tan x = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\dot\alpha(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{v\cdot t-3}{2}\right)^2}\;\frac{v}{2}$$

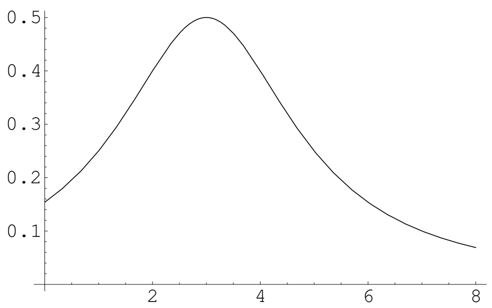
(b)

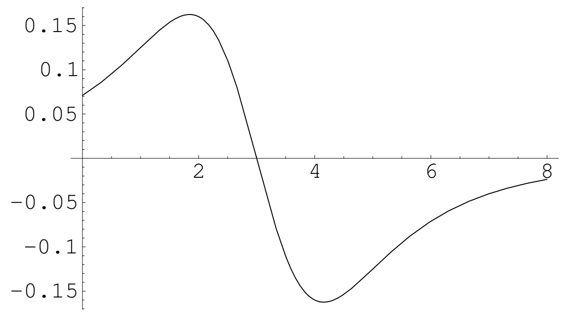
$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{-1}{\left(1+\left(\frac{v\cdot t-3}{2}\right)^2\right)^2}\,\frac{v^2}{4}\,(v\cdot t-3)$$

(c) Man kann die folgenden Aspekte erkennen:

- Die Funktion $\dot{\alpha}(t)$ hat ein Maximum bei $x=3$, d.h. bei $t_0 = 3/v$.
- Für $t < t_0$ ist $\ddot{\alpha}(t) > 0$.
- Für $t > t_0$ ist $\ddot{\alpha}(t) < 0$.
- Für $|t| \gg 1$ gilt $\dot{\alpha}(t) \approx \frac{2}{v\,t^2}$
- Für $|t| \gg 1$ gilt $\ddot{\alpha}(t) \approx \frac{-4}{v\,t^3}$

Für die Geschwindigkeit $v=1$ erhält man die beiden folgenden Graphen für $\dot{\alpha}(t)$ und $\ddot{\alpha}(t)$.





Lösung zu Aufgabe 8–37 :

$$\begin{aligned}
y(x)^4 - x^3 - 2\,y(x)^2 + x &= c\\
(-3)^4 - 2^3 - 2\,(-3)^2 + 2 &= 57 \;=\; c\\
4\,y(x)^3\,y'(x) - 3\,x^2 - 4\,y(x)\,y'(x) + 1 &= 0\\
4\,(-3)^3\,y'(2) - 3\,2^2 - 4\,(-3)\,y'(2) + 1 &= 0\\
y'(2) &= \frac{12-1}{-4\cdot 27+2} = \frac{-11}{96}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8–38 : Offensichtlich gilt

$$\cos\left(y\left(x\right)\right) = x$$

und somit

$$-\sin\left(y\left(x\right)\right)\cdot y'\left(x\right) = 1$$

und

$$y'\left(x\right) = \frac{-1}{\sin\left(y\left(x\right)\right)}$$

Für $0 < z = \arccos\left(x\right) < \pi$ gilt $\sin z = \sqrt{1-\cos^2 z}$ und somit

$$y'\left(x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2(\arccos\left(x\right))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2)}}$$

Lösung zu Aufgabe 8–39 :

$$\frac{d}{dx}\left(g^2\left(x\right)+f^2\left(x\right)\right) = 2\,\left(g\left(x\right)g'\left(x\right)+f\left(x\right)f'\left(x\right)\right) = 0$$

Somit gilt

$$f'(x) = \frac{-g(x)g'(x)}{f(x)} = \frac{-g(x)f(x)}{f(x)} = -g(x)$$

Lösung zu Aufgabe 8–40 : Fassen Sie $y(x)$ als Funktion von x auf und differenzieren Sie die Gleichung.

$$e^{x-1} + 2y \cdot y' + 5y \cdot y' - 6x = 0$$

Beim Punkt $(x, y) = (1, 1)$ gilt also

$$e^{1-1} + 2y' + 5y' - 6 = 0$$

und somit

$$y'(1) = \frac{5}{7}$$

(a) Die Punkt–Richtungsform einer Geradengleichung führt auf

$$y - 1 = \frac{5}{7}(x - 1) \quad \text{oder} \quad y = \frac{5}{7}x + \frac{2}{7}$$

(b) Setzen Sie $y = 1.1$ in der obigen Approximation durch die Tangente.

$$1.1 - 1 = \frac{5}{7}(x - 1) \quad \text{oder} \quad x = 1 + \frac{7}{50}$$

Lösung zu Aufgabe 8–41 : $y = f(x)$ und $f'(0) = 2$, also $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan 2 \approx 0.4636\ldots$

Lösung zu Aufgabe 8–42 :

(a) Schnitt mit x–Achse ($y = 0$)

$$6\,x^3 - 24\,x = 0$$

somit $x = 2$, $x = 0$ und $x = -2$.

(b) Offensichtlich ist der Punkt $(2, 0)$ gemeint. Durch eine implizite Ableitung erhalten wir

$$6\,y^2\,y' + 18\,x^2 - 24 + 6\,y' = 0\;.$$

und beim gegeben Punkt also

$$0 + 18\,2^2 - 24 + 6\,y'(2) = 0$$

und somit $y'(2) = -8$. Damit gilt für die Gleichung der **Tangente**

$$y = y(2) + y'(2)\,(x - 2) = -8\,(x - 2)$$

Der Schnittpunkt mit der y–Achse ($x = 0$) ist also beim Punkt $y = 16$.

Lösung zu Aufgabe 8–43 :

(a) der punkt $(2, 1)$ liegt auf der kurve und somit

$$k = e^{x-2} + y + y^3 - 3\,x = 1 + 1 + 1 - 6 = -3$$

(b) fassen sie $y(x)$ als funktion von x auf und differenzieren sie die gleichung.

$$e^{x-2} + y' + 3\,y^2 \cdot y' - 3 = 0$$

beim punkt $(x, y) = (2, 1)$ gilt also

$$e^{2-2} + y' + 3\,y' - 3 = 0$$

und somit

$$y'(2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

die punkt–richtungsform einer geradengleichung führt auf

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-2) \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{2}\,x$$

(c) setzen sie $y = 1.1$ in der obigen approximation durch die tangente ein. das führt auf

$$1.1 = \frac{1}{2}\,x \quad \text{oder} \quad x = 2.2$$

Lösung zu Aufgabe 8–44 :

$$\begin{aligned} \text{unabhängige Variable} &= \gamma \\ \text{abhängige Variable} &= c \end{aligned}$$

Länge c bei $\gamma = 60°$ ausrechnen

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma = 9 + 16 - 24\,\frac{1}{2} = 13 \\ c &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

Ableiten des Cosinussatz nach γ (c als Funktion von γ auffassen) und Einsetzen der Werte

$$\begin{aligned} c(\gamma)^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma \\ 2\,c(\gamma)\,\frac{d\,c}{d\gamma} &= +2\,a\,b\,\sin\gamma \\ \frac{d\,c}{d\gamma} &= \frac{a\,b\,\sin\gamma}{c} = \frac{12\,\sqrt{3}/2}{\sqrt{13}} = 6\,\sqrt{\frac{3}{13}} \end{aligned}$$

Für die maximale Änderung $\Delta\gamma = 5° = \frac{5\,\pi}{180}$ von γ gilt

$$\begin{aligned} \Delta c &\approx \frac{d\,c}{d\gamma}\,\Delta\gamma \\ &= 6\,\sqrt{\frac{3}{13}}\,\frac{5\,\pi}{180} \approx 0.2515 \end{aligned}$$

Deshalb darf c um 0.25 Längeneinheiten geändert werden. Die Grösse $\Delta\gamma = 5°$ muss im Bogenmass angegeben werden, da die Ableitungen der trigonometrischen Formeln für Winkel im Bogenmass gültig sind.
Quelle: [JordSmit94, p 79]

Lösung zu Aufgabe 8–45 :

Quelle : [JordSmit94, p 82]

(a) Die Distanz u ist als Funktion von v aufzufassen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u} &= \frac{1}{f} - \frac{1}{v} = \frac{v-f}{v\,f} \\
g\,(v) &= u = \frac{v\,f}{v-f} \\
g'(v) &= \frac{d}{dv}\,u = \frac{f\,(v-f) - v\,f}{(v-f)^2} = \frac{-f^2}{(v-f)^2} = \frac{-1^2}{0.5^2} = -4 \\
\Delta u &\approx g'\,(v)\,\Delta v = -4 \cdot \Delta v
\end{aligned}$$

(b) Hier ist $\Delta v = -0.2$ [m] und somit $\Delta u \approx -4 \cdot \Delta v = +0.8$ [m].

Eine Kontrollrechnung zeigt, dass

$$\begin{aligned}
v = 1.50 \text{ [m]} &\implies u = 3 \text{ [m]} \\
v = 1.30 \text{ [m]} &\implies u = 4.33 \text{ [m]} \\
v = 1.48 \text{ [m]} &\implies u = 3.08 \text{ [m]}
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die lineare Approximation bei $\Delta v = -0.2$ noch die korrekte Grössenordnung angibt, die Zahlenwerte aber schon recht stark abweichen. Für $\Delta = -0.02$ wäre die Approximation noch sehr gut.

Lösung zu Aufgabe 8–46 :

(a)

$$\begin{aligned}
g\,(u) &= v = \frac{1}{1/f - 1/u} = \frac{u\,f}{u-f} \\
g\,(u) &= v = \frac{u\,f}{f-u} \\
g'(u) &= \frac{d}{du}\,v = \frac{f\,(u-f) - u\,f}{(f-u)^2} = \frac{-f^2}{(f-u)^2} \approx -2.25 \\
\Delta v &\approx g'\,(u)\,\Delta u = -2.25 \cdot \Delta u
\end{aligned}$$

(b) Hier ist $\Delta u = +0.05$

$$\Delta v \approx g'\,(u)\,\Delta u \approx -2.25 \cdot 0.05 \approx -0.11 \text{ [m]}$$

Lösung zu Aufgabe 8–47 : Verwende eine lineare Approximation $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ und somit $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$. Die unabhängige Variable ist R_1 und die abhängige Variable ist der Winkel α .

(a) Verwende die Kettenregel um die Ableitung zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,\alpha}{\partial R_1} &= \frac{2\,(1+\nu)\;L\;M}{E}\,\frac{\frac{\pi}{2}\,4\,R_1^3}{J^2} = \frac{2\,(1+\nu)\;L\;M}{E\;J}\,\frac{4\,R_1^3}{\left(R_2^4 - R_1^4\right)} = \alpha\,\frac{4\,R_1^3}{\left(R_2^4 - R_1^4\right)} \\
\Delta\alpha &\approx \frac{\partial\,\alpha}{\partial R_1}\,\Delta R_1 = \alpha\,\frac{4\,R_1^3}{R_2^4 - R_1^4}\,\Delta R_1
\end{aligned}$$

(b) Division durch α führt auf

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{4\,R_1^4}{R_2^4 - R_1^4}\,\frac{\Delta R_1}{R_1}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{2\,(1+\nu)\,L}{E}\,\frac{2}{\pi\,\left(R_2^4-R_1^4\right)} \approx 0.0448 = 2.57^\circ \\
|\Delta\alpha| &\leq \alpha\,\frac{4\,R_1^3}{R_2^4-R_1^4}\,|\Delta R_1| \approx 8.89\,|\Delta R_1| \leq \frac{\pi}{180} \approx 0.017453 \\
|\Delta R_1| &\leq 0.0019\text{ m} = 1.9\text{ mm}
\end{aligned}$$

Diese Variation ist zu gross um noch mittels einer linearen Approximation behandelt werden zu können. Besser wäre eine Toleranz von 0.1° zu verlangen.

Lösung zu Aufgabe 8–48 : Die beiden Grössen Volumen V und Oberfläche S sind durch den Radius r miteinander verbunden. Der Radius hängt von der Zeit t ab. Die Änderungsrate (Ableitung) des Volumens ist gegeben. Daraus ergibt sich eine Bedingung an die Anderungsrate des Radius.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,V(t) &= -c\,S(t) \\
\frac{d}{dt}\,\frac{4\,\pi}{3}\,r^3(t) &= -c\,4\,\pi\,r^2(t) \\
4\,\pi\,r^2(t)\,\dot r(t) &= -c\,4\,\pi\,r^2(t) \\
\dot r(t) &= -c \\
r(t) &= r(0)-c\,t \\
r(6)=1 &= 2-c\,6 \qquad \Longrightarrow \qquad c=\frac{1}{6} \\
r(t) &= 2-\frac{t}{6}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8–49 : Es gilt

$$V = h^2\,L$$

und somit

$$\frac{d}{dt}\,V = 2\,L\,h\,\dot h$$

Beim zu untersuchenden Zeitpunkt gilt $L = 2\ [m]$, $h = 0.25\ [m]$ und $\dot V = 900\cdot 10^{-6}[\text{m}^3/\text{s}] = 9\cdot 10^{-4}[\text{m}^3/\text{s}]$ und somit

$$\dot h = \frac{\dot V}{2\,L\,h} = \frac{9\cdot 10^{-4}}{4\cdot 0.25}\ [\text{m/s}] = 0.09\ [\text{cm/s}]$$

Lösung zu Aufgabe 8–50 : 4.68 m/s

Lösung zu Aufgabe 8–51 : $87.5\sqrt{2}$ km/h

Lösung zu Aufgabe 8–52 :

(a)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -b\,e^{-b\,x}\,\sin(a\,x) + a\,e^{-b\,x}\,\cos(a\,x) \\
f'(\pi/2) &= e^{-\pi b/2}\,\left(-b\,\sin(a\,\pi/2) + a\,\cos(a\,\pi/2)\right) = 0 \\
0 &= -b\,\sin(a\,\pi/2) + a\,\cos(a\,\pi/2)
\end{aligned}$$

(b)

$$b = a\,\frac{\cos(a\,\pi/2)}{\sin(a\,\pi/2)}$$

(c)

$$\begin{aligned} g(a) &= b = a\,\frac{\cos(a\,\pi/2)}{\sin(a\,\pi/2)} \\ \frac{d\,g(a)}{da} &= \frac{\cos(a\,\pi/2)}{\sin(a\,\pi/2)} + a\,\frac{-\pi/2\,\sin^2(a\,\pi/2) - \pi/2\,\cos^2(a\,\pi/2)}{\sin^2(a\,\pi/2)} \\ \frac{d\,g(1)}{da} &= 0 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Somit gilt

$$b \approx g(1) + g'(1)\,\Delta a = 0 - \frac{\pi}{2}\,\Delta a$$

und somit

$$\begin{aligned} \Delta b &\approx -\frac{\pi}{2}\,\Delta a \\ |\Delta a| &\leq \frac{2}{\pi}\,0.1 \approx 0.0637 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8–53 : Der Wert von $z \approx 0$ sei fest. Dann ist der Wert von $x = \ln(1+z)$ gegeben als Lösung der Gleichung $f(x) = e^x - 1 - z = 0$.

(a) Mit $f(x) = e^x - 1 - z$ gilt $f'(x) = e^x$ und somit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - 1 - z}{e^{x_n}} = x_n - 1 + (1+z)\,e^{-x_n}$$

Wegen $z \approx 0$ und $e^0 = 1$ gilt $x \approx 0$ und wir wählen der Startwert $x_0 = 0$. Daraus folgt

$$x_1 = x_0 - 1 + (1+z)\,e^{-x_0} = z$$

Somit ist eine erste Approximation von $\ln(1+z)$ gegeben durch $x_1 = z$. Diese stimmt mit der Taylor–Approximation erster Ordnung überein.

(b) Der zweite Newtonschritt führt auf

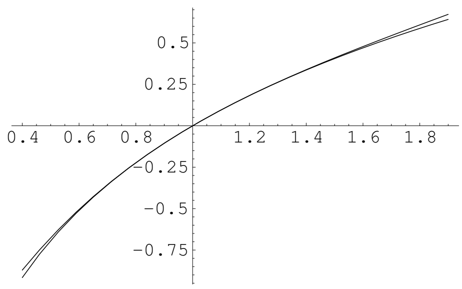
$$x_2 = x_1 - 1 + (1+z)\,e^{-x_1} = z - 1 + (1+z)\,e^{-z}$$

Somit ist eine bessere Approximation von $\ln(1+z)$ gegeben durch x_2 . Setzt man $x = 1+z$ so folgt $\ln x \approx x - 2 + x\,e^{-(x-1)}$ falls $x \approx 1$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} z &= 0.2 \\ \ln 1.2 &\approx 0.182322 \\ x_2 &= 0.2 - 1 + (1+0.2)\,e^{-0.2} \\ &= 0.182477 \end{aligned}$$

und wie erwartet ist der Unterschied von x_2 und $\ln(1+z)$ sehr klein. Die Graphik rechts zeigt die Graphen von $\ln(x)$ und $x - 2 + x\,e^{-(x-1)}$



Lösung zu Aufgabe 8–55 :

(a)

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
f(x) &= y - \cosh(x) \\
f'(x) &= -\sinh(x) \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{y - \cosh(x_n)}{-\sinh(x_n)} = x_n + \frac{y - \cosh(x_n)}{\sinh(x_n)}
\end{aligned}$$

(b) Für $x > 1$ ist $e^{-x} \ll e^x$ und somit

$$\begin{aligned}
y &= \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \approx \frac{1}{2}\,e^x \\
x &\approx \ln(2\,y) = x_0 \\
x_1 &= x_0 + \frac{y - \cosh(x_0)}{\sinh(x_0)} = \ln(2\,y) + \frac{y - \cosh(\ln(2\,y))}{\sinh(\ln(2\,y))}
\end{aligned}$$

(c) Wähle als Startwert $x_0 = \ln(2 \cdot 4) \approx 2.07944$. Man erhält

$$x_1 = \ln(8) + \frac{y - \cosh(\ln(8))}{\sinh(\ln(8))} \approx 2.06357$$

Das Resultat ist bereits eine gute Approximation von $\cosh^{-1}(4) \approx 2.06344$. Ein weiterer Schritt des Verfahrens von Newton führt auf $x_2 \approx 2.06344$. Der Fehler ist ca. $9 \cdot 10^{-9}$.

Lösung zu Aufgabe 8–56 : Die zu lösende Gleichung ist $f(x) = 2 + x^2 - e^x = 0$. Die Iterationsvorschrift von Newton lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2 + x_n^2 - e^{x_n}}{2\,x_n - e^{x_n}}$$

Als Startwerte kommen entweder $x_0 = 1$ oder $x_0 = 2$ in Frage. Das führt auf

$x_0 = 1$	$x_1 = 1.39221$	$x_2 = 1.32323$
$x_0 = 2$	$x_1 = 1.59013$	$x_2 = 1.37212$

Einige weitere Iterationen zeigen, dass die Lösung gegeben ist durch $x \approx 1.31907$.

Lösung zu Aufgabe 8–58 :

$$f'(x) = (1 - x)\,e^{-x}$$

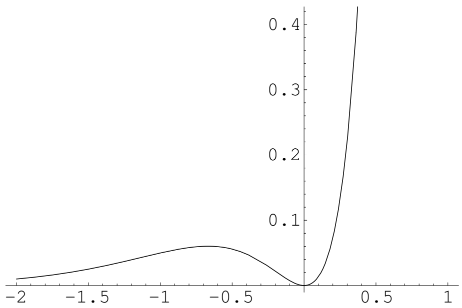
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n\,e^{-x_n}}{(1 - x_n)\,e^{-x_n}} = x_n - \frac{x_n}{(1 - x_n)}$$

mit $x_0 = 1.5$ gilt $x_1 = 4.5$ und $x_2 \approx 5.78571$. Somit sind alle Werte von z zu untersuchen, wobei

$$\begin{aligned}
z &= x - \frac{x}{1 - x} = \frac{-x^2}{1 - x} \quad \text{mit} \quad x > 1 \\
\frac{d\,z}{dx} &= \frac{-2\,x\,(1 - x) - x^2}{(1 - x)^2} = \frac{-2\,x + x^2}{(1 - x)^2} = 0
\end{aligned}$$

Damit ist der kritische Punkt bei $x = 2$, was auf einen Wert von $z = 4$ führt.

Lösung zu Aufgabe 8–59 :



Zu suchen ist eine Nullstelle der Ableitung

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(x) = 2\,x\,e^{3x} + 3\,x^2\,e^{3x} = (2\,x + 3\,x^2)\,e^{3x} \\ g'(x) &= f''(x) = (2 + 6\,x + 6\,x + 9\,x^2)\,e^{3x} = (2 + 12\,x + 9\,x^2)\,e^{3x} \end{aligned}$$

Das führt auf die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{(2\,x_n + 3\,x_n^2)\,e^{3x_n}}{(2 + 12\,x_n + 9\,x_n^2)\,e^{3x_n}} = x_n - \frac{2\,x_n + 3\,x_n^2}{2 + 12\,x_n + 9\,x_n^2}$$

Aufgrund der Graphik ist $x_0 = a_2 = \frac{-1}{2}$ als Startwert geeignet. Das ergibtdie Zahlen

$$x_1 = \frac{-1}{2} - \frac{-1 + \frac{3}{4}}{2 - 6 + \frac{9}{4}} = \frac{-1}{2} - \frac{-4 + 3}{-16 + 9} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-7} = -\frac{9}{14}$$

Lösung zu Aufgabe 8–61 :

$$f(x) = e^x - x^3 \quad \text{und} \quad f'(x) = e^x - 3\,x^2$$

somit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - x^3}{e^{x_n} - 3\,x^2}$$

Bei einem Startwert von $x_0 = 3.0$ führt das auf

$$x_1 = 2.0 \quad , \quad x_2 = 1.8675 \quad , \quad x_3 = 1.85725 \quad , \quad x_4 = 1.85718 \qquad \ldots$$

Lösung zu Aufgabe 8–63 :

(a) Zu lösen ist die Gleichung $g(x) = \sin(x)\,e^x - 1 = 0$. Da die Lösung in der Nähe von $n\,\pi$ liegen muss, verwenden wir diesen Wert als Startwert für das Verfahren von Newton.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x)\,e^x - 1 \\ g'(x) &= \cos(x)\,e^x + \sin(x)\,e^x \\ x_n &\approx n\,\pi - \frac{g(n\,\pi)}{g'(n\,\pi)} = n\,\pi - \frac{\sin(n\,\pi)\,e^{n\,\pi} - 1}{\cos(n\,\pi)\,e^{n\,\pi} + \sin(n\,\pi)\,e^{n\,\pi}} = n\,\pi - \frac{0 - 1}{(-1)^n\,e^{n\,\pi} + 0} \\ &= n\,\pi + (-1)^n\,e^{-n\,\pi} \end{aligned}$$

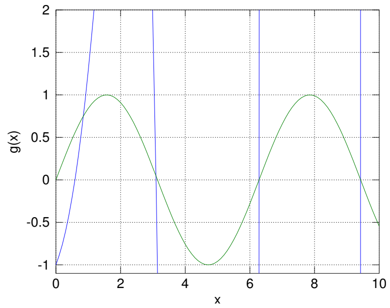
(b)

$$x_2 = 2\,\pi + e^{-2\,\pi} \approx 2\,\pi + 0.00187 \approx 6.2851$$

(c) Für grosse Werte von x ist e^x extrem gross und somit muss $\sin(x)$ fast Null sein, damit das Produkt $\sin(x)\,e^x = 1$ erfüllt. Wir erwarten die 1–Stellen von $f(x)$ in der Nähe der Nullstellen von $\sin(x)$, weil $\sin(x) = e^{-x}$ sein muss. Der Abstand von $n\,\pi$ zu x_n ist gegeben durch $\exp(-n\,\pi)$ und für grosse Werte von n wird diese Zahl extrem klein. Somit wird der berechnete Wert sehr nahe bei der wahren Nullstelle liegen. Der untenstehende Code erzugt den Graphen von $g(x)$ und $\sin(x)$.

Octave
```
n = 2;
function y = g(x)
  y = sin(x).*exp(x)-1;
endfunction

xn = n*pi+(-1)^n*exp(-n*pi)
xnOctave = fsolve(@g,n*pi)
Difference = xn - xnOctave
x = 0:0.1:10;
plot(x,g(x),x,sin(x))
xlabel('x'); ylabel('g(x)');
axis([0,10,-1.1,2]);
```



Lösung zu Aufgabe 8–64 :

(a) Zu lösen ist die Gleichung $f(x) = e^x - z = 0$. Wegen $z \approx 1$ verwendet man den Startwert $x_0 = 0$ und erhält

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1-z}{1} = z - 1$$

(b)

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = z - 1 - \frac{e^{z-1} - z}{e^{z-1}} = z - 2 + z\,e^{1-z}$$

(c) Die Werte von $x_2 \approx 0.09532$ und $\ln 1.1 \approx 0.095310$ weichen nur sehr wenig voneinander ab.

Lösung zu Aufgabe 8–65 : Wegen

$$f'(x) = e^{-2x}\,(1 - 2\,x)$$

gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n\,e^{-2x_n}}{e^{-2x_n}\,(1 - 2\,x_n)} = x_n - \frac{x_n}{1 - 2\,x_n} = \frac{-2\,x_n^2}{1 - 2\,x_n}$$

(a) Die Bedingung $x_1 = 5$ führt also auf die Gleichung

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{-2\,x_0^2}{1 - 2\,x_0} \\ 5 - 10\,x_0 &= -2\,x_0^2 \\ 2\,x_0^2 - 10\,x_0 + 5 &= 0 \\ x_0 &= \frac{1}{4}\,\left(10 \pm \sqrt{100 - 40}\right) = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

(b) Ein Blick auf den Graphen von $f(x)$ und ein grapisches Anwenden des Verfahrens von Newton ergibt $L = \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Lösung zu Aufgabe 8–67 :

(a) Durch Einsetzen kann der Strom I eliminiert werden, und man erhält

$$V_s - V = I\ R = I_s\,(e^{k\,V} - 1)\ R$$

(b) Zu lösen ist die Gleichung

$$f\,(V) = V_s - V - I_s\,(e^{k\,V} - 1)\ R = 0$$

Wegen

$$f'\,(V) = \frac{d}{dV}\ f\,(V) = -1 - k\,I_s\,R\,e^{k\,V}$$

erhalten wir

$$V_1 = V_0 - \frac{f\,(V_0)}{f'\,(V_0)}$$

(c) Bei $V_0 = 0$ ist somit

$$V_1 = 0 - \frac{f\,(0)}{f'\,(0)} = \frac{V_s - I_s\,(1-1)\ R}{1 + k\,I_s\,R} = \frac{V_s}{1 + k\,I_s\,R}$$

(d) Zwei Schrittes des Verfahrens von Newton liefern

$$V_1 \approx 0.581\,V \quad \text{und} \quad V_2 \approx 0.569\,V$$

Die „exakte“ Lösung wäre $0.565\,V$.

Lösung zu Aufgabe 8–68 :

(a) Die Tangente sei beschrieben durch die Funktion $y = g(x)$.

$$\begin{aligned} g\,(x) &= f\,(z) + f'\,(z)\ (x - z) \\ &= e^z\ \sin z + (e^z\ \sin z + e^z\ \cos z)\ (x - z) \end{aligned}$$

(b) In der obigen Gleichung muss $g(0) = 0$ gelten, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= e^z\ \sin z + (e^z\ \sin z + e^z\ \cos z)\ (0 - z) \\ 0 &= e^z\ (\sin z - (\sin z + \cos z)\ z) \\ 0 &= \sin z - (\sin z + \cos z)\ z = h\,(z) \end{aligned}$$

(c) Diese Gleichung kann mit dem Verfahren von Newton gelöst werden, wobei als Startpunkt $z_0 = 2$ in Frage kommt (siehe Graphik). Es ist eine Gleichung $h(z) = 0$ zu lösen, mit geeigneter Funktion h.

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 - \frac{h\,(z_0)}{h'(z_0)} \\ z_1 &= z_0 - \frac{\sin z_0 - (\sin z_0 + \cos z_0)\ z_0}{\cos z_0 - (\cos z_0 - \sin z_0)\ z_0 - (\sin z_0 + \cos z_0)} \\ &= z_0 + \frac{\sin z_0 - (\sin z_0 + \cos z_0)\ z_0}{(\cos z_0 - \sin z_0)\ z_0 + \sin z_0} \\ &= 2 + \frac{\sin 2 - (\sin 2 + \cos 2)\ 2}{(\cos 2 - \sin 2)\ 2 + \sin 2} \approx 2.04421 \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung führt auf $z_2 \approx 2.04279$. Die gezeigten Ziffern stimmen mit der „richtigen“ Lösung überein.

Lösung zu Aufgabe 8–69 : Offensichtlich ist $x = 1/z$ falls

$$f(x) = z - \frac{1}{x} = 0$$

Also kann man das Ergebnis von $x_0 = 1/x$ des Pentiums als Startwert für das Verfahren von Newton verwenden. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

und somit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{z - 1/x_n}{1/x_n^2} = 2\,x_n - z\,x_n^2 = x_n\,(2 - z\,x_n)$$

Für einen Schritt des Newtonverfahrens müssen zwei Multiplikationen und eine Subtraktion ausgeführt werden, aber keine Divisionen (was sehr wichtig ist!). Da der Startwert bereits 4–5 richtige Stellen hat sind nach zwei Schritten des Verfahrens mindestens ca. 16 Stellen richtig.

8.10 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- in der Lage sein Extrema von Funktionen einer Variablen zu untersuchen und einige typische Beispiele kennen.
- Kurvendiskussionen vollständig durchführen können.
- implizite Ableitungen und Ableitungen inverser Funktionen berechnen können.
- die Idee der linearen Approximation einsetzen können um Fehler abzuschätzen und Funktionen approximativ ausrechnen zu können.
- das Verfahren von Newton zur Lösung einer Gleichung in einer Unbekannten einsetzen können. Sie sollten mit den Stärken und Schwächen des Verfahrens vertraut sein.
- mittels stückweiser linearer oder quadratischer Interpolation Funktionen approximatieren können und mit den typischen Verhalten der Fehler vertraut sein.

Literaturverzeichnis

[Apos92a] T. M. Apostol and other. *A Century of Calculus, Part I 1894–1968*. The Mathematical Association of America, 1992.

[Apos92b] T. M. Apostol and other. *A Century of Calculus, Part II 1969–1991*. The Mathematical Association of America, 1992.

[Blum84] G. W. Bluman. *Problem Book for First Year Calculus*. Springer, New York, 1984.

[Bon91] C. Bondi. *New Applications of Mathematics*. Penguin Books, London, 1991.

[Bron93] I. Bronstein, K. Semendjaev, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1993.

[BurgHafWill92] K. Burg, H. Haf, and F. Wille. *Höhere Mathematik für Ingenieure, Band I Analysis*. Teubner, Stuttgart, 1992.

[JordSmit94] D. Jordan and P. Smith. *Mathematical Techniques*. Oxford University Press, Oxford, England, 1994.

[Klin77] M. Kline. *Calculus, an Intuitive and Physical Approach*. John Wiley and Sons, 1977.

[Leup85] W. Leupold and other. *Analysis für Ingenieure*. Harry Deutsch Verlag, Thun und Frankfurt, 16. edition, 1985.

[MeybVach90] K. Meyberg and P. Vachenauer. *Höhere Mathematik I*. Springer, Berlin, 1990.

[Nick91] H. Nickel and other. *Algebra und Geometrie für Ingenieure*. Fachbuchverlag, Leipzig, 1991.

[TenePoll85] M. Tenenbaum and H. Pollard. *Ordinary Differential Equations*. Dover, New York, 1985.

[Walt85] W. Walter. *Analysis I*. Springer–Verlag, Berlin, 1985.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis